Math. U. 151 h

Langsdorf

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

<36629126280019

S

<36629126280019

F Bayer. Staatsbibliothek

Grundlehren
der
mechaniſchen Wiſſenſchaften

welche
die Statik und Mechanik, die Hydroſtatik,
Aerometrie, Hydraulik und die
Maſchinenlehre
enthalten.

Mit beſonderer Rückſicht auf Phyſiker und
Praktiker

R

---

von
Karl Chriſtian Langsdorf,
Profeſſor zu Erlangen.

Erlangen,
bei Johann Jakob Palm.
1802.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Seiner Majeſtät

dem

Allerdurchlauchtigſten, Großmächtigſten

Könige von Preuſſen

Friedrich Wilhelm III.

dem

weiſſen Beherrſcher

glücklicher Völker

Allerdurchlauchtigſter,

Großmächtigſter König und Herr,

Im Genuſſe des Glücks, einen König, der in der gewiſſenhafteſten Erfüllung der Regentenpflichten Jeden ſeiner Unterthanen die Heiligkeit der Geſetze kennen lehrt; der keinen andern Gebrauch der oberſten Gewalt kennt, als den, der zur Beglückung ſeiner Staaten führt; der ſelbſt kein anderes Glück wünſcht, als das auf das Wohl ſeiner Unterthanen gegründet iſt; der Künſte und Wiſſenſchaften ehrt, weil ſie Millionen, die Er beherrſcht, beglücken: — Nur im Genuſſe des Glücks, einen Solchen König auch meinen König nennen zu dürfen, konnte ich es wagen, dieſe unbedeutende Blätter

vor dem Throne Eurer Königlichen Majeſtät niederzulegen, um hiermit zugleich die allertiefſte Ehrfurcht zu bezeugen, mit der ich nie zu ſeyn aufhören werde

Eurer Königlichen Majeſtät

Erlangen den 10 Apr.
1802.

allerunterthänigſter
Karl Chriſtian Langsdorf

Vorrede.

Zuerſt habe ich hier noch Einiges über meine in ebendieſer Verlagshandlung erſt in voriger Meſſe erſchienenen **Anfangsgründe der Reinen Elementar- und höheren Mathematik** zu erinneren. Ich hatte ſcharfe Prüfungen derſelben erwartet und mit Begierde den Gründen entgegen geſehen, welche man gegen das von mir angenommene Princip begränzter Theilbarkeit — das Einzige, worauf hier alles ankommt — anführen würde. Ich erwartete Gegengründe, die mir bei meiner Jahre langen mit reinſter Wahrheitsliebe angeſtellten Vergleichung des Princips der begränzten Theilbarkeit mit dem der unbegränzten etwa entgangen und deren Auffindung dem Scharfſinne Anderer vorbehalten geweſen ſeyn könnte. Indem ich aber ietzt die mannichfaltigen vor mir liegenden mir entgegengeſetzten Erinnerungen ſorgfältig zuſammenſtelle (mündliche und ſchriftliche mit eingeſchloſſen), finde ich mich nur noch mehr überzeugt, daß ich mich gegen das Princip der unendlichen Theilbarkeit nicht zu ſtrenge erklärt habe. Alle iene Erinnerungen zeugen von dem Beſtreben der Infinitiſten, alles zu thun, was nur immer eine ſo ſchlimme Sache erlaubt, um ihrem Satze einen Schein von Wahrheit zu geben, der die Bemerkung, daß er auf gar keinen Gründen und einzig auf Vorurtheilen beruhe, wenigſtens erſchweren ſoll. Wenn aber irgend eine ſchlimme Sache durch eine mißlungene Vertheidigung — von Män-

nern unternommen, deren Talente allgemeine Achtung verdienen — nur noch ſchlimmer werden muß, ſo gilt dieſes ganz vorzüglich vom Satze der unendlichen Theilbarkeit, der eben iezt, da man nach ſeinen Gründen ſucht, ohne ſie zu finden, in ſeiner ganzen Blöße erſcheint. Dieſes mögen die Erinnerungen beweißen, die man mir entgegengeſezt hat. Sie beſtehen etwa in folgendem:

1) Kant, Wolf, Lambert u. a. haben die unendliche Theilbarkeit angenommen!

2) Die Vorſtellung von der Ausdehnung könne auf keinen Begriff von ihr führen, weil ſie unmittelbar mit der Anſchauung gegeben ſey!

3) Die ſtetige Größe ſey ein ideales Ganzes oder ein ſolches Ganzes, das vor den Theilen vorhergeht und dieſe erſt möglich macht, das alſo keine beſtimmte Menge von Theilen mithin auch keine beſtimmte Einheit habe.

4) Durch die Zuſammenſetzung gleichartiger Theile erhalte man nur ein Aggregat aber kein Kontinuum!

5) Solle ein Raumpunkt zu einer Raumlinie hinzugeſezt ein neues Aggregat geben, ſo müſſe (wegen no. 4) dem Rpunkte ſelbſten Ausdehnung in die Länge zukommen, weil nur gleichartige Theile ein Aggregat geben können. Ueberhaupt müſſe ieder Theil eines ausgedehnten Ganzen ſelbſt ausgedehnt ſeyn!

6) Bei Vorausſetzung der begränzten Theilbarkeit ſey iede gerade Linie zugleich eine Staffellinie und ſelbſt dieſe Staffellinie ſey nicht von beſtimmter

Art, ſondern laſſe ſich in unzähligen Geſtalten abändern, alſo habe eine gerade Linie unzählige Geſtalten!

7) Man wiſſe nicht, wie breit? wie dick? ein Raumpunkt ſey!

8) Wenn 8 Rpunkte einen Würfel bilden; ſo müſſe ein einzeler Rpkt ſelbſt ein Würfel ſeyn, nur ein kleinerer!

Auf no. 1 wird man wohl keine Antwort verlangen.

Die Erinnerung (no. 2) bedürfte erſt einer umſtändlichen Erläuterung, um zu begreifen, daß damit etwas geſagt ſeyn ſolle, was gegen das Princip der begränzten Theilbarkeit ſtreite. Die Vorſtellung vom Dreieck iſt gleichfalls unmittelbar mit der Anſchauung gegeben; alſo kann man keinen Begriff vom Dreieck geben? Und wozu nützt dieſe ganze Erinnerung? Wenn ich ſage: Ausgedehnt ſeyn heiſſe ſo viel als aus Theilen beſtehen, die außer und unmittelbar neben einander liegen, ſo kommt hier nichts darauf an, ob dieſer Ausſpruch einen Begriff vom Ausgedehnt ſeyn gebe, ſondern ob dieſer Ausſpruch richtig ſey? Es mag dieſer Darſtellung nun der Namen eines Begriffs zukommen oder nicht, das kann hier, wo es auf Worte gar nicht ankommt, ganz gleich gelten. Hier iſt es genug, daß das Ausgedehnt ſeyn und das Außer- und unmittelbare Nebeneinanderſeyn einerlei Eigenſchaft bezeichnen; und das Einerleiſeyn dieſer beiden Ausdrücke iſt von dem Umſtand, daß die damit bezeichnete Eigenſchaft durch die Anſchauung erkannt werde, ganz unabhängig.

Die Erinnerung (no. 3) hält auch nicht die leichteſte Prüfung aus. Offenbar enthält dieſer Satz nicht etwa einen Beweiß gegen das Princip der begränzten Theilbarkeit ſondern die bloße Behauptung, daß dieſes Princip nicht ſtatt finde, nur in andern Worten ausgedruckt, und die Gegner verlangen nichts geringeres, als daß man dieſe Behauptung für den Beweiß ſelbſt ſolle gelten laſſen. Die Gegner ſchlieſen ſo: „Ein Ganzes, das ſeinen Theilen vorhergeht und dieſe erſt möglich macht, hat keine beſtimmte Menge von Theilen — Die ſtetige Größe iſt aber ein ſolches Ganzes — Alſo hat die ſtetige Größe keine beſtimmte Menge von Theilen" Man fodere doch nur den Gegnern den Beweiß des Mittelſatzes ab, um zu ſehen, wie ſie ſich im Kreiſe herumdrehen. Ein Ganzes, das nur als Inbegriff ohne beſtimmte Grenzen gedacht wird, kann allerdings als ein ideales Ganzes gelten, deſſen Theile der Menge nach unbeſtimmt ſind. Denkt man ſich z. B. die Zahl 1000, ſo hat man bloß ein ideales Ganzes vor Augen. Es ſind hier dem Gegenſtande, welchen man ſich unter der Zahl 1000 denken darf, keine beſtimmte Gränzen vorgeſchrieben, ſie iſt alſo für ſich unbegränzt, und ſo iſt es auch nothwendig jeder ihrer Theile und die Menge ihrer Theile. Es läßt ſich die Tauſend in eine unendliche Menge von Brüchen zerlegen. So ſagt alſo iener ſo tiefſinnig ſcheinende Satz nichts weiter, als was ieder Anfänger der Arithmetik beim erſten Unterrichte gelernt hat. Aber iene unendliche Menge von Brüchen bilden doch wohl keine ſtetige Größe? Nur kann man ſich unter der Tauſend auch eine ſtetige Größe denken, und es läßt ſich kein Bruch ſo klein annehmen, daß ſich nicht eine ſtetige Größe unter der Tauſend denken ließe, von der iener Bruch nicht noch einen Theil be-

bezeichnete, der nicht ſelbſt wieder eine große Menge von Theilen enthielte. Aber was ſollen dann dieſe Sätze hier beweiſen? Hier iſt bloß die Frage: ob eine **begränzte** ſtetige Größe aus einer beſtimmten Menge von Theilen beſtehe? Hierauf iſt der obige Satz gar nicht anwendbar. Uebrigens giebt das Vorhergehenſollen des Ganzen vor ſeinen Theilen dem obigen Satze zwar ein geheimnißvolleres und tiefſinnigeres Anſehen, aber dem Gehalte nach iſt es was gemeines, das in der Anwendung auf unſern Gegenſtand iedem Anfänger der Elementargeometrie bekannt iſt und auf die unendliche Theilbarkeit auch nicht den geringſten Bezug hat. Wer die erſte Vorſtellung von der Fläche eines Quadratfußes durch Anſchauung erlangt hat, bei dem geht die Vorſtellung von einem Quadratfuße der von einem Quadratzolle voran, aber die Vorſtellung von einer Fläche von 1000 Quadratruthen folgt nach. Ebenſo könnte auch die anſchauliche Vorſtellung eines Quadratzolles der eines Quadratfußes vorhergehen. Es bleibt inzwiſchen richtig, daß doch auch dann die anſchauliche Vorſtellung des Quadratzolles oder des angeſchauten Ganzen wiederum der ſeiner Theile vorangeht. Und ſo kann man auf analytiſchem Wege zur Vorſtellung von einer Fläche gelangen, die durch unmittelbare Anſchauung nicht mehr erlangt werden könnte z. B. die Vorſtellung von einem Quadrat, deſſen Seite $\frac{1}{1000000}$ von einer Pariſer Linie betrüge. Aber die Theile, auf welche man auf dieſem Wege immer weiter zurückkommt, werden auf dieſem Wege nicht erſt möglich gemacht, ſondern als Theile des Ganzen, mit dem ſie ſchon vorhanden waren, nur ſpäter aufgeſucht, oder als Theile nur ſpäter in die Vorſtellung gebracht. Wir machen daher durch unſere Vorſtellung eines auf die-

dieſem analytiſchen Wege immer von neuem erſcheinenden Theiles, auf keine Weiſe neue Theile dieſes Theiles möglich, ſondern gehen dabei nur auf die wirklich vorhandenen Theile in immer engere Gränzen zurück. Da alſo mit dieſen nach einander folgenden Vorſtellungen nicht zugleich Schöpfungen neuer Theile verbunden ſind, ſo iſt der Verſtand genöthigt, iener Reihe von Vorſtellungen ſelbſt eine Grenze zu ſetzen, oder vielmehr dieſe vorhandene Gränze anzuerkennen. Es iſt aber keine andere Gränze dieſer Reihe von Vorſtellungen denkbar, als die Vorſtellung des Einfachen, das keine Theile mehr enthält, ſelbſt aber Theil ieder ausgedehnten Größe iſt. So kommt man analytiſch auf den Raumpunkt. Aber der Geometrie iſt das ſynthetiſche Verfahren angemeſſener.

Die Erinnerung (no. 4) verräth entweder die ſichtbare Eile, mit der ſie hingeworfen wurde, oder die Verlegenheit der Gegner, in der ſie ſich bei dem Angriffe ihres Syſtems befinden. Was heißt dann ein Kontinuum? Setzt der Geometer nicht unzähligemal vielſeitige Figuren aus Dreiecken zuſammen? Und wenn hundert Raumlinien von gleicher Länge ſo neben einander liegen, daß iede die folgende in allen ihren Punkten berührt: iſt das ſo gebildete Räumliche kein Kontinuum? Geſchieht dem Begriffe von Kontinuität nicht völliges Genüge durch die Foderung des unmittelbaren Nebeneinanderliegens? Oder wird die Kontinuität dadurch aufgehoben, daß man die ſo gebildete Fläche ein Aggregat von Raumlinien nennt? Kann dann eine willkührliche Benennung eine Eigenſchaft aufheben? Man klebe doch nicht an Worten; man nenne immerhin eine ſo gebildete Fläche ein Aggregat von Raumlinien. Iſt darum iedes Aggregat von Raumlinien eine Fläche?

Die

Die Erinnerung (no. 5) enthält eine ganz eigene Verwickelung. Der Gegner ſieht die aus meinen Raumpunkten gebildete Raumlinie ganz richtig als ein Aggregat von Theilen an, die ich Raumpunkte nenne; er ſagt alſo ſelbſt, daß durch die Zuſetzung eines neuen Raumpunktes ein Theil ganz derſelben Art hinzugeſetzt werde, von welcher iene Theile ſind, aus welchen ich jede Raumlinie zuſammenſetze, alſo hätte er nothwendig zugleich eingeſtehen müſſen, daß das ſo veränderte Ganze nur ein größeres Aggregat von Raumpunkten alſo eine verlängerte Raumlinie ſey. Inzwiſchen wäre auf einem ſo natürlichen Wege keine neue Erinnerung zum Vorſchein gekommen. Daher die in der That merkwürdige Verwickelung. Die angenommene Raumlinie, welche vorher als ein Aggregat von Raumpunkten angeſehen wurde, gilt in der andern Hälfte des Satzes nicht mehr dafür; das neue Ganze, nach Zuſetzung des einen Raumpunktes, wird ietzt nicht mehr als ein Aggregat von Raumpunkten betrachtet, ſondern als ein Etwas, das ietzt aus ungleichartigen Theilen zuſammengeſetzt wäre, nämlich einer Raumlinie und einem Raumpunkte d. h. einem Ausgedehnten und einem Nichtausgedehnten Räumlichen! woraus alſo kein neues Aggregat entſtehen könne. So was ſcheint nur für Leſer geſchrieben zu ſeyn, die während dem Leſen vergeſſen, wovon die Rede iſt. Daß übrigens jeder Theil eines ausgedehnten Räumlichen ſelbſt ausgedehnt ſeyn müſſe, heißt ebenſoviel, als iedes ausgedehnte Räumliche müſſe unendlichtheilbar ſeyn. Und dieſes, d. h. die bloße Behauptung, daß iedes ausgedehnte Räumliche unendlichtheilbar ſeyn müſſe, ſoll die unendliche Theilbarkeit beweiſen!

Zur Erläuterung der Erinnerung (no. 6) dient (fig. 1*). Wenn ac der Durchmeſſer des Halbkreiſes abβγδc iſt, ſo kann man ab, aβ, aγ, aδ,

als Abſciſſenlinien und die zugehörigen bc, βc, γc, δc als ſenkrechte Ordinaten annehmen. Es ſey z. B. aδ : δc = 8 : 1, ſo ſteigt die ac über die aδ nur nach 8 Punkten iedesmal um einen Rpunkt, indeß iedes aus 8 nach einander folgenden Rpkten beſtehende Stückchen von ac allemal aδ gleichlaufend bleibt. Hiernach erhebt ſich alſo die ac nach Staffeln über die aδ, eben ſo nach Staffeln, die wieder von den vorigen verſchieden ſind, über die aγ u. ſ. w. Dieſes hat zu der 6ten Erinnerung Anlaß gegeben, die ſich aber ſehr leicht beantworten läßt. Die Bedeutung oder die Folge iſt nur dieſe: Ein Punkt, der ſich von a nach c in der geraden ac bewegt, hat mit der aδ allemal ein Stückchen (z. B. aα) gemein, und wenn er in der aδ ſich fortbewegen ſollte, ſo müßte er von α um eine Staffel (um einen Rpkt) herabtreten. Denkt man ſich durch a eine Parallele mit aδ, ſo hat die αc wieder ein ſolches Stückchen mit der gezogenen Parallele gemein, und wenn er ſich in dieſer Parallele fortbewegen ſollte, ſo müßte er wiederum am Ende eines ſolchen von αc abgeſchnittenen Stückchens um einen Rpunkt herabtreten u. ſ. w. So kommt alſo der Punkt, welcher in der geraden ac fortſchreitet ohne Staffeln bis c, aber ſeine Abweichung vom Parallelismus mit aδ (und ſo mit jeder andern aγ, aβ u. ſ. w.) bleibt auf eine gewiſſe Anzahl von Raumpunkten allemal = 0, wie ſolches die Beſtimmung durch eine Gleichung $y = \frac{h}{a} . x$ ſchon mit ſich bringt, indem man ſich unter x wie unter y eine Anzahl von Rpunkten denken kann, da dann nur ganze Raumpunkte in Rechnung kommen und Theile deſſelben = 0 werden. Wenn man von einer Linie, die ſich auf die Länge von 4 Theilen um einen ſolchen Theil erhebt, ſagt: ſie erhebe

hebe ſich auf ieden nach der Länge der Linie genommenen Raumpunkt um $\frac{1}{4}$ Rpkt, anſtatt zu ſagen: ſie bleibe auf die Länge von 4 Rpkten parallel, ſo thut man nicht unrecht, weil um $\frac{1}{4}$ Rpkt ſteigen ebenſoviel heißt als gar nicht ſteigen. Daher auch ohne Fehler für alle auf aδ genommene rechtwinklichte Koordinaten die Proportion $x : y = a : h$ oder aδ : δc zur Beſtimmung der geraden ac beibehalten werden kann. Die 7te und 8te Erinnerung bitte ich nicht für Scherz zu nehmen. Sie ſind mir von Männern gemacht worden, die ſcharf zu denken gewohnt ſind und die ſich in einer ſo ernſthaften Unterſuchung keinen Scherz erlaubt haben. Die 7te hängt nämlich mit der Unterſuchung der Irrationalzahlen zuſammen. Denn, ſagt mein Gegner, man weiß ia nicht, wieviel Decimalſtellen man z. B. von der zum Kreiſe gehörigen Zahl $\pi = 3,141592....$ nehmen müſſe, um bis auf eine zu kommen, die für Null gelten dürfe. Dieſes ließe ſich nun freilich beſtimmen, wenn man wüßte, wieviele Raumpunkte z. B. die Länge einer Pariſer Linie geben, da ſich dann für iedes r die erfoderliche Anzahl von Decimalſtellen daraus herleiten ließe. Dieſe Deutung muß der Frage wie dick? gegeben werden. Inzwiſchen hat die Unmöglichkeit, dieſe Frage zu beantworten, ganz und gar keinen Bezug auf die Wahrheit des Princips der begränzten Theilbarkeit, und ebenſo wenig Bezug auf die Folgen dieſes Princips. Wenn die erſte Ziffer einer Zahl, von der Rechten gegen die Linke gezählt, eine Centillion zur Einheit hätte, und die Einheit ieder folgenden Ziffer centillionenmal ſo groß als die der nächſtvorhergehenden wäre *), ſo dürfte die Zahl

*) Ein ſolches Beiſpiel heißt doch wohl nicht: mein Syſtem nöthige mich zur Abänderung des decadiſchen!

Zahl 999999999 vielleicht immer noch viel zu klein ſeyn, um die zur Länge einer Pariſer Linie erfoderliche Anzahl von Rpunkten anzugeben. Wozu könnte es dann nun dienen, eine ſo ungeheure Zahl wirklich zu kennen? Es wird doch wohl Niemand auf den ganz eigenen Gedanken kommen, daß man dieſe Zahl kennen müſſe, um den Werth von π völlig genau und bis zu der Decimalſtelle, die für Null gelten müſſe, berechnen zu können? In Bezug auf das, was wir leiſten können, iſt es einerley, ob die abnehmenden ſogenannten unendlichen Reihen wirklich als unendlich angeſehen werden können, oder ob ſie nur über alle Grenzen hinausgehen, die wir durch unſere Rechnungen erreichen können. Aber in Rückſicht auf die Frage, welches das wahre ſey? iſt es nicht gleichgültig, zu ſagen, eine Reihe beſtehe aus einer beſtimmten Menge von Gliedern oder ſie beſtehe aus einer unendlichen Menge. Es iſt alſo auch für den Begriff von den Irrationalzahlen nicht gleichgültig, ob das Eine oder das Andere (das Princip der unendlichen- oder das der begränzten Theilbarkeit) angenommen wird. Ebenſo wenig iſt es für die Abkürzung der Beweiſe in vielen Fällen gleichgültig, ob man bei der Anwendung auf Irrationalgrößen den einen oder den andern Begriff zum Grunde legt. Wiederum iſt es zur Begründung des Satzes, daß $d(xy) = xdy + ydx$, nicht aber $d(xy) = xdy + ydx + dx . dy$ ſey, keineswegs gleichgültig, ob man das eine oder das andere Princip annimmt. Ebenſowenig iſt es gleichgültig, das eine oder das andere Princip zu gebrauchen, um zu beweiſen, daß ein Flächenelement in aller Schärfe durch ydx ausgedruckt werde. Es iſt alſo für die Wiſſenſchaft als Wiſſenſchaft keineswegs gleichgültig, ob das eine oder das andere Princip zum Grund gelegt werde? ob meine

Raum-

Raumpunkte gelten oder nicht? Nur auf die Reſultate, die wir bey allen Anwendungen wirklich darzuſtellen im Stande ſind, hat dieſer Streit gar keinen Bezug. Inzwiſchen bleibt es immer auch Gewinn genug für die Ausübung, mit der beſtändigen Ueberzeugung zu ihr überzugehen, daß die Sätze, die man anwendet, aus ſichern Gründen abgeleitet worden ſind. Uebrigens fehlt es auch in der angewandten Mathematik nicht an Gelegenheit, die Evidenz zu zeigen, zu der die Anwendung meines Princips *) führt, oder die vielmehr in der Anwendung dieſes Princips liegt, und in ſolchen Anwendungen den daraus flieſenden Gewinn ſelbſt für die Ausübung zu erkennen. Es geſtattet Reihen von beſtimmten Geſtalten anzunehmen, wo das entgegengeſetzte Princip keine Reihen zuläßt und führt ebendadurch in vielen Fällen auf eine ſehr leichte und evidente Weiſe zu beſtimmten Reſultaten, wovon ich noch in dieſer Vorrede einen Beweiß geben werde. Dieſes zur Beantwortung der von demſelben Gegner, welcher zu wiſſen verlangte: wie dick? noch beſonders beigefügten Frage: was am Ende die Mathematik mit dieſer neuen Darſtellung gewonnen habe? Leſer der bisherigen Bemerkungen werden ſich nun die 8te Erinnerung ſelbſt beantworten. Die äußere Geſtalt eines Räumlichen wird bloß durch das örtliche Verhältniß ſeiner Grenztheile zu den zwiſchen-

*) Ich nenne es das meinige, inſoferne ich es ietzt als wahr und unumſtößlich anerkenne. Uebrigens verdanke ich die Zueignung dieſes Princips ganz dem unermüdeten Wahrheitsforſcher Herrn Prof. Abicht, der mich die Schwäche der Gründe für die unendliche Theilbarkeit zuerſt kennen lehrte. Leicht gab ich dieſes Princip gewiß nicht auf, da ich es ſelbſt 25 Jahre lang vertheidigt hatte.

ſchenliegenden Theilen beſtimmt. Daher kann dem einzelen Raumpunkte, der ohne alle Theile iſt, keine Geſtalt zukommen. Das einfachſte Geſtaltete iſt alſo eine aus zwei Raumpunkten beſtehende Rlinie. Zwei ſolche Raumlinien oder 4 Rpkte können die kleinſtmögliche Fläche, und vier ſolche Raumlinien oder 8 Rpkte können den kleinſtmöglichen Würfel bilden. Aber keineswegs iſt iedes ausgedehnte aus 4 Rpkten beſtehende Räumliche eine Fläche, oder iedes ausgedehnte aus 8 Rpunkten beſtehende Räumliche ein Würfel. Denn es können 4 oder 8 Rpkte auch eine Rlinie bilden. Auch läßt ſich nicht ſchlechtweg ſagen: ieder Raumpunkt ſey der 8te Theil des kleinſten Würfels, ſondern: Ein Raumpunkt iſt der 8te Theil derienigen Anzahl von Raumpunkten, die gehörig zuſammengeſetzt den kleinſtmöglichen Würfel geben. Hiermit ſteht alſo der Satz, daß Ein Rpkt ſchon ein Würfel ſey, im offenbaren Widerſpruch. Zum Beſchluß deſſen, was ich hier noch zur Widerlegung aller dem Princip der begränzten Theilbarkeit entgegengeſetzten Erinnerungen zu ſagen hatte, will ich noch folgendes beifügen, um zu zeigen, auf welchen einfachen Gründen dieſes ganze Princip beruht.

Ich frage: wie weit muß der Punkt a in der ac (fig. 1*) fortrücken, um ſo nahe an δc zu kommen, daß er nicht mehr weiter fortrücken kann, ohne ſich an δc unmittelbar anzulegen? Sollte man wohl denken, daß ſich in die Beantwortung einer ſo einfachen Frage ſoviele Dunkelheit und Geheimnisvolles legen laſſe, als wirklich das Princip der unendlichen Theilbarkeit hineinlegt? Nach dieſem iſt es unmöglich, daß a iemals in einen ſolchen Punkt gelangen könne, aus dem er bei fernerem Fortrücken die δc erreichte.

Denn

Denn ſolange er nicht an c anliegt, liegen zwiſchen ihm und c immer noch unendlich viele Theile, ſo nahe auch immer a an δc rücken mag. Er mag von dieſen Theilen ſoviele man will durchlaufen, ſo bleibt ihm immer eine unendliche Menge von Theilen bis an c übrig. Er kann alſo gar nicht bis an c kommen?

Inzwiſchen wird die Möglichkeit hier aus der Wirklichkeit erkannt. Da alſo a wirklich bis an c kommt, ſo muß doch wohl ebendieſer Punkt a vorher einen Punkt x erreichen, aus dem die Linie ax weiter fortgezogen an die cδ anſtößt. Welches iſt nun wohl der kleinſtmögliche Werth von ac — ax? Bevor ac — ax = o wird, muß ax durch alle mögliche Zuſtände durchgehen, die dem ax = ac vorhergehen. Unter dieſen vorhergehenden muß es einen letzten geben; denn gäbe es keinen letzten, ſo gäbe es auch keinen nach dem letzten, in welchem ax = ac wäre. In dieſem letzten von ac verſchiedenen Zuſtande iſt ac — ax der kleinſtmögliche Unterſchied beider Linien. Dieſer Unterſchied muß untheilbar ſeyn, weil er ſonſt nicht der kleinſtmögliche wäre. Und ebendieſen untheilbaren Unterſchied nenne ich einen Raumpunkt. Liegt hierin nicht die größte Evidenz? und hat die Geometrie noch evidentere Sätze aufzuſtellen? Aber man höre den Infinitiſt:

> Im letzten Zuſtande, der für ax möglich iſt, ohne = ac zu werden, iſt ac — ax noch ein ausgedehntes Räumliches, noch unendlich theilbar; es enthält alſo dieſer Unterſchied noch unendlich viele Theile, d. i. Zwiſchen den letzten Zuſtand von ax, der noch nicht = ac iſt, und den Zuſtand ac fallen noch unendlich viele Zwiſchenzuſtände, und der letzte

Zuſtand von ax iſt alſo nicht der letzte? der vor dem Zuſtande ac unmittelbar vorhergehende ax (einen unmittelbar vorhergehenden erfodert ſchon die Kontinuität) iſt nicht der unmittelbar vorhergehende?

Und ſolche Sätze ſollte irgend ein Philoſoph als begreiflich dargeſtellt, als unumſtößlich bewieſen haben? Nicht möglich!

Da das Princip der unendlichen Theilbarkeit ſchon ſolche Widerſprüche in ſich ſchließt, ſo kann es auch nicht an Beiſpielen in der Anwendung dieſes Princips fehlen, in welchen offenbare Abſurditäten für mathematiſche Lehren gelten ſollen. Z. B. der Infinitiſt läßt keinen Theil einer krummen Linie, ſo klein er auch immer genommen werden mag, für gerade gelten. Dennoch iſt ihm bei der Rektifikation krummer Linien die Hypothenuſe ($ds = \surd(dx^2 + dy^2)$) mit einem Stückchen der krummen Linie ganz einerlei. Zwar erinnert er dabei, dx und dy laſſen ſich ſo klein man immer wolle, alſo auch ds ſo klein denken, als man wolle, und dadurch werde daher auch $ds = \surd(dx^2 + dy^2)$ ſo genau man immer wolle. Aber dieſe Erinnerung hat nicht den geringſten Werth. Was der Infinitiſt zur Rechtfertigung jenes Satzes ſagen könnte, wäre dieſes: Man muß die unendliche Theilung als wirklich vollendet denken. Ohne dieſe Foderung bleibt ihm die Rechtfertigung des Satzes $ds - \surd(dx^2 + dy^2) = 0$ oder $\frac{ds}{\surd(dx^2 + dy^2)} = 1$ unmöglich, wie ſelbſt Schulz als Philoſoph und Mathematiker einräumt (ſ. meine Geom. §. 130). Nun kann aber die Theilung nicht bis auf Null vollendet gedacht werden, da einmal

Thei-

Theilung nie Null geben kann, und fürs andere hiermit der ganze Gegenſtand der Betrachtung vernichtet würde. Alſo kann nur dieienige Theilung als eine vollendete gedacht werden, durch die man auf ein Untheilbares, alſo bei Linientheilung auf das gekommen iſt, was ich einen Raumpunkt nenne. So führte aber das Princip der unendlichen Theilbarkeit ſelbſt auf die Nothwendigkeit, das Princip der begränzten Theilbarkeit anzunehmen. Welche Verwirrung!

Ebenſo betrachtet der Infinitiſt das Stückchen $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ als den Anfang einer an der krummen Linie gezogenen Berührungslinie. Dieſe ſoll aber, nach ſeiner Vorausſetzung nur einen geometriſchen Punkt mit der krummen gemein haben; alſo hat man ſich hier ein Dreieck zu denken, deſſen beide Katheten dx und dy ſind, und deſſen Hypothenuſe ein geometriſcher Punkt iſt. Iſt vielleicht der geometriſche Punkt ſelbſt ausgedehnt? oder giebt es ein Dreieck ohne Ausdehnung?

Von den vielen Inkonſequenzien, zu welchen das Princip der unendlichen Theilbarkeit führt, will ich hier nur noch folgende erwähnen.

Wenn auf dem lothrechten Durchmeſſer einer lothrechten Kreisfläche vom unterſten Punkt eine Abſciſſe v kleiner als iede angebliche Gröſſe genommen wird, deren zugehörige Ordinate z heiſſen ſoll, ſo ſoll der zugehörige Bogen $\sigma = \sqrt{(v^2 + z^2)}$ ſeyn. Dieſen Satz gebraucht ſelbſt der Infinitiſt bei allen Rektifikationen. Jede Logik wird alſo hieraus den natürlichen Schluß ziehen: der ſchwere Punkt eines einfachen Pendels, der den Bogen σ durchlauft, bewegt ſich durch die kleine Hypothenuſe $\sqrt{(v^2 + z^2)}$; und die Zeit, die er braucht, den kleinen Bogen σ zu durchlaufen, iſt daher dieſelbe, die er braucht, die

kleine Hypothenuſe $\sqrt{(v^2 + z^2)}$, die mit gedachtem Bogen kongruent iſt, zu durchlaufen. Dennoch findet ſelbſt der Infinitiſt die Zeit durch ſeinen unendlich kleinen Bogen ſehr verſchieden von der Zeit durch die zugehörige Sehne oder durch die gedachte Hypothenuſe. Er ſieht ſich daher genöthigt, hier die merkwürdige Erinnerung beizufügen:

> „Es dürfe hier die unendlich kleine „Sehne keineswegs mit dem unendlich „kleinen Bogen für einerlei gehalten „werden".

Wenn nun jenes Princip auf Widerſprüche gebaut iſt und wiederum auf Widerſprüche zurückführt, im Gegentheil aber der Satz der begränzten Theilbarkeit ſchon für ſich durch die Einfachheit und Evidenz ſeiner erſten Darſtellung dem Verſtande ſich empfiehlt; wenn überdas alle Folgen daraus in allen mathematiſchen Anwendungen unter ſich im genaueſten Zuſammenhange ſtehen, und ſich überall gegenſeitig beſtättigen, ſo darf ich doch wohl hoffen, daß

> wenigſtens aufkeimende Geometer, deren Verſtand noch durch keine Vorurtheile gefeſſelt iſt, den Weg der Wahrheit jenen Täuſchungen vorziehen und das ihrige dazu beitragen werden, daß die Geometrie in ihrem vollen Glanze erſcheine, und ihre alten Anſprüche auf die vollkommenſte Evidenz und auf den erſten Rang aller Wiſſenſchaften geltend mache.

Hiernach kann es nicht befremden, wenn ich auch in gegenwärtiger Einleitung in die mechaniſchen Wiſſenſchaften dieſem Princip getreu geblieben bin, deſſen unmittelbare Anwendung ich hier in viel mehr Fällen, als es geſchehen iſt, hätte zeigen können, wenn ich mir nicht bei der groſſen Menge einzelner Ge-

Gegenſtände dieſes Vergnügen hätte verſagen müſſen. Ich will dieſes hier nur durch ein einziges Beiſpiel beweiſen, das zu (§. 103) gehört. Es ergiebt ſich nämlich das Moment der Trägheit einer kreisförmigen Raumfläche ohne die gewöhnliche Integration aus vorerwähntem Princip unmittelbar ſo:

Es ſey x eine unbeſtimmte Abſciſſe im Kreiſe aus dem Mittelpunkt genommen, ſo iſt die zugehörige kleinere Kreislinie $= \pi . 2x$, und das Mom. d. Tr. dieſer Kreislinie $= 2\pi . x^3$. Man denke ſich nun x aus einer Anzahl von n feinen phyſiſchen Punkten zuſammengeſetzt, ſo hat man beynahe das Mom. d. Tr. der Kreislinie für den Halbmeſſer $x = 2\pi . n^3$ und für die kreisförmige Raumfläche, deren Halbmeſſer x wäre, $= 2\pi . (1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 \ldots . + n^3) = 2\pi . \frac{(n^2 + n)^2}{4}$ (Alg. S. 350), woferne die Entfernung eines jeden Punktes vom Mittelpunkte aus bis an ſeine äuſſere dem Umfange zugekehrte Gränze gemeſſen wird. Nimmt man aber den Abſtand eines ieden feinen phyſiſchen Punktes vom Mittelpunkt bis zu ſeiner inneren dem Mittelpunkte zugekehrten Gränze, ſo wäre das Moment der Trägheit $= 2\pi . (0 + 1 + 2^3 + 3^3 \ldots + (n-1)^3)$. Und da der wahre Werth zwiſchen beyde fallen muß, ſo giebt ihn die Subſtitution, $n - \frac{1}{2}$ für n, deſto genauer, ie feiner der Punkt iſt Dadurch wird er aber $= \frac{2\pi . ((n - \frac{1}{2})^2 + n - \frac{1}{2})^2}{4} = \frac{1}{2}\pi . (n^2 - \frac{1}{4})^2$. Für untheilbare Raumpunkte giebt er alſo den geſuchten Werth in völliger Schärfe $= \frac{1}{2}\pi . (n^2)^2 = \frac{1}{2} n^2 . \pi n^2$, weil

$\frac{1}{4}$ Raumpunkt = 0 iſt. Hier iſt nun n die Anzahl von Rpkten, aus welchen der Halbmeſſer beſteht. Setzt man alſo ſtatt derſelben den Halbmeſſer r, ſo hat man M. d. Tr. = $\frac{1}{2}r^2 . \pi r^2$, oder, wenn der Inhalt der Kreisfläche mit F bezeichnet wird, = $\frac{1}{2}r^2 . F$.

Wer kann eine evidentere Darſtellung fodern? Man ſieht, wie hier Raumlinien addirt werden, ohne daß man zu wiſſen nöthig habe, wie dick eine Raumlinie ſey?

Nunmehr wird es auch wohl nicht befremden, wenn ich für das ausgedehnte Zeitige ebenſowohl einfache Zeitpunkte annehme, wie für das ausgedehnte Räumliche einfache Raumpunkte. Wenn letztere erwieſen ſind, ſo müſſen erſtere nothwendig angenommen werden, wovon ich den Beweiß im Buche gegeben habe. Der Zeitpunkt iſt der untheilbare Zeittheil, in welchem die kleinſtmögliche Aenderung oder das Fortrücken durch einen Raumpunkt erfolgt. Alle Sätze der Mechanik, die als ſtrenge erwieſen angenommen werden müſſen, ſtehen auch mit dieſem Satze ſo wie unter ſich in dem genaueſten Zuſammenhange. Nirgends leidet er auf undeutliche Darſtellungen, er vernichtet alle Widerſprüche und verbreitet Licht über alles. Ich will hierzu ein Beiſpiel aus dieſem Buche (S. 109) nehmen, wo begränzte Theilbarkeit ſowohl des Räumlichen als des Zeitigen zum Grunde liegt. Der Weg des Atoms im Kreiſe iſt überall ein gerades Stückchen; man weiß alſo überall, was man unter der Richtung des Punktes in jeder Stelle ſeiner Bahn zu denken hat; dt iſt hier eine beſtimmte Anzahl von Zeitpunkten, alſo ein beſtimmter aliquoter Theil der zur Ausmeſſung willkührlich angenommenen Einheit z. B. einer Sekunde. Der bewegte Atom kann anfänglich ungehindert durch eine unermeßliche Menge von Raumpunkten

ten in gerader Linie fortrücken, ohne ſich vom Mittelpunkte weiter zu entfernen. Endlich tritt aber der Atom in eine Stelle, aus der er nicht weiter in der geraden Linie fortrücken könnte, ohne ſich vom Mittelpunkte um einen Raumpunkt weiter zu entfernen, welches dann wirklich erfolgen müßte, wenn ihn nicht eine Kraft gegen den Mittelpunkt zurückhielte. In dieſem Augenblick äuſſert er alſo ſeine Centrifugalkraft p. Jedesmal nach Verfluß von dt Zeitpunkten würde der Atom vermöge dieſes Beſtrebens p um einen Raumpunkt ſich vom Mittelpunkt entfernt haben, woferne er nicht gehalten worden wäre. Aber vermöge einer der natürlichen Schwere gleichen Kraft würde er in der Zeit dt um $(dt)^2 . g$ Raumpunkte (indem g ſich auf eine Anzahl von Raumpunkten bezieht) fortgerückt ſeyn. Alſo wird $p : 1 = 1 : g (dt)^2$, unſere Schwere $= 1$ geſetzt. Es kommt alſo noch drauf an, $1 : g (dt)^2$ näher zu beſtimmen. Ich gebrauche hierzu wiederum den auf das Princip begränzter Theilbarkeit gebauten Satz (Geom. §. 109), den die Euklidiſche Geometrie nicht kennt, und finde durch ihn $1 : g (dt)^2 = 2v : r$, alſo $p : 1 = 2v : r$. Kann man nur eine evidentere Darſtellung wünſchen?

Lehrten nicht tauſendfältige Erfahrungen, daß ein Kameel eher durch ein Nadelohr durchkrieche, als daß eine wichtige Menſchenklaſſe zweitauſendjährige Vorurtheile auf den erſten Wink ablege, ſo würde ich ſehr um Entſchuldigung bitten, daß ich noch ſovieles zum Beweiſe der Richtigkeit jenes Princips beigebracht habe. Leider finde ich mich aber durch die Allgewalt der Vorurtheile vielmehr noch veranlaßt, eine eigene zu dieſer Abſicht beſonders ausgearbeitete Abhandlung von einem Methaphyſiker, Herrn Prof. Abicht, am Ende dieſer Vorrede beizufügen, die ich beſonders der Aufmerkſamkeit angehender Geometer empfehle, die noch

keinem Syſteme zugeſchworen, noch kein öffentliches Glaubensbekenntniß abgelegt haben.

Daß ich übrigens nicht bloßen Leitfaden zum mündlichen Unterricht im vorliegenden Buche habe liefern, auch bei deſſen Ausarbeitung weder Andere noch mich ſelbſt habe ausſchreiben wollen, wird man ſchon beim erſten Durchblättern finden. Mein Intereſſe für die Wiſſenſchaft foderte mich ſchon dazu auf, alle hier vorkommenden Gegenſtände einer neuen Unterſuchung zu unterwerfen. Im Vortrage bin ich von Andern darin abgegangen, daß ich die Maſchinenlehre etwas ſchärfer von den allgemeinen Fundamentallehren abgeſchnitten habe. Ich habe das Reine vom Angewandten wenigſtens inſoweit, als nach meiner Erfahrung eine ſolche Scheidung beym Studium dieſer Wiſſenſchaften von Nutzen ſeyn konnte, abgeſondert. In der Statik und Mechanik konnte ich in dieſer Abſonderung eine größere Strenge beobachten, als in der Hydroſtatik, Aerometrie und Hydraulik. In der Wärmelehre ſind nach meiner Einſicht noch nicht Gründe genug gegen die Vorausſetzung eines eigenen Wärmeſtoffs vorhanden; ich habe es daher für vernünftig gehalten, auch hier bei dieſer Hypotheſe ſtehen zu bleiben. Ebendarum war es aber auch am natürlichſten, die wichtigſten Sätze der Pyrometrie in der Aerometrie oder Pneumatik vorzutragen. Wer übrigens die in meinen Anfangsgründen der Reinen Mathematik vorgetragene Analyſis wohl begriffen hat, darf mit vollem Muthe auch ohne mündlichen Unterricht zum Studium dieſes Bandes ſchreiten. Erlangen im April 1802.

K. C. Langsdorf.

Ueber

Ueber einige Grundbegriffe des Mathematikers.

von

Johann Heinrich Abicht,

Profeſſor zu Erlangen.

Die reine Mathematik führte bisher faſt allgemein den Namen der Untrüglichen. Ich fand, daß ſie ihn mit Unrecht führe, nämlich unter der Vorausſetzung, daß ein verjährter Beſitz noch kein Recht geben könne. Mein Hauptbeweis gegen ihre Untrüglichkeit iſt klar: „Wenn eine Wiſſenſchaft auf falſchen Grundkenntniſſen fußt, und ihren Beſtand einem unrichtigen Verfahren in der Begriffsbildung verdankt; ſo führt ſie entweder falſche Folgeſätze, oder ihre Angaben ſind (woferne ſie ja alle gültig wären) durch unrichtige Folgerungen erſchlichen.

Die Ausführung dieſes Beweiſes theilte ich geſprächsweiſe dem würdigen Langsdorf mit. Er fragte nicht, ob ich in ſeiner Wiſſenſchaft zu Hauße ſey? Ihm darf man nicht erſt demonſtriren, daß man in einem Gebäude zu Hauße ſeyn könne, ohne eben im Stande zu ſeyn, den Gehalt, die Bildung und die Fügungen ſeiner Bauſtücke, und beſonders ſei-

ſeines Fundamentes, richtig zu beurtheilen; oder umgekehrt, daß Jemand die beſte Kenntniß von den Erforderniſſen der Güte eines Gebäudes haben möge, der doch nie ein ſolches Gebäude ausgefertiget und bewohnt hat; eben ſo wie Leſſing die richtigſten Grundſätze über die Materialien, und über die Verfahrungsart in der Malerkunſt hatte, ohne ſie jemals in Ausübung gebracht zu haben. — Als ein wiſſenſchaftlicher Mann konnte Langsdorf nur nachſehn, ob ich dergleichen Kenntniſſe und ihre Begründung vorweiſen könne? Weit entfernt, für ſeine vorgefaßte Meynungen Autoritäten aufzuſuchen, und ſich dabey zu beruhigen, daß er die Blößen ſeiner Wiſſenſchaft damit gedeckt habe, — auch davon weit entfernt, Schwierigkeiten zu Gründen der Unrichtigkeit meiner Beweiſe zu erheben, nahm er meine Philoſopheme offen und vorurtheilsfrey auf, prüfte ſie redlich Jahrelang bis zur völligen Reife ſeiner Ueberzeugung, und machte ſie auf dieſe Weiſe zu den ſeinigen.

Das Publikum hat das Reſultat von dieſer Prüfung und Ueberzeugung nun in Händen. Wäre Langsdorf auch keine wichtige Autorität in ſeiner Wiſſenſchaft, — was ihm doch ſelbſt ſein Gegner nicht abſpricht —; ſo hatte ſchon die neue Anſicht des Gegenſtandes ſeiner Wiſſenſchaft, und das neue Verfahren im Formen derſelben, und die Durchführung einer neuen Grundlage — die Aufmerkſamkeit und den Fleiß eines und andern in der philoſophiſchen Prüfungskunſt eingeweihten und Wahrheitsliebenden Beurtheilers wohl verdient.

Allein, über ſeinen Richter in der Erlangl. Litt. Zeitung kein Wort weiter, als: daß er, als Repräſentant einer gewöhnlichen Beurtheilungs-

lungsart, mich veranlaßte, mit Erlaubniß des Herrn Verf. dieſer Schrift, hier für den philoſophiſchen Mathematiker einige Aphoriſmen aus dem, was ich theils ſchon ſchriftlich bekannt machte *), theils erweitert Freunden der Wiſſenſchaften nächſtens vorzulegen gedenke **), zur gefälligen Beherzigung vorzulegen.

Wer das Weſen der Philoſophie, wer ihr Verhältniß zu den benahmten Wiſſenſchaften, auch nur oberflächlich kennt, dem kann gar kein Zweifel darüber beykommen, daß es einzig die Obliegenheit des Philoſophen ſey, die aus der Natur unſrer Seele hervorgehenden Grundbegriffe klar und lauter darzulegen, und ihre Richtigkeit nachzuweiſen; ferner das geſetzliche Verfahren bey der Bildung einer Wiſſenſchaft, theils aus der Geiſtesnatur, theils aus dem eigenthümlichen Charakter einer reinen oder empiriſchen Wiſſenſchaft überhaupt, und einer ihrer Arten insbeſondere, zu beſtimmen. Dieß iſt in einer ſolchen Ausdehnung wahr, daß, wenn über dieſe zwey Punkte eine Stimmenſammlung gelten könnte, lediglich die Stimme des Philoſophen — und nicht des Mathematikers, des Phyſikers, des Juriſten als ſolchen — rechtmäßiger Weiſe zu hören ſeyn würde. Indem ich dieß ſage, ſetze ich nicht die Anmaßung eines Einzelnen den Anmaßungen eines und andern ganzen Standes, ſondern die klare Befugniß eines Standes den Anmaßungen Einzelner aus andern gelehrten Ständen ent-

*) Hauptſächlich in der „Revidirenden Kritik der ſpekul. Vernunft", beſonders in der Fortſetzung derſelben, nämlich in der Dingeslehre, 1801.

**) In einer „Philoſophiſchen Einleitung in die Mathematik, Chemie, Phyſik, und Theologie."

entgegen. Laßt eure Gelehrtenrepublik nur immer ſo fort ohne Policey; laßt alſo ſolchen Anmaſſungen noch ferner ihren freyen Spielraum: traun! ihr werdet mit gelehrten Pfuſchereyen endlich ſo ſehr behelliget werden, daß ihr euch ihrer nicht mehr erwehren könnt, und vor ihrem Geſumſe die Gildner zu hören außer Stande ſeyd.

Fragt aber Jemand nach meiner Philoſophenautorität; ſo nöthiget er mich, wider meinen Willen auf meine Philoſopheme und ihre Begründung zu zeigen, und ihn zu erſuchen, ſich mit mir in ihre Prüfung einzulaſſen: er wird mich bereit finden, die Entſcheidung darüber mit aller Ruhe abzuwarten.

Der Raum,

ſagt man, iſt der Gegenſtand der reinen Geometrie. Wir wollen ſehen! Was iſt denn dieſer Raum?

„Er, der Raum, iſt weder ein empiriſcher, noch ein allgemeiner Begriff, ſondern eine reine Anſchauung (eine reine ſinnliche Vorſtellung), und wird als eine unendliche gegebene Größe vorgeſtellt, welche die Form aller äußern Erſcheinungen abgibt.“

So die Autorität, worauf verwieſen wird.

Hierauf zunächſt die Parodie: ich denke, das wenigſte, was ein philoſophiſcher Kopf in den zwanzig Jahren, die ſeit der Erſcheinung der „Kritik der reinen Vernunft“ verfloſſen ſind, hätte leiſten können, wäre doch wohl das geweſen, einzuſehn, daß das geringſte von dieſer Angabe des Raums denkbar und richtig ſey. Allein, dazu gehörte freylich ein Geiſt,

der

der nicht bloß lernen kann, wie ein Autoritätenkrämer, ſondern auch prüfen. Zu dieſem philoſophiſchen Geiſte wende ich mich auch einzig, wenn ich jetzt einige Momente der Kritik jener Meynung vom Raume wiederhohle.

Daß der Raum ſo wenig ein Begriff, als eine Vorſtellung (alſo auch Sinnesvorſtellung oder Anſchauung) überhaupt ſey, bedarf kaum einer Nachweiſung. Schon in wie fern er eine Form äußerlicher Objekte ſeyn ſoll, iſt er als eine Vorſtellung undenkbar: weil keine Vorſtellung eine ſolche Form, und eine ſolche Form keine Vorſtellung (ob gleich ein Vorgeſtelltes) iſt. Deine Vorſtellungen ſind in dir: wäre der Raum eine deiner Vorſtellungen; ſo wäre auch er in dir, und jener Thurm im Raume wäre in deiner Vorſtellung, und demnach auch in dir.

Sage vielmehr: der Raum iſt der Gegenſtand einer meiner Vorſtellungen, aber ſelbſt keine Vorſtellung, folglich auch keine Anſchauung; — iſt das Objekt einer Vorſtellung, aber nicht das Objekt einer Vorſtellungsform, und alſo auch keiner Anſchauungsform: weil die Form einer Vorſtellung nichts, alſo auch keinen Raum, vorſtellet, indem eine ſolche Form keine Vorſtellung, ſondern eben nur die Bildung einer Vorſtellung iſt.

Aber was für eine Vorſtellung vom Raume mag uns gegeben ſeyn? eine reine, oder empiriſche? eine einzelne, oder allgemeine? eine Vorſtellung des Sinnes oder des Verſtandes —?

Eine reine! ſag' auch ich mit Kant; nicht aus ſeinen Gründen, ſondern: weil es eben ſo wenig denkbar iſt, daß der Gegenſtand dieſer Vorſtellung, der Raum alſo, den auch ich für eine Form anerkenne, mei-

meinem Geiſte eine Affektion von ſich zu erfahren gebe, und ihm folglich eine Erfahrungskenntniß von ſich abdringen könne, als daß es irgend eine andere Form, z. B. das Haben, das Vereintſeyn, vermöge.

Eine Sinnesvorſtellung! behaupte auch ich mit Kant; allein aus andern Gründen, z. B. weil Verſtandesbegriffe Verbindungsarten bekannt machen, dergleichen eine der Raum nun ſicherlich nicht iſt, u. ſ. w.

Ein allgemeiner Begriff! ſag' ich gegen Kant, obgleich mit ihm einſtimmig, und zwar einsweilen aus folgenden Gründen:

a) Eine vom Sinne ausgehende Vorſtellung iſt noch gar kein Gegenſatz von einem Allgemeinbegriffe; und ein Allgemeinbegriff iſt noch kein allgemeiner Verſtandesbegriff. Ein Allgemeinbegriff iſt lediglich einem einzelnen Begriffe entgegen geſetzt, welcher auf eine durchaus beſtimmte, nur einmahl gegebene Einzelnheit geht, wenn jener ein irgend einem All von verſchiedenen Gegenſtänden gemeines Kennzeichen zum Objekte hat.

b) Wenn nun ſelbſt Kant behauptet: daß der Raum eine allen äußern (richtiger überhaupt allen materialen) Gegenſtänden gemeine, alſo bey jedem dieſer Gegenſtände wiederhohlte einartige, Form ſey; ſo heißt dieß ja offenbar nichts anderes als: unſere Vorſtellung vom Raume iſt eine allgemeine, und keine einzelne, Vorſtellung. Die Ausdrücke ändern nichts, „allgemeine Vorſtellung, allgemeiner Begriff"; die Sache iſt die nämliche.

Wie

Wie kann man ſich denn aber doch denken wollen: daß eine ſolche allgemeine Form für ſich eine unendliche gegebene Größe ſey? und daß ſie, wenn ſie von einigen Menſchen faktiſch ſo vorgeſtellt wird, aufs Geheiß unſerer Geiſtesnatur ſo vorgeſtellt werden müſſe?

In eben dem Sinne, in welchem man die allgemeinen Formen „Raum und Zeit" für unendliche Größen anſehen mag, läßt ſich jede andere allgemeine Form z. B. Eigenſeyn, Haben, — dafür annehmen. Denn ſo wie allen ſinnlichen Gegenſtänden der Raum als Form gemein iſt, ganz ſo gehört ihnen allen auch das Eigenſeyn als Form an. Aber wer wird darum ſagen: daß das Eigenſeyn, ſo wie es durch einen Urbegriff vorgeſtellt wird, eine gegebene unendliche Größe ſey?

Die Sache verhält ſich ſo: Unſerm Geiſte ſind urſprüngliche Geſetze eigen, durch welche er gehalten iſt, mancherley formale Vorſtellungen von unterſchiedlichen Formarten zu produciren, z. B. vom Raum, Zeit, Vereintſeyn, Verſchiedenſeyn. — Allein, keine dieſer Vorſtellungen erzeugt er auf einmahl als eine aus unendlichvielen gleichartigen Theilen beſtehende Vorſtellung; und durch eine ſolche würde doch einzig nur eine aus unendlichvielen gleichartigen Theilformen zuſammengeſetzte Größe zum Bewußtſeyn gegeben, z. B eine unendliche Größe, deren Theile lauter Eigenſeyn, oder lauter Raum, Zeit — wären. Dieß erhellet

Einmahl aus dem unnachlaßlichen Charakter eines jeden einzelnen Produktionsaktes, kraft welches dieſer ſowohl der Qualität, als auch der Quantität nach beſtimmt ſeyn muß, wenn er

kein Abſtraktum, kein Nichts ſeyn ſoll. Und muß dieſem Charakter des einzelnen geiſtigen Freyakts, wodurch eine Urvorſtellung erzeugt wird, das Produkt d. i. die Urvorſtellung, nicht gleich ſeyn? Allein, eine Vorſtellung von einem Unendlichen, d. i. dem Maaße nach Unbeſtimmten, iſt ſelbſt eine ihrer Quantität nach unbeſtimmte Vorſtellung, die in keiner Seele jemahlen ſtatt hatte, noch haben kann, (vorausgeſetzt, daß man den Allgemeinbegriff von einem Unendlichen überhaupt nicht mit der Vorſtellung von einem namentlichen gegeben ſeyn ſollenden Unendlichen verwechſelt). Welche Arten von Vorſtellungen gewöhnlich, aber mit Unrecht dafür angenommen werden, wird die Folge lehren.

Zweytens, die Vorſtellung von einer ſogenannten unendlichen Größe zeigt an, daß ſie, in dem Umfange, mit welchem man dieſelbe im Momente der Reflexion über ſie antrifft, einer Vermehrung fähig ſey, folglich eines Zuſatzes mehrerer gleichartiger Theilvorſtellungen. Aber eben dieſe hier anerkenntliche Syntheſis, wodurch die Vorſtellung ſich fortbilden läßt, beweiſt deutlich, daß der Geiſt auch die auf dem Reflexionspunkte vorgefundene vermehrbare Größe der Vorſtellung durch Addition (Syntheſis) einer Theilvorſtellung zu einer gleichartigen, obgleich ohne unſer Zuſchauen und ohne Weile, zuwege gebracht habe.

Demnach, ſo wie die Vorſtellung vom Raume durch die Geiſtesnatur auf einmahl gegeben werden kann, hat ſie den Raum ſicherlich nicht als eine unendliche gegebene Größe zu ihrem Gegenſtande, ſondern lediglich als einzige Form eines einzigen formbaren Objekts, — ganz ſo wie die Vorſtellungen von Eigenſeyn, von Vereintſeyn u. a. m.

Hier

Hier das Wahre von der Sache: Unſere Geiſteskraft hat, durch ihr Urgeſetz, das Vermögen und den Drang, die nämliche Art von Vorſtellung irgend einer nämlichen Formart in immer größerer Anzahl und ohne Aufhören fort zu produciren und zu ſynthesiren. Aber, in welchem Momente des Fortgangs dieſer Produktion und Syntheſis unſer Geiſt ſein Produkt betrachten mag, jedesmahl muß er ſich ſagen: daß er die ihm eigene Art der Produktion und Syntheſis an der ſo weit fortgebildeten Größe einer reinen Vorſtellung noch nicht vollendet habe, ſondern ſie immer weiter fortſetzen, und dadurch die Vorſtellung vermehren könne; und das heißt auch, daß der Gegenſtand dieſer Vorſtellung als ein ſeiner Größe nach noch ungeendetes, noch weiter beſtimmbares Objekt durch dieſe ſeine Vorſtellung zum Bewußtſeyn gegeben ſey.

Allein, iſt wohl dasjenige, was wir als eine noch unvollendete Größe von uns vorgeſtellt finden, und welches man den Raum zu nennen beliebt, in der That eine Größe, deren Theile eine wiederhohlte Formart iſt, alſo eine formale Größe? oder iſt es nicht vielmehr ſchon ein Konkret, ein Gebilde, d. i. Materie, Bildbares mit Form oder Bildung? Sollte wenigſtens jene unendliche Größe, die man in der reinen Geometrie behandelt wiſſen will, ein manchfaltiges Einerley einer gewiſſen Formart, Raum genannt, ſeyn? — Ich zweifle daran, wenn auch einsweilen aus dem Grunde: weil wir keine Formart allein und iſolirt vorzuſtellen, ſondern jede mit Materie zuſammen zu denken genöthiget ſind. Indeſſen laßt uns unterſuchen, ob denn der Raum aufs Geheiß unſrer Geiſtesnatur als eine Form vorzuſtellen ſey? und als welche? und wie ſie ſich beſtimmt von andern Formarten, von welchen wir auch Urgedanken haben, unter-

ſcheide? Hoffentlich finden wir dann die befriedigende Antwort auf unſere Frage.

Jedes Vorſtellbare muß ſich unter eine der drey Kategorien „Form, Materie, Gebilde" ſubſumiren laſſen. Der durch einen Urgedanken vorzuſtellende Raum (ſo wie auch die Zeit) iſt alſo unnachlaßlich entweder Form (Bildung, Seyn, Beſtand) allein; oder Materie (Stoff, Seyendes, Beſtehendes, Form- oder Bildbares) allein; oder Gebilde (Konkret, d. i. geformte Materie, Bildbares mit Bildung verſehen).

Dazu nehmen wir den Grundſatz: daß unſer Geiſt nichts Ungereimtes denken könne, daß er alſo, was er von Natur ſoll denken müſſen, müſſe zuſammen denken können. Kann er demnach den Raum, ihn ſo und ſo genommen, mit den andern Objekten, welche offenbar zu denken ſind, nicht zuſammen denken, ſo iſt der ſo und ſo vorgeſtellte Raum dasjenige nicht, das er von unſrer Denknatur gegeben iſt.

1. Der von unſrer Geiſtesnatur aus zu denkende Raum ſey Gebilde, alſo ein manchfaltiges von Stoff, mit der Form? — der Ausdehnung, werdet ihr ſagen, oder des Nebeneinanderſeyns. Wohl! er ſey demnach ein gedachtes Ausgedehntes, Nebeneinanderſeyendes.

Wenn ihr nun einräumen müſſet: daß alles Beſtehende im Raume ſey; ſo müſſet ihr

erſtlich die Materie eures Ausgedehnten in ſich ſelbſt beſtehen laſſen; — welche Ungereimtheit ihr nicht gelten laſſen könnet;

zweytens: die Materie, welche zum Raume, als einem Gebilde, nicht ſchon weſentlich gehörte, z. B. die

die vorhandene Kὀrpermaterie, müßtet ihr entweder in der Materie des Raumes, als in ihrem Subſtrate, — oder ihr müßtet ſie zwiſchen den Theilen des Raums beſtehend denken; ein drittes giebt es nicht.

Das Entweder macht euern gedachten, alſo nicht vorhandenen, Raum zu einem Manchfaltigen von (obgleich nur gedachten, ſo doch vorhandenen) Subſtanzen, in welchen ihr ſelbſt die Subſtanzen der vorhandenen Dinge beſtehend vorſtellen müßtet; — eine neue Ungereimtheit!

Das Oder widerſpricht aber offenbar eurer Vorſtellungsart von dem Im-Raume-ſeyn; denn ich kann mich einsweilen ſicher darauf berufen, daß ihr eure Ausſage: der Baum z. B. iſt im Raume, nicht mit der: er iſt zwiſchen den Raumtheilen (die ihr noch dazu bloß gedacht habet, die alſo nicht vorhanden, nichts ſind) für gleichgeltend wollet und werdet halten kὀnnen.

Im Denken des Raums als eines Gebildes iſt alſo durchaus Widerſpruch des Geiſtes mit ſich ſelbſt; ſo gedacht kann und muß er demnach von unſrer Denknatur her nicht werden. — Daß hiebey der Unterſchied zwiſchen den Objekten an ſich und zwiſchen den Erſcheinungen in gar keine Betrachtung komme, kann man aus der „revidirenden Kritik der ſpekul. Vernunft" zur Genüge erſehen.

Der Raum ſey bloße Materie. Wodurch ſoll ſie ſich, als Raum, von derjenigen, die als Nichtraum im Raume ſeyn ſoll, unterſcheiden? Durch das Inſichaufnehmen? alſo durch eine eigne Form? So iſt der Raum als ſolcher keine bloße Materie, ſondern

 ein

ein Geformtes, ein Gebilde, und wir ſtehen beym vorigen. Das weggerechnet: Aller Stoff beſteht im Raume, müßt ihr ſagen; alſo beſteht, ſag' ich, der Raum, nach der Vorausſetzung auch Stoff, in ſich ſelbſt. Noch mehr, er der bloß gedachte, nicht daſeyende Raum nimmt, gleich als ob er da wäre, entweder als Subſtanz die vorhandenen Dinge zuſammt ihren Subſtanzen in ſich auf, ohne daß dieſe aufhören Subſtanzen zu ſeyn, ob ſie dann gleich zu Inhärenzen würden; oder er, der nichtvorhandene, ließe, gleich als ob er vorhanden wäre, die vorhandenen Dinge zwiſchen ſich ein, ließe ſich verſchieben, verhielt ſich wie ein Hohles, — und was für Ungereimtheiten noch mehr herausſpringen!

Als bloße Materie läßt ſich der Raum mit demjenigen, was und wie es unſer Geiſt mit ihm zuſammen denken muß, abermahls nicht vorſtellen; folglich iſt er als bloßer Stoff von unſerm Geiſte auch nicht zu denken gegeben.

3. Eine bloße Form giebt alſo unſere Denkkraft unter dem Titel Raum (und auch ſo unter dem Titel Zeit) vorzuſtellen; allein welche nun?

Einzig iſt allgemein als unbezweifelt zugeſtanden: daß das Manchfaltige im Raume, in wiefern es das iſt, als ein ſolches zu denken ſey, deſſen Theile außer und neben einander ſind. Wollte man ſagen: daß auch eben ſo allgemein das Ausgedehntſeyn jenes Manchfaltigen eingeräumt werde; ſo frage ich: ob jenes Nebenſeyn und dieſes Ausgedehntſeyn nicht eine und die nämliche Form, aber hier nur mit zwey Namen bezeichnet ſey? Womit wollt ihr alsdann die Verneinung meiner Frage belegen? doch nicht mit euerem dunkeln, unentwickelten

Be-

Bewußtſeyn einer Verſchiedenheit zwiſchen beyden? Alſo halten wir uns indeſſen an das Klare, Ausgemachte!

Das Manchfaltige im Raume iſt die Materie; der Raum ſoll ihre Form ſeyn; das Außer- und Nebenſeyn iſt aber ausgemacht diejenige Form, die einem Manchfaltigen im Raume, in wie fern es das iſt, zukommt. Fragt euch doch nun: ob ihr euch bey einem Manchfaltigen im Raume mehr denket, mehr denken könnet, als eben „außer und nebeneinander beſtehende Etwas?“ Und wollet ihr etwa die Frage bejahen; ſo ſagt einmahl klar und beſtimmt an, was mehr?

Vor dieſer Antwort (welche, ich weiß es ſicher, ewig außenbleibt) gelte uns indeſſen als ausgemacht der Raum für nichts weiter, als für das Außer- oder Nebenſeyn ſelbſt; ſo ſtehe ich dafür, daß Alles, was unſer Geiſt ausgemacht ſonſt noch vorzuſtellen gibt, und wie zuſammen er es denken muß, auch mit der Form des „im Raume Seyns“, aber auch nur mit dieſer, ohne die geringſte Spur von Ungereimtheit zuſammen gedacht werden könne. Und daraus ſchließe ich mit vollem Rechte: daß das „im Raume ſeyn“ unſerm Geiſte nichts anderes ſey, als eben das bloße Außer- oder Nebenſeyn, — der gerade Gegenſatz vom Inſeyn (Inhäriren). Das um ſo mehr, als jedes weitere Merkmal, das dem Raume zugegeben werden möchte, eine Ungereimtheit im Zuſammendenken des Raumes mit dem andern noch zu Denkenden herbeyführt.

Was man ſonſt noch von dem Manchfaltigen im Raume gültig ausſagen kann, iſt Folge von dieſer ſeiner Form des Nebenſeyns, wie ſogleich klar werden ſoll; vorher nur einige Beſtimmungen.

Das Nebenſeyn für ſich allein (iſolirt, abſtraktiv) betrachtet, iſt der abſtrakte, leere Raum. Er iſt als ſolcher nicht vorhanden, ſondern immer nur gedacht, wie jede andere allgemeine Form, oder wie jedes Objekt eines Allgemeinbegriffs.

Etwas (ein Beſtehendes, ein Partikel) iſt im Raume, heißt alſo, es iſt neben oder außer.

Das Beſtehende mit ſeinem Nebenſeyn (im Raume ſeyn) iſt das Räumliche (noch nicht das Ausgedehnte). Der Raum, das Nebenſeyn alſo, muß, ſo wie jede Form, mit Materie zuſammen, d. i. in Konkreto, ein Gebilde formend, oder konkretiviſch, vorgeſtellt werden.

Wir haben auch bloß von unſrer Geiſtesnatur ausgehende, demnach reine materiale Vorſtellungen von einem manchfaltigen bildbaren Etwas, d. i. von Materie. Daher können wir nicht bloß ein Nebenſeyn, ſondern auch ein manchfaltiges neben einander Seyendes, d. i. ein Räumliches, von uns rein heraus denken.

Das Räumliche, von welchem unſer Geiſt die Vorſtellung frey bildet, iſt ein bloß (von ihm, dem Geiſte, ſich) gedachtes, nicht vorhandenes Objekt; dagegen iſt das ſich, mittelſt der Erfahrung *), zu erkennen gebende Räumliche ein vorhandener Gegenſtand, der ſich zu jenem Gedachten wie das durchaus beſtimmte Einzelne zu einem noch Unbeſtimmten verhält.

Das

*) D. i. unter der Bedingung, daß der Geiſt eine Anthuung (Afficirung) vom Objekte erleidet (erfährt), und dadurch zur Bildung einer Kenntniß objektiv genöthiget wird, und folglich dieſe Bildung nicht frey vornimmt.

Das reingedachte Räumliche iſt von unſrer Denknatur her nach dreyerley Seiten unbeſtimmt gelaſſen, nämlich einmahl von der Seite der Richtungs- oder Anordnungsart ſeiner Theile in ihrem Nebenſeyn, — alſo ob ſie alle in einerley, oder in verſchiedenen Richtungen, ob ſo viele in dieſer Ordnung z. B. aufwärts, oder in einer andern z. B ſeitwärts, beſtehen ſollen? — Zweytens in Rückſicht der Artung oder Qualität; und drittens von Seiten des Maaßes oder der Zahl ſeiner Theile.

Dieſe Unbeſtimmtheit des reingedachten Räumlichen wird entweder durch unſere Imagination mehr und minder, oder durch Erfahrung eines Räumlichen ganz gehoben.

Daß das Sodenken des Räumlichen in Rückſicht der Anordnung und der Zahl ſeiner Theile von der Geiſtesnatur freigelaſſen iſt, beweiſt offenbar, daß der Geiſt im Formen einer Vorſtellung vom Räumlichen ſynthetiſch, d. i die Vorſtellung durch Zuſetzung erweiternd, aber nicht einſchränkend, d. i. von einer etwa durch die Denknatur gleich uranfänglich auf einmahl gegebenen Vorſtellung eines unendlichen Räumlichen abſchneidend, verfahre.

Dieſes reingedachte Räumliche iſt es, was man gewöhnlich, aber durchaus unrichtig, als Raum vor Augen hat, und in welchem man die vorhandenen Dinge beſtehen läßt. Von dieſer Vorſtellungsart kommen dann die Ungereimtheiten, die man gerne auf die Rechnung eines Streites unſeres Geiſtes mit ſich ſelbſt ſetzen möchte; kommt unter andern auch die ſonderbare Behauptung her: daß jedes Raumſtück, und was in ihm beſtehe, ins Unendliche theilbar ſey. Dieſer Weidſpruch entſteht daher, daß

man, indem man das gedachte Stück des Räumlichen in Gedanken theilet, beliebig jeden Theil wieder als ein zuſammengeſetztes Räumliches ſich denkt, — eine Spielerey, die man freylich ins Unabſehliche fortſetzen kann Aber, was erlaubt euch, den Raum ſchon als ein zuſammengeſetztes Räumliches zu denken? dann, dieſes gedachte Räumliche für vorhanden anzuſehen, — was ihr offenbar thut, wenn ihr behauptet: daß die vorhandenen Dinge in ihm beſtehen; womit ihr doch ſicherlich nicht ſagen wollet, daß ſie ſich in Nichts, in einem bloß Gedachten befinden? — was endlich, das Beſtehen deſſen, was ihr in den Raum ſetzet, nach euerem durch ein Imaginationsſpiel gedachten, und ſich immer vermehrenden Räumlichen, welches ihr für den Raum nehmet, zu beſtimmen, und dem zu Folge das im Raume Seyende für unendlich theilbar auszugeben?

Das richtige hievon iſt: daß vor dem Daseyn der Dinge im Raume kein vorhandener Raum, oder, wie man dieſen gewöhnlich vorſtellt, kein vorhandenes Räumliches vorzuſtellen ſey; daß der vorhandene Raum, d. h. das exiſtirende Nebenſeyn, einzig mit dem Seyn vorhandener Dinge zuſammenfalle, nach dem Grundſatze: wenn das Beſtehende vorhanden iſt, ſo iſt auch die ihm eigne Form vorhanden, ſonſt nicht. Die exiſtirenden Dinge bilden einen vorhandenen Raum, deſſen Vielheit (Wiederhohltſeyn) gleich iſt der Anzahl dieſer Dinge.

Das Beſtehen vorhandener Dinge, demnach das vorhandene Räumliche, welches aus ihnen erwächſt, richtet ſich nicht nach dem Seyn des von euch gedachten Räumlichen und ſeiner Theile. Letztes mag

mag man ſpielend immerhin aus Theilen, deren jeden man ſich wieder als ein zuſammengeſetztes Räumliches denkt, beſtehen laſſen; nur muß man nicht wähnen und verlangen, daß ſich das vorhandene Räumliche und ſeine Theilung nach dieſem Imaginationsſpiele richten ſolle.

Das gedachte Räumliche, aber nicht der Raum, d. i. nicht die Form des Nebenbeſtandes für ſich allein, iſt der Hauptgegenſtand der reinen —, das vorhandene Räumliche aber iſt das Objekt der empiriſchen Geometrie.

Dem Raume, dem Nebenſeyn, könnt ihr keine Richtungsarten, keine Geſtaltungen beylegen; wohl aber den manchfaltigen neben einander ſeyenden Beſtandtheilen: dieſen nur könnet ihr z. B. Krümmung, Geradheit — andenken. — Zwar könnet ihr auch das Nebenſeyn als eine Vielheit vorſtellen; aber was wäre euch ein Nebenſeyn, das einem zweyten Nebenſeyn rechts oder links, oben oder unter läge? was ein krummes Nebenſeyn, ein gerader, runder, viereckiger Raum?

Das Ausgedehnte.

Die Vorſtellung vom Raume zieht unnachlaßlich den Begriff von Ausdehnung nach ſich.

Das Nebenſeyn iſt nämlich eine relative, beziehliche Form. Will man z. B. ein a nebenſeyend denken; ſo muß man ein b ſetzen, neben welchem es beſtehe; und dieſem b muß dann eben ſo, wie dem a, ein Nebenſeyn angedacht werden. Nebenſeyn bezieht ſich

ſich alſo auf Nebenſeyn *), ſo wie Vereintſeyn auf Vereintſeyn —. Ueberhaupt iſt unſer Geiſt mit allen ſeinen Urgedanken auf ein Zuſammendenken eines Manchfaltigen angelegt.

Der Raum mit Raum, das Nebenſeyn mit dem Außerſeyn, worauf ſich jenes bezieht, eine ſinnliche zuſammengeſetzte Form alſo, iſt die räumliche Ausdehnung. Ihr zur Seite ſteht eine andere zuſammengeſetzte ſinnliche Form, nämlich die zeitige Ausdehnung, d. i. das Vorſeyn mit dem Nachſeyn, worauf ienes weiſt.

Die räumliche Ausdehnung iſt ein Nebeneinander ſeyn, und die zeitige Ausdehnung ein Nacheinander ſeyn. Jede dieſer Formen erfodert ein Manchfaltiges, dem ſie geeignet werde.

Hingegen iſt der Raum eine einfache Form, iſt das bloße Neben- oder Außerſeyn für ſich allein, (ſo wie die Zeit das bloße Vor- oder Nachſeyn). Eine ſolche einfache Form will aber kein Manchfaltiges, dem ſie ſich vermähle, ſondern bedarf lediglich Ein Beſtehendes, Ein Etwas, um ein Gebilde, das Räumliche genannt, zu geben.

Demnach: das Ausgedehnte iſt das miteinander Zuſammenbeſtehende, alſo ein Manchfaltiges; denn an dieſem allein kann eine Doppelform haften Allein ein Räumliches (oder auch ein Zeitiges) als ſolches iſt nur Ein mit einem Andern,

*) Richtiger und beſtimmter auf Außerſeyn; es korreſpondirt das Nebenſeyn dem Außerſeyn ſo, wie das Vorſeyn dem Nachſeyn, und überhaupt ſo, wie jede zuerſt zu ſetzende relative Form der andern, z. B. das Eigenſeyn dem Haben —.

dern, das es nicht iſt, Zuſammenbeſtehendes; es ſchließt folglich als ein ſolches und für ſich betrachtet die Vielheit weder ein, noch aus. Es kann nur auch ein Ausgedehntes für ſich, allein es muß es nicht ſeyn. Heiße das Räumliche z. B. A; ſo kann es, als ein auf B, neben dem es iſt, Hindeutendes, zwar auch ſelbſt wieder ein ab ſeyn, aber es kann ſich auch als ein einfaches Beſtehendes finden laſſen; kurz es iſt durch den Begriff eines Räumlichen noch ganz unbeſtimmt, ob es bloße Einheit, oder Vielheit ſey?

Jedes räumliche Ausgedehnte iſt ein Räumliches, d. i. ein ſolches Objekt, an dem die Form des Nebenſeyns (oder des Außerſeyns) zu betrachten iſt. Aber nicht jedes Räumliche iſt ein Ausgedehntes, d. i. ein ſolches Objekt, an welchem beydes, das Neben- und das Außerſeyn, vorkommen müßte. Die Ausdehnung iſt demnach weder ein unumgängliches Merkmal *) eines Räumlichen, und noch viel weniger ein Merkmal vom Raume.

Ein einfaches, untheilbares Beſtehendes mit der Form des Neben- (oder des Außer-) Seyns iſt ein Raumpunkt, (ſo wie ein dergleichen Formbares mit der Bildung des Vor- oder des Nachſeyns ein Zeitpunkt iſt). Punkte ſind Ingredienzen des räumlichen und zeitigen Ausgedehnten; aber jeder für ſich iſt nichts Ausgedehntes. Die Sache iſt klar und leicht: Was nur Eine von den relativen Formen trägt, hat ſie nicht Beyde an ſich, und iſt folglich noch nicht Ein aus Einem und Einem Zuſam-

*) Prädikat will man ſogar ſagen, als ob Ausdehnung eine Vorſtellung wäre.

ſammengeſetztes. Man vergleiche nur! So wie das mit B vereinte A nicht das Vereinte AB, ſondern nur Theil dieſes Vereinten AB iſt, von dem ſich alſo nicht prädiciren läßt, was nur von dem Vereinten AB gilt; und ſo wie das dem D eigne C nicht das Verknüpfte CD iſt, welches Verknüpfte CD die Doppelform des „Habens und des Eigenſeyns" vorzuweiſen hat; ſondern lediglich Ein Glied von dem Zuſammenbeſtehenden CD, dem bloß das Eigenſeyn, nicht aber zugleich auch die ſich darauf beziehende Form des Habens zuſteht: eben ſo iſt das a, dem lediglich das Nebenſeyn zukommt, noch ganz und gar kein Nebeneinanderbeſtehendes ab, ſondern juſt nur ein neben (einem b) beſtehendes a.

Man ſieht hieraus: daß der Raumpunkt ein Räumliches, aber kein Ausgedehntes ſey. Iſt aber der Raumpunkt ein Räumliches; ſo iſt darum nicht jedes Räumliche ein Raumpunkt: weil, wie geſagt, ein Räumliches auch ein Ausgedehntes ſeyn kann.

Jedes (zu denken, oder zu erkennen) gegebene Zuſammenbeſtehende muß ſich in einfache Glieder auflößen laſſen: weil es dasjenige iſt, das da gegeben iſt, d. h. ein beſtimmtes, ein Solches und ein Sovieles. Jedes gegebene, räumliche und zeitige, Ausgedehnte beſteht aus Punkten; dieſe allein formen das Ausgedehnte, ob gleich jeder für ſich noch kein Ausgedehntes, wenn ſchon ein Räumliches, oder ein Zeitiges iſt.

Die ſonderbare Behauptung, „daß jedem Theil eines Ausgedehnten zukommen müſſe, was dem Ausgedehnten zuſteht, und namentlich auch das Ausgedehntſeyn: weil auch kein Ausgedehntes aus einem Nichtausgedehnten erwachſe", ſchreibt ſich alſo von einer ober-

oberflächlichen Betrachtung und daraus entſprungenen Verwechſelung des Räumlichſeyns und des Ausgedehntſeyns her. Weil man das Räumlichſeyn (das Neben- oder Außerſeyn) unnachlaßlich auf das Ausgedehnt ſeyn (auf das Nebeneinanderſeyn) hindeutendfand, nahm man beydes für eine und die nämliche Form, etwa ſo, wie wenn man das Eigenſeyn für einerley mit dem Eigenhaben nehmen könnte. Man hätte alſo ſagen ſollen: Ein Nichträumliches giebt kein (räumliches) Ausgedehntes, ſo wie ein Nichtzeitiges kein (zeitiges) Ausgedehntes, und wie ein Nichtqualitatives kein qualitatives Verknüpftes, kein Eigenhabendes, oder auch wie ein Nichtheil kein Vereintes — giebt. Iſt alſo mit der Vorſtellung vom Raume die Vorſtellung von (räumlicher) Ausdehnung gegeben? Allerdings, ſo wie mit der Vorſtellung von Eigenſeyn die Vorſtellung vom Zuſammenſeyn des Eigenſeyns und Habens, wie mit der Vorſtellung von Vorſeyn die vom Zuſammenſeyn des Vorſeyns mit dem Nachſeyn d. i. von dem Nacheinanderſeyn, kurz ſo wie mit jeder Einen relativen Form das Zuſammenſeyn derſelben mit einer andern vorzuſtellen gegeben iſt. Allein, das Ausgedehntſeyn iſt eben ſo wenig ein Merkmal vom Raume, d. i. das Nebeneinanderſeyn iſt ſo wenig ein Merkmal vom Neben- oder Außerſeyn, als das Nacheinanderſeyn ein Merkmal vom Vor- oder Nachſeyn, oder als das Eigenhaben ein Merkmal vom Eigenſeyn oder vom Haben iſt, u. ſ. f.

Iſt aber darum die Vorſtellung vom Ausgedehntſeyn mit der Vorſtellung vom Raume ſo gegeben, wie „mit der Vorſtellung von einer Roſe die von der rothen Farbe?“ (Der Cenſor unſeres Lehrbegriffs hätte ſagen ſollen: die Vorſtellung von der rothen Farbe ſey in der Vorſtellung von einer rothen Roſe gegeben.

geben. Aber dergleichen nimmt man nicht ſo genau, um ſo weniger, weil man dann gar nichts geſagt hätte: „mit der Vorſtellung vom Rothen iſt die Vorſtellung von Röthe gegeben!“) Die Antwort iſt verneinend: der Raum verhält ſich nicht gleich der Roſe, und die Ausdehnung nicht gleich der rothen Farbe; dieſe iſt Eigenheit der Roſe, die Roſe iſt das ſie (die Röthe) Habende; allein das Ausgedehntſeyn iſt keine Eigenheit des Raums, und dieſer iſt nicht das die Ausdehnung Habende, oder es heißt nicht ſo: der Raum (das Neben- oder Außerſeyn) iſt ausgedehnt (iſt nebeneinanderſeyn), wie: die Roſe iſt roth.

Ein Punkt iſt nicht bloß einfach, untheilbar; ſondern auch geſtaltlos. Das gilt vom Raumpunkte eben ſo, wie vom Zeitpunkte. Aber was iſt Geſtalt, Figur?

Der Begriff von Geſtaltung (eine Art Bildung) wird durch die Vorſtellung von einem räumlichen Ausgedehnten herbeygezogen. Jedes beſtimmtgegebene räumliche Ausgedehnte beſteht nämlich aus einem Soviel von Theilen, welche ohne eine gewiſſe Ordnung, die ſie in ihrem Nebeneinanderſeyn beobachten, nicht denkbar ſind. Dieſe beſtimmte Richtung der Theile eines räumlichen Ausgedehnten in ihrem Nebenbeſtande iſt es aber, was man mit Recht die Geſtalt, die Figur dieſes Ausgedehnten nennt; ſie gehört alſo einem ſolchen Ausgedehnten eben ſo nothwendig an, wie die Sovielheit ihm angehört. — Geſtalt und Figur heißt auch zuweilen das Geſtaltete, Figurirte, und dann iſt ſie das Ausgedehnte, deſſen Theile

le auf eine beſtimmte Art neben einander geordnet ſind, alſo eine Art von Gebilde.

Geſtalt iſt demnach eine beſtimmte Art des Nebeneinanderſeyns oder der räumlichen Ausdehnung. Setzet zwey Theile neben einander; ſo gebt ihr ihnen unnachlaßlich irgend eine Art des Nebeneinanderſeyns, z. E. dem einen den Nebenbeſtand abwärts, oder ſeitwärts dem andern.

Zwey Raumpunkte neben einander geben das kleinſte Geſtaltete.

Ein Raumpunkt hat keine Geſtalt h. alſo: ihm läßt ſich keine beſtimmte Art des Nebeneinanderſeyns ſeiner Theile eignen; — weil er keine Theile vorzuweiſen hat; weil ihm, als einem Einfachen, lediglich ein Nebenſeyn, aber kein Nebeneinanderſeyn zukommt, und eine beſtimmte Ordnung ſich nur beym letztern denken läßt.

„Soll alſo ein Raumpunkt wie ein Kügelchen, oder wie ein Viereck oder des Etwas gedacht werden"? Dieſe Frage iſt ſehr naiv. Wenn wir freylich mit unſern Gegnern den Raum als ein Räumliches, und das Räumliche als ein Ausgedehntes denken wollten; ſo würden wir allerdings, ſo wenig wie ſie, umhin können, jedem Räumlichen, und alſo auch dem kleinſten Räumlichen d. i. dem Raumpunkte, Geſtalt zuzuſchreiben, und wir wären dann, eben ſo wie unſere Gegenparthey, in Verlegenheit, ob wir den Theilen einer Kugel auch Kugelgeſtalten andenken ſollen, oder ob nicht? Ihr zufolge müßten wir es, nämlich nach ihrem Grundſatze: „daß den Theilen eines Ausgedehnten das Ausgedehntſeyn eben ſo wohl zuſtehe, wie dem Ganzen"! Denn es fände ſich alsdann durchaus kein Grund, warum wir den Grundſatz: „die Form jedes

 Thei-

Theiles iſt gleich der Form des Ganzen zu dem er gehört", nicht auch auf die Geſtalt ausdehnten; beſonders da Ausdehnung und Geſtaltung unnachlaßlich beyſammen ſind, indem die eine wie die andere aus Manchfaltigkeit und Zuſammenſetzung hervorgeht.

Von dem mathematiſchen Punkte hernach.

Grenze und Angrenzung.

Grenze iſt eine Schranke, welche als Theil betrachtet wird.

Unſer Begriff von Schranke iſt ein qualitativer Urbegriff des Verſtandes (vgl. die revidir. Krit. d ſp. Vern.). Namentlich iſt er der Begriff von derjenigen Eigenheit eines Habenden, die auf deſſen Mängel hinſchaut; oder, was eben daſſelbe ſagt, ſie iſt die in der Reihe der Eigenheiten eines Habenden je letzte Eigenheit oder Beſtimmung.

Von unſerm Geiſte iſt jedes Gebilde als ein eingeſchränktes, mit Schranken verſehenes Objekt vorzuſtellen.

Dieſe nothwendige Vorſtellungsart wird in den bekannten Grundſätzen ausgedrückt: „Jedes Gebilde iſt dieſes und kein anderes"; und: „Jedes Gebilde iſt ein Soviel und Nichtmehr, oder ein Nurſovieles, ein Ganzes". Dort werden die Schranken, hier die Grenzen eines Gebildes angedeutet.

Der Sinn des erſten Grundſatzes iſt folgender: Jedes Gebilde iſt ein Habendes mit Eigenheiten; durch dieſe iſt es eben dieſes Gebilde. Aber von dieſen ſei-

ſeinen poſitiven Determinationen liegen einige an den Mängeln, d. i. an den vom Gebilde wegſeyenden Merkmalen; und dieſe an ſeinen Mängeln anliegenden Beſtimmungen ſind die letzten, äußerſten Eigenheiten des Gebildes, ſind ſeine Schranken, von welchen man in der Betrachtung des Gebildes zu ſeinen Mängeln geführt wird, kraft welcher Mängel es kein anderes (ein noch andere Merkmale Nichthabendes) iſt.

Der zweyte Grundſatz hat dieſen Sinn: Jedes Vereinte beſteht aus ſolchen und ſovielen Theilen, als eben in ihm vereint (ſey es durch ein Denken, oder Imaginiren, oder Erkennen) gegeben ſind. Kraft dieſer Theile, deren jeder ſich den andern eignet, iſt das Vereinte ein Soviel, ein Großes. Allein, von ſeinen Theilen führen einige durchaus auf Nichttheile, d. i. auf Sachen, welche dieſem Vereinten zwar mangelnde, aber doch als Theile eines andern Vereinten zu verſtändigende, Theile ſind. In Rückſicht dieſer iſt das Vereinte ein Nichtmehr. Aber diejenigen Theile eines Vereinten, die ſeinen Mangeltheilen zunächſt anliegen, ſind die letzten, äußerſten, ſind die Endtheile, die Grenzen dieſes Vereinten.

So das Denken der Schranke und Grenze nach der Natur unſeres Geiſtes. Beyde ſind Zugehöre des eingeſchränkten Gebildes; nur daß ſie, als Schranken und Grenzen, unnachlaßlich auf Mangel des Gebildes hinweiſen, und dieſen mit zu denken geben.

Schranken und Grenzen ſo gefaßt; ſo läßt ſich nun auch denken, was wir denken müſſen, nämlich: daß ein Gebilde durch ſeine Schranken eingeſchränkt, durch ſeine Grenzen begrenzt werde, — nicht aber

durch Mangel deſſelben, durch nichts. Durch Nichts eingeſchänkt und begrenzt iſt ſo viel als nichteingeſchränkt, nichtbegrenzt, — wie der Gegner von der Autorität her, auf die wir verwieſen werden, wird gelernt haben.

Gewöhnlich aber wird der Mangel, der Nichttheil, woranf man im Durchkennen der Determinationen und Theile eines Gebildes ſtößt, und den man mit dem Schatten des Gebildes vergleicht, für die Schranke und Grenze deſſelben ausgegeben. Wie man zu dieſem Trugbegriffe mag gekommen ſeyn, iſt aus dem Geſagten klar: weil nämlich der Mangel und Nichttheil von der Schranke und Grenze nicht wegzudenken, und das Hervorſtechende iſt; ſo wurde er für Schranke und Grenze ſelbſt genommen.

Dafür nahm ihn auch die Autorität Kant, und zwar deutlich genug in ſeinem Beweiſe für die Unbegrenztheit der Welt dem Raume nach, wo es heißt: daß die Begrenzung der Welt durch den leeren Raum (durch das, was Nichttheil der Welt iſt) nichts, und eben darum die Welt in Rückſicht ihrer Raumtheile unbegrenzt, unendlich ſey.

Und mit ſeinem Euklid will auch der Mathematiker die Grenzen, z. B. einer Linie, nicht in den Endtheilen der Linie, ſondern außer denſelben, in den Nichttheilen, im Mangel, im Nichts der Linie finden. Der Verfechter ſeines Euklids hätte aber, wenn ja ſein eigner Verſtand nicht befragt ſeyn ſollte, von jener Autorität wenigſtens lernen können, daß unter dieſer Vorausſetzung z. B. jede ſeiner begrenzten Linien, ſo wie dort die Welt, unbegrenzt, d. i. ein Ungereimtes ſeyn müſſe: weil durch einen Nichttheil, durch ein

ein Nichts auch keines ſeiner Gebilde begrenzt zu denken iſt.

Der richtige Begriff von Grenze konnte aber auch leicht aus folgender Betrachtung herausſpringen: Man nimmt für gültig an, daß zwey Gebilde, z. B. zwey Linien, mit ihren Grenzen aneinander ſtoßen. Welchen Begriff von Grenze ſetzt man doch in dieſer unzweydeutigen Behauptung voraus? Etwa den von einem Nichttheil, vom Nichts der Linien? Will man vielleicht vorgeſtellt haben, daß zwey Linien mit ihren Nichttheilen, mit Nichts aneinander ſtoßen? Eine kleine Reflexion konnte alſo darthun, daß vorauszuſetzen ſey, „die Grenzen der Linien ſind ihre äußerſten Theile". — Ferner:

Nach dem angenommenen Gemeinbegriffe von Grenze müßte ein Punkt, eine Linie, eine Fläche, als Grenzen eines Körpers, Nichts ſeyn. Dennoch laſſen ſie ſich nicht allein ſelbſt als Gebilde für ſich, als denkbare Einzelnheiten betrachten, ſondern ſie werden auch in der reinen Geometrie dafür genommen. Unter der Vorausſetzung jenes Begriffs von Grenze, als einem Nichts, wäre nichts ungereimter, als dieſe Annahme.

Man ſieht es den Begriffen, nach welchen Punkte, Linien und Flächen bloß für Grenzen der Körper ausgegeben werden, und ſo auch dem davon abgezogenen Begriffe von Grenze überhaupt, deutlich an, daß ſie lediglich mittelſt einer Abſtraktion von empiriſchen Körperbegriffen geformt wurden. Allein, auf dieſem Abſtraktionswege kann ſich Niemand der Richtigkeit und Präciſion — weder eines Urgedankens, noch eines durch Syntheſis entſtehenden Begriffes — verſichern.

Was aber den falſchen Begriff von Grenze vorzüglich erhalten haben mag, iſt wohl der damit verwechſelte Begriff von Angrenzung, welcher häufig unter dem Namen des Begriffs einer mathematiſchen Grenze vorkommt.

Angrenzung iſt nicht Begrenzung d. h. iſt nicht das Verſehenſeyn eines Gebildes mit Grenzen; ſondern iſt das Aneinanderliegen, das Nebeneinanderſeyn der Grenzen zweyer (oder mehrerer) Gebilde; iſt alſo eine bloße Form, die den Grenzen mehrerer Gebilde gemein iſt, und deren mögliche Vorſtellung ſowohl den Begriff von Grenze, wie auch den Begriff vom Raume, vom Nebenſeyn vorausſetzt.

Dieſe Angrenzung iſt freylich nicht, ſo wie die Grenze, ein Beſtandtheil eines der angrenzenden Gebilde, eben weil ſie nur eine Form, ein Nebeneinanderſeyn von Grenzen iſt.

Sie iſt das Zeichen der Scheidung zweyer Gebilde in zwey, dadurch daß ſie das Aneinanderſeyn der Grenzen mehrerer Gebilde iſt.

Auch iſt es klar, daß ſie bloß bey einem Zuſammenſeyn verſchiedener Gebilde zu ſuchen ſey; dagegen die Grenzen ſchon bey Einem Gebilde, es für ſich allein genommen, ſtatt finden.

Das Anliegen (nicht das — hier unmögliche — Angrenzen) zweyer Raumpunkte ſowohl, als auch das Angrenzen zweyer Linien mit je Einem ihrer Endpunkte h. ein mathematiſcher Punkt. Die Angrenzung zweyer Linien ihrer Länge nach, und auch zweyer Flächen mit je einer ihrer Nebenſeiten h. eine mathematiſche Linie; und ſowohl die Angrenzung zweyer Flächen als ſolcher, wie auch zweyer Ober-

Oberflächen als Flächen h. eine mathematiſche Fläche.

Alſo, ſo viele aneinander liegende Grenzpunkte, ſo viele zu unterſcheidende Begrenzungen ſind denkbar, davon man jede als einen Punkt anſieht, und welche, wenn es mehrere ſind, den Grenzpunkten parallel laufen, folglich, gleich dieſen, als eine Linie, oder auch als eine Fläche formend betrachtet werden können.

Es iſt aber lediglich um eine kurze Bezeichnungart zu thun, wenn man ſolche Angrenzungen Punkte, Linien — nennt.

Die Begriffe von mathematiſchen Punkten — ſind alſo formale Begriffe von Formen, nämlich von einem und anderm Aneinanderſeyn; hingegen die Begriffe von Grenzen, dann von den (ſchlechthin ſo genannten) Punkten, Linien — ſind konkrete Begriffe von Konkreten oder Gebilden.

Die mathematiſche Grenze iſt entweder eine mit Objekten gegebene (objektive?), oder eine zum Behufe der Ausmittlung gewiſſer Verhältniſſe bloß gedachte (ſubjektive?). Nimmt man z. B. eine gleichſeitige dreyeckige Fläche für ſich allein; ſo iſt mit dieſem Objekte keine mathematiſche Begrenzung gegeben: aber es läßt ſich eine von der Spitze zu der Mitte der Baſis dieſer Fläche laufende Begrenzung, d. i. eine mathematiſche Linie, und dadurch das Dreyeck in zwey gleiche Theile geſondert denken. Wenn man aber zwey, den ſo eben gedachten gleiche, Flächen als gegeben annimmt, und zwar zugleich ſo, daß ſie mit zwey gleichen Seiten aneinander liegen; ſo iſt ihre Angrenzung eine gegebene — ſey es durch Denken, oder durch Erfahrung gegebene.

Das Kontinuum und Kontiguum.

Wo möglich noch mehr Verwirrung und Unbeſtimmtheit, als in den gewöhnlichen vorhin erörterten Begriffen, findet man in den Angaben eines Stetigen und eines Kontiguums. Da ich mich nunmehr noch kürzer zu faſſen habe, ſo gedenke ich bloß des neuerlich beliebten Unterſchiedes zwiſchen beyden, dem zufolge das Kontinuum ſeyn ſoll „ein ideales Ganzes, d. i. ein ſolches, welches vor den Theilen vorhergeht und dieſe erſt möglich macht, folglich keine beſtimmte Menge von Theilen, mithin auch keine beſtimmte Einheit hat". — Man ſoll ſich alſo bey einem Stetigen ein Ganzes, folglich Beſtimmtes, und auch ein ſeinen Theilen nach Unbeſtimmtes, demnach kein Ganzes, — man ſoll ſich ein Ganzes, das die Theile erſt möglich macht, das folglich früher iſt als dieſe, — kurz eine doppelte Ungereimtheit vorſtellen?

Ich weiß, daß der Satz: „das Ganze geht den Theilen vorher, oder nach", nicht auf das Seyn, ſondern auf unſer Faſſen des Objekts gedeutet werden ſoll. Aber auch dann iſt es Ungereimtheit, denken zu ſollen, daß man das Ganze früher faſſe, als ſeine Theile. Und will man das helle Faſſen der Theile, welches dem (dunkeln) Faſſen des Ganzen nachgehen ſoll, gemeynt haben; ſo iſt nichts ſonderbareres, als davon her ein Stetiges charakteriſiren zu wollen. Wenn Jemand allmählig den blauen Horizont erkennt, oder eine mit der Feder ihm vorgezeichnete Linie; ſo faßt er das Ganze Theil für Theil: iſt aber darum, oder wird dadurch eines dieſer Ganzen weniger ein Kontinuum? — Oder umgekehrt, wenn Jemand von einem Berge Eine ganze Stadt auf einmahl faßt; iſt deswegen die Stadt ein Kontinuum? — Auf die Frage: ob irgend eine

Vorſtellung von einem Ganzen auf einmahl, ob nicht jedwede durch Syntheſis der Theilvorſtellungen entſtehe? wollen wir uns, weil es hier ganz überflüſſig iſt, gar nicht einlaſſen; und ſo ſoll auch Wolf, ſowohl um ſein ſelbſt, als ſeiner Glaubenshelden willen, ganz aus dem Spiele bleiben.

Schon die Zuſammenſetzung der Ausdrücke „continuum und contiguum" könnte die richtigen Begriffe, die ihnen zum Grunde liegen, kenntlich machen. Das Aneinanderhalten, und das Aneinandergrenzen ſagen, meyn' ich, klar, daß es zweyerley Manchfaltiges gebe, deſſen Theile je unmittelbar zuſammen beſtehen, nämlich

1. Ein Manchfaltiges, deſſen Theile aneinander halten, d. i. davon je einer mit dem andern unmittelbar ſo zuſammen beſteht, daß ſie nur Ein Gebilde geben; — dieß wird durch das bloße Aneinander angedeutet, welches die Vielheit der Gebilde, die aus den Theilen des Manchfaltigen erwachſen zu ſeyn angenommen werden könnte, ausſchließt, — und dieß iſt das Stetige;

2. Ein Manchfaltiges, deſſen Theile aneinander grenzen; welches Angrenzen offenbar anzeigt, daß ſich die Theile deſſelben zu einer Mehrheit von ganzen Gebilden, deren jedes ſeine Grenzen hat, von welchen aber das Eine mit einer ſeiner Grenze an der einen Grenze des Andern liegt, zuſammenfügen; — und ein ſolches Gefüge iſt Eine Sammlung (collectio) von aneinandergrenzenden Gebilden — iſt ein Contiguum. Das Angrenzende iſt nur Theil des Kontiguums, weil dieſes das Aneinandergrenzende, d. i. ein Angrenzendes mit ſeinem andern Angrenzenden iſt.

Das unmittelbare Zuſammenſeyn und Aufeinanderführen der Theile iſt alſo der Gemeincharakter der Theile des Kontinuums und Kontiguums. Der eigenthümliche Charakter eines Stetigen aber findet ſich darin, daß ſeine Theile nicht an einander grenzen, ſondern lediglich als Theile Eines Gebildes betrachtet werden; da hingegen das Kontiguum Theile vorweiſt, die aneinander grenzen, welches Angrenzen, wie geſagt, unumgänglich vorausſetzt, daß der angrenzende Theil ſelbſt ſchon für Ein Gebilde gelte.

Mehrere Arten, wie ſich das Manchfaltige zur Einheit füge und Ein Gebilde forme, laſſen ſich nicht denken; man müßte denn den Unterſchied zwiſchen einem einfachen und zuſammengeſetzten Kontiguum als eine neue Art aufführen wollen. Jenes iſt nämlich ein ſolches, deſſen Theilgebilde nur Eine Reihe geben, z. B. zwey aneinander ſtoßende Linien; das andere aber iſt ein Ganzes mit allen Dimenſionen, kurz ein eigentliches Aggregat, ein Haufe, z. B. ein Haufen Körner.

Der Unterſchied des Kontinuums von dem Kontiguum hängt in gegebenen Fällen eher an der Anſicht des Spekulanten, als an den gegebenen Objekten. Denn jedes Kontinuum läßt ſich als ein Kontiguum betrachten; man darf nur Theile des Kontinuums als mehrere für ſich begrenzte Gebilde anſehen, ſo hat man ein Aneinandergrenzendes, d. i. ein Kontiguum, vor ſich, z. B. Eine Linie läßt ſich als ein aus drey an einander grenzenden Linien zuſammengeſetztes Gebilde nehmen. — So umgekehrt: Jedes Kontiguum kann als ein Kontinuum betrachtet werden; man darf nur davon abſehen, daß Theile deſſelben aneinander grenzen, daß ſie eigne begrenzte Gebilde ſind; man darf alſo nur

alle

alle je unmittelbar auf einander weiſende Theile für bloß an einander beſtehende, ſich lediglich zu Einem Gebilde fügende Theile nehmen. Auf dieſe Art verfährt man in der Kosmologie, wo man alle Dinge ſich zu Einem Kontinuum fügende Theile der Welt betrachtet, — und ſo noch in andern Fällen mehr. Nur hüte man ſich, die Glieder eines Kontiguums als zerſtreute, von einanter entfernte Glieder zu denken; ingleichen in den Begriff des Stetigen die Vorſtellung von einem Verbundenſeyn oder Zuſammenhängen der Theile aufzunehmen, oder auch den Begriff von einer unveränderlich beſtimmten Anordnung ſeiner Theile. —

Iſt jedes ausgedehnte Ganze ein Kontinuum? — In wie fern man die Theile eines ſolchen Ganzen je unmittelbar an einander beſtehen läßt, dann ja! — Aber kann es nicht auch ein Kontiguum ſeyn? Kann es nicht zum mindeſten für ein ſolches genommen werden? Ohnfehlbar! und zwar ſelbſt alsdann, wenn es nicht aus verſchiedenartigen Theilen zuſammen geſetzt iſt: denn auf die Artung der Theile kommt weder beym Stetigſeyn, noch beym Aneinandergrenzen etwas an, — außer etwa, daß die Verſchiedenartigkeit (und ſo auch die Lage) der Theile unſere Anſicht des Ausgedehnten als eines aus verſchiedenen begrenzten Gebilden Zuſammengeſetzten, d. i. als eines Kontiguums, erleichtern kann.

Das Endliche und Unendliche.

Das Endliche iſt das der Zahl ſeiner Theile nach Beſtimmte, iſt das Soviele (magnum), d. i. das Beſtimmtgroße, — und zugleich auch das Nurſoviele (tantum), d. i. das Ganze (totum), welches als ſol-

End-

Endtheile, Grenzen, die auf Nichttheile deſſelben weiſen, vorzuzeigen hat.

Dagegen iſt das Unendliche ein der Zahl ſeiner Theile nach Unbeſtimmtes, iſt ein bloßes Wievieles (quantum), alſo ein Unbeſtimmtgroßes, ein Nichtnurſovieles, d. i. ein Unvollſtändiges, das keine Endtheile vorweiſt. — Dieß vorausgeſchickt, um dem gewöhnlichen leidigen Spiele mit Worten, das man in dieſen Unterſuchungen nur zu häufig zu bedauern hat, gleich anfänglich in etwas zu wehren.

„Jedes gegebene Große (Viele) iſt für ſich, „wenigſtens im Momente ſeines Gegebenſeyns, ein „Sovieles als es iſt, und ein Nichtmehr, d. i. ein „Ganzes, ein Endliches.“

Daß ein dergleichen Großes mehr ſey als es iſt, iſt als die hellſte Ungereimtheit undenkbar.

Allein es giebt manche Seiten, von denen aus betrachtet ein ſolches Großes als ein bloßes Wieviel erſcheint. Dieſe Seiten beleuchten heißt die Spiele mit dem für ſich Unendlichen aufdecken.

1. Als ein noch unbeſtimmtes Großes erſcheint eine Allgemeinheit, nicht ſie für ſich betrachtet, — denn da iſt ſie als dieſe Allgemeinheit, die ſie gegeben iſt, ſo viele und nicht mehr Theile befaſſend, — ſondern in Beziehung auf eine und andere Einzelnheit, wozu ſie ſich beſtimmen läßt, z. B. ein Dreyeck überhaupt, eine Allgemeinheit alſo, iſt ein bloßes Quantum, in wie fern es noch kein einzelnes Dreyeck iſt. Allein, die drey Theile, die zu einem Dreyecke überhaupt gehören, ſind in der Allgemeinheit „Dreyeck“ beſtimmt gegeben, ſind ein Soviel und Nichtmehr. Eine ſolche Allgemeinheit wäre alſo ein

rela-

relatives Quantum (ein beziehliches Wieviel), aber kein Unendliches.

2. Ein (durchs Denken, oder durchs Erkennen oder durch die Erfahrung) gegebenes Ganzes erſcheint vor mir wie ein Unbeſtimmtgroßes, nicht von ihm, ſondern von mir her, in wie fern es entweder

a) von mir ſeinen beſtimmten Theilen nach noch nicht gefaßt, alſo von mir noch unermeſſen iſt, z. B. ein ſich zu erkennen gegebener Körper. Es für ſich, ſo wie es gegeben iſt, läßt ſich als ein Endliches faſſen; nur ich weiß noch nicht, wie viel (quantum) es iſt; ich habe mein deutliches Kennen deſſelben noch nicht geendet, ich habe es noch nicht durch- und auserkannt. Ein dergleichen iſt ein (von mir) unermeſſenes Großes, aber kein Unendliches; — oder in wie fern es

b) von mir, wegen meinem Unvermögen, als ein Nurſovieles nicht der Zahl ſeiner einfachen Theile nach gefaßt werden kann. Nur ich kann das Durchkennen aller Theile, die es vorzuweiſen hat, nicht enden, z. B. der Welttheile. Ein ſolches Großes iſt ein (mir) Unermeßliches, aber kein Unendliches; — oder in wie fern es

c) von mir, deſſen freyem Denken oder Imaginiren das Beſtimmen deſſelben überlaſſen iſt, noch nicht ausgedacht iſt. Dieſes, meiner Imagination überlaſſene, Ausdenken findet ſtatt theils

1) bey ſolchen Größen, von welchen erſt (wie bey der Größe meiner Seeligkeit) einige Theile ſchon vorhanden, oder wenigſtens (wie bey der Größe der Welt) mir erſt einige Thei-

Theile, als diejenigen die ſie ſind, zu erkennen gegeben ſind; theils

2) bey ſolchen, welche bloß gedachte Größen ſind und ſeyn ſollen, wie alle Größen in der reinen Mathematik.

Eine Größe dieſer Art iſt ungeendet, bald für ſich (wie die Größe meiner Seeligkeit), und dabey zugleich von mir durch mein Denken derſelben; bald bloß von mir. Aber unendlich, unbeſtimmt für ſich, iſt ſie nicht, ſie mag nun, wie eine bloß imaginirte Größe, betrachtet werden, was und wie weit ſie geführt iſt in dem Momente, wo ich über ſie reflektire, oder wie ſie, unabhängig von meinem ſie Erkennen oder Denken, vorhanden iſt (wie die Welt), oder werden wird (wie meine Seeligkeit).

Es iſt ein Spiel, das zu nichts als zu Irrungen und Ungereimtheiten führt, wenn man eine mit ſeiner Imagination ſo weit geführte, oder überhaupt gegebene, folglich beſtimmte Größe vor ſich nimmt, ſie aber bey ſich für unbeſtimmt gelten, im analytiſchen oder ſynthetiſchen Behandeln derſelben ſie durch ein neues Hinzudenken immer mehr anſchwellen läßt, und dann behauptet, daß das Ohneendeſeyn, welches dem mit jedem neuen ſynthetiſchen Denkakte noch möglich zu erweiternden, alſo noch ungeendeten Denken derſelben eigen iſt, ihr, der durch das ſo Denken gegebenen Größe, zuſtehe, und daß alſo ſie unendlich ſey. Denn, noch einmahl, als eine unendliche gegebene kann keine Größe gedacht werden, wohl aber als eine, die durchs Denken noch ungeendet gegeben iſt. Was ich von dort aus bis auf dieſen Moment zuſammen gedacht habe, iſt ein Soviel

und

und Nichtmehr, welches ſich nach meinem dem Maaße nach beſtimmten einzelnen Denkakte richtet. —

Aus dieſer Verwechſelung des Ungeendeten, nur noch ſo weit Geführten, und als ſolchen doch Beſtimmten mit dem Unendlichen, für ſich Unbeſtimmten, kommt es nun, daß man von jenem ausſagt, was nur von dieſem letzten, wenn es gegeben wäre, gelten kann.

Dieſe Erſchleichung hat aber auch nicht ſelten ſeinen Grund in der Vergeſſenheit des logiſchen Grundſatzes: daß das Beſtimmte auch wieder ein Beſtimmtes ſetze.

Von dieſen beyden Quellen geht z. B. jene Widerſinnigkeit aus, wenn man zwey Linien (Aſymptoten), in einer beſtimmten Entfernung von einander geſetzt, und mit beſtimmter Gradation ihrer Annäherung gedacht, dennoch ohne endliches Zuſammenſtoßen denken will.

Sagt man: ich kann auch alles dasjenige, was ſich von meinem Geiſte zuſammen denken läßt, nicht ausdenken, z. B. ich kann alles mir denkbare Räumliche, Zeitige, Habende — niemahls wirklich ausdenken; denn ſonſt müßte ſich meine Denkkraft durch Ausdenken ſelbſt aufheben können: ſo ſtößt man auf die (uns) unendbare Quanta, die nicht gegeben ſind, ſondern von denen man bloß einen Allgemeinbegriff aufzuweiſen hat. Dieſe Quanta unterſcheiden ſich von einem Unendlichen dadurch, daß ſie zwar durchs Denken ſich geben laſſen, daß wir ſie aber zu keiner Zeit mit unſerm Denken geben können; hingegen das Unendliche ſoll gegeben ſeyn, ſey es durch unſer Denken, oder als vorhan-

handener, ſey es zu welcher Zeit vorhandener, Gegenſtand.

Daß ein gegebenes Großes und Ganzes aus einfachen Theilen zuſammengeſetzte ſey, und ſich als ſolches zum Durchkennen anbiete, ergiebt ſich von ſelbſt aus dem Beſtimmt- und Begrenztſeyn eines Ganzen. In der Analyſe können wir uns, wenn wir nicht etwa in dem durchs Denken geſetzten Ganzen die Zahl ſeiner einfachen Theile ſchon wiſſen, derſelben nur annähern. Allein dabey muß jenes Spiel des weitern Syntheſirens durchaus vermieden werden, d. i. wer ein Gegebenes analyſiren will, ſoll es auch bloß analyſiren.

Uebrigens iſt noch zu bemerken: daß jedes Unvollendete, dergleichen jedes Unbeſtimmte und Unbegrenzte, folglich auch jedes bloße Quantum iſt, noch zu keinem Vernunftgegenſtande erhoben ſey. Unſer vernünftiger Geiſt fodert aber unnachlaßlich, daß jedes Gebilde mit Vernunft, alſo in aller Rückſicht vollendet, gekannt werde, unter der Vorausſetzung, daß ſich auch jedes mit Vernunft kennen laſſe.

Vieles zu der Materie dieſer Abhandlung Gehörige, was ich hier kaum, oder gar nicht berühren konnte, verſpare ich auf die oben verſprochene philoſophiſche Einleitung, wo ich auch auf die über dieſe Abhandlung einlaufenden männlichen Erinnerungen die ſchuldige Rückſicht nehmen werde.

Inhalt.

Inhalt.

I. Dynamik oder Statik und Mechanik feſter Körper.

Erſtes Kapitel. S. 3 — 15. Allgemeine dynamiſche Begriffe.

Zweites Kapitel. S. 16 — 25. Allgemeine Betrachtungen des Bewegungsvermögens beim Stoße feſter Körper an einander.

Drittes Kapitel. S. 26 — 47. Vom Gleichgewicht der Kräfte, die an Punkten einer Ebene angebracht ſind, und deren Richtungslinien in dieſer Ebene ſelbſt liegen.

Viertes Kapitel. S. 48 — 51. Vom Gleichgewicht der Kräfte, die an Punkten nach Richtungen wirken, welche nicht in einer einzigen Ebene liegen.

Fünftes Kapitel. S. 52 — 64. Vom Gleichgewicht eines Syſtems von Punkten, in welche die Schwere wirkt, und vom Schwerpunkte.

Sechstes Kapitel. S. 63 — 68. Vom mathematiſchen Hebel.

Siebentes Kapitel. S. 69 — 77. Geſetze des freien Falles.

Achtes Kapitel. S. 78 — 92. Umſtände, welche die beſchleunigende Kraft unſerer Schwere abändern; insbeſondere Bewegung auf einer ſchiefen Ebene und vom einfachen Pendel.

Neuntes Kapitel. S. 93 — 107. Vom Momente der Trägheit, deſſen Einfluß auf die Bewegung eines Syſtems von Maſſen, die ſich in den verſchiedenen Stellen des Syſtems mit verſchiedenen Geſchwindigkeiten bewegen, und insbeſondere vom zuſammengeſetzten Pendel.

Zehentes Kapitel. S. 108 — 112. Von der Wirkung der Schwungkräfte bei Körpern, die ſich in einem Kreiſe bewegen.

II. Hydro-

II. Hydroſtatik.

Erſtes Kapitel. S. 113—125. Vom Druck des Waſſers unter ſich und an die Wände von Gefäſſen und Röhren.

Zweites Kapitel. S. 126—135. Vom Druck des Waſſers auf ſchwimmende oder untergetauchte Körper, und der daraus flieſſenden Beſtimmung der ſpec. Schwere feſter Körper.

Drittes Kapitel S. 136—148. Vom Druck verſchiedener flüſſiger Maſſen, beſonders wenn ſie vermiſcht ſind, und von Aerometern.

III. Aerometrie oder Pneumatik.

Erſtes Kapitel. S. 149—162. Allgemeine Eigenſchaften der Luft, beſonders ihre Expanſivkraft und das Barometer.

Zweites Kapitel. S. 163—170. Verſchiedenheit der Expanſivkraft der atmoſphäriſchen Luft in verſchiedenen Zeiten und in verſchiedenen Stellen der Atmoſphäre.

Drittes Kapitel S. 171—191. Wie unter ſonſt gleichen Umſtänden Dichtigkeit der Luft mit ihrer Expanſivkraft zuſammenhängt. Allgemeine Beſchaffenheit der Luftpumpen und mancherlei Arten derſelben.

Viertes Kap. S. 192—204. Von Thermometern.

Fünftes Kapitel. S. 205—219. Einige Betrachtungen über den Wärmeſtoff, als Urſache der Temperatur der Körper.

Sechstes Kapitel. S. 220—224. Nähere Beſtimmung des Einfluſſes der Wärme auf die Expanſivkraft der Luft und der Dämpfe.

IV. Hydraulik.

Erſtes Kapitel S. 225—238. Vom Ausfluſſe des Waſſers durch Oeffnungen aus Behältniſſen, die beſtändig gleichvoll erhalten werden.

Zweites Kapitel. S. 239—248. Vom Nivelliren oder Waſſerwägen.

Drittes Kapitel. S. 249—262. Von der Bewegung des Waſſers in offenen Kanälen.

Vier-

Viertes Kapitel. S. 263 — 293. Von der Bewegung des Waſſers in Röhren bei unveränderlicher Waſſerhöhe.

Fünftes Kapitel. S. 294 — 299. Von natürlichen Springwerken.

Sechstes Kapitel. S. 300 — 320. Vom Stoße des Waſſers und der Luft.

V. Maſchinenlehre.

Erſtes Kapitel. S. 321 — 332. Von den Maſchinen überhaupt.

Zweites Kapitel. S. 333 — 344. Von der Nebenlaſt bei Maſchinen.

Drittes Kapitel. S. 345 — 348. Kraft und Gewicht, ingleichem Geſchwindigkeit und Stellung belebter Geſchöpfe bei Maſchinen.

Viertes Kapitel. S. 349 — 352. Der phyſiſche Hebel und die Wagen.

Fünftes Kapitel. S. 353 — 357. Die ſchiefe Ebene und der Keil.

Sechſtes Kapitel. S. 358 — 363. Die Walze.

Siebentes Kapitel. S. 364 — 373. Die Schraube.

Achtes Kapitel. S. 374 — 386. Von den Haſpeln.

Neuntes Kapitel. S. 384 — 416 Von den Roßkünſten, oder dem Lauf- und Tretrade, der Tretſcheibe und den Pferdegöpeln.

Zehentes Kapitel. S. 417 — 434. Von den Rollen und den Flaſchenzügen.

Eilftes Kapitel. S. 435 — 447. Vom oberſchlächtigen Waſſerrade.

Zwölftes Kap. S. 448 — 483. Von unterſchlächtigen Waſſerrädern.

Dreizehntes Kap. S. 484 — 485. Das Segneriſche Waſſerrad.

Vierzehntes Kap. S. 486 — 497. Von den Windflügeln.

Funfzehntes Kap. S. 498 — 531. Von den Waſſerſäulenmaſchinen.

Sech-

Sechzehentes Kap. S. 532—534. Von den Dampfmaſchinen.
Siebenzehentes Kap. S. 535 — 547. Vom hydrauliſchen Stöſſer (Bélier Hydraulique).
Achtzehentes Kapitel. S. 548—561. Von den Schöpfrädern.
Neunzehentes Kap. S. 562—564. Die Saugſchwungmaſchine.
Zwanzigſtes Kap. S. 565—572. Die archimediſche Waſſerſchnecke.
Ein und zwanzigſtes Kap. S. 573—579. Von der Spiralpumpe.
Zwei u. zwanzigſtes Kap. S. 580—585. Von den Püſchel und Paternoſterwerken, Kaſtenkünſten und Schaufelwerken.
Drei u. zwanzigſtes Kap. S. 585—587. Von der waſſerhebenden Veraſchen Seilmaſchine.
Vier u. zwanzigſtes Kap. S. 587—608. Theorie der Bewegung bei Maſchinen im ungleichförmigen Beharrungsſtande, und insbeſondere der des Krummzapfens.
Fünf u. zwanzigſtes Kap. S. 609—615. Von den Saugwerken.
Sechs u zwanzigſtes Kap. S. 616—622. Von den Druck insbeſondere den vereinbarten Saug, und Druckwerken.
Sieben u. zwanzigſtes Kap. S. 523—526. Von den Feuerſpritzen.
Acht u. zwanzigſtes Kap. S. 627—654. Vom Vorgelege und Zwiſchengeſchirr.
Neun u. zwanzigſtes Kap. S. 655—665. Von den Hammerwerken.
Dreiſigſtes Kap. S. 666—683. Von den Stampfwerken oder Stampfmühlen.
Ein u. dreiſigſtes Kap. S. 684—691. Von den Schneidemühlen.
Zwei u. dreiſigſtes Kap. S. 692—699. Von den Getraidemühlen.
Drei u. dreiſigſtes Kap. S. 700—712. Von den Fuhrwerken.

Dyna-

Dynamik

oder

Statik und Mechanik
feſter Körper.

Dynamik
oder
Statik und Mechanik
feſter Körper.

Erſtes Kapitel.
Allgemeine dynamiſche Begriffe.

Erklärung 1.

§. 1. Die Statik enthält die Lehre von den Bedingungen, unter welchen Kräfte Ortsänderug verhindern. Dieſe Bedingungen heiſſen Geſetze des Gleichgewichts, und es iſt daher die Statik eine Wiſſenſchaft von den Geſetzen des Gleichgewichts.

Erklärung 2.

§. 2. Die Mechanik enthält die Lehre von den Bedingungen, unter welchen Kräfte in beſtimmten Zeiten beſtimmte Ortsänderungen hervorbringen. Dieſe Bedingungen heiſſen Geſetze der Bewegung. Daher iſt die Mechanik eine Wiſſenſchaft von den Geſetzen der Bewegung.

Die Dynamik begreift beide unter ſich: die Statik und die Mechanik.

Anm. 1. Ich werde hier die Statik und die Mechanik feſter Körper ſo mit einander verbunden vortragen, wie es mir dem natürlichem Zuſammenhange dieſer Lehren am angemeſſenſten und ebendarum auch dem leichteren Verſtändniſſe des Vortrags am zuträglichſten ſcheint.

Anm. 2. Metaphyſiſche Entwickelung des Begriffs von Kraft gehört nicht hierher. Hier genüget es, die Erſcheinungen ſo zu betrachten, wie ſie ſich unſeren Sinnen darſtellen, und das Ausmeßbare bei ihnen ſo zu beſtimmen, daß dieſe Beſtimmungen auf andere Erſcheinungen zurückgebracht werden, die wir in angenommenen konventionellen Maaßen zu beſtimmen fähig ſind. Ueberhaupt kommt es in der ganzen angewandten Mathematik nur darauf an, zu zeigen, in welchem Verhältniſſe Erſcheinungen, die unter gewiſſen Umſtänden eintreten werden, mit andern Erſcheinungen ſtehen, die wir nach angenommenen konventionellen Maaßen beſtimmt angeben können. Ebendarum bekümmert man ſich hier bei Feſtſetzung der Begriffe bloß um deutliche Darſtellung einer Erſcheinung als Erſcheinung, ohne ſich in Erklärung der Art einzulaſſen, wie eine ſolche Erſcheinung für uns dieſe Erſcheinung ſeyn kann? Der Metaphyſiker darf es alſo nicht anſtößig finden, wenn er hier z. B. Maſſen und Kräfte als ganz verſchiedene Dinge von einander abgeſondert ſieht; genug, daß es gewiſſe Erſcheinungen giebt, die wir Maſſen nennen, und wieder andere, die wir Kräfte nennen.

Erklärung 3.

§. 3. Die Bewegung eines Punktes oder Elementes heißt für eine gegebene Zeit gleichförmig, wenn ieder Theil des durchloffenen Raums dem zugehörigen Theil der Zeit proportional iſt; ungleichförmig, wenn nicht alle Theile des durchloffenen Raums den

den zugehörigen Theilen der Zeit proportional ſind. Die ungleichförmige Bewegung iſt eine beſchleunigte, wenn der bewegte Punkt in iedem folgenden Zeittheilchen einen gröſſern Raum durchlauft als in dem gleichgroſſen vorhergehenden Zeittheilchen. Im umgekehrten Falle iſt die Bewegung eine verzögerte.

Die ungleichförmige Bewegung heißt **gleichförmig beſchleunigt**, wenn die in gleichgroſſen auf einander folgenden Zeittheilchen durchloſſene Räume um gleichviel wachſen; **gleichförmig verzögert**, wenn dieſe Räume um gleichviel abnehmen.

Anm. Für die mathematiſchen Beſtimmungen des Ausmeßbaren bei den mit der Bewegung verbundenen Erſcheinungen iſt die Entwickelung des Unterſchiedes zwiſchen abſoluter und relativer Bewegung ſehr entbehrlich. Hier heißt abſolute Bewegung dieienige Ortsänderung eines Punktes, welche er vermöge einer in ihn wirkenden Kraft erlitten hat.

Erklärung 4.

§. 4. Unter der **Geſchwindigkeit** eines bewegten Punktes in irgend einer Stelle ſeiner Bahn verſteht man den Weg, den ein Punkt in ſeiner Bahn in einer beſtimmten Zeit von gedachter Stelle aus durchlaufen würde, wenn er die ihm in dieſer Stelle zukommende Bewegung gleichförmig fortſetzte. Wenn nichts ausdrücklich erinnert wird, ſo wird hier allemal eine Sekunde als Zeiteinheit, alſo unter Geſchwindigkeit der Raum verſtanden, den ein Punkt in einer Sekunde gleichförmig durchlauft.

Anm. In den Vorleſungen verdienen folgende Sätze erwähnt und näher beſtimmt zu werden:

1. Die Geſchwindigkeit, mit der ein bewegtes Element um einen Raumpunkt fortrückt, iſt für alle Arten von

Bewegungen, von welchen Kräften ſie auch herrühren mögen, einerlei oder eine abſolut unveränderliche Gröſſe.

2. Wäre die Bewegung ſtetig, ſo wäre keine Verſchiedenheit der Geſchwindigkeiten möglich.

3. Man iſt daher genöthiget anzunehmen, daß gar keine Ortsänderung, alſo ſelbſt kein Fortrücken durch einen Raumpunkt erfolge, ohne vorher einen gewiſſen Zeitaufwand anzunehmen, worin die Hinderniß des Fortrückens aufgehoben wird. Jede angebliche Geſchwindigkeit wird alſo durch die Summe von Zeittheilchen beſtimmt, welche fürs erſte auf wirkliche Bewegung durch einen Raumpunkt, und fürs andere auf iede momentaniſche Ruhe, die nach iedem Raumpunkt erfolgt, verwendet wird. Gröſſere Geſchwindigkeiten ergeben ſich hiernach bloß durch Abkürzung iener momentaniſchen Ruhe.

4. Das einzige Zeittheilchen, worin ein bewegtes Element um einen Raumpunkt fortrückt, iſt für alle Arten von Bewegung daſſelbe und läßt ſich = 1 ſetzen; zu ihm muß aber noch die vorhergehende momentaniſche Ruhezeit addirt werden, die, wenn ſie ſich zu ienem Zeittheilchen wie m zu 1 verhält, = m geſetzt werden kann. So iſt alſo die geſammte Wirkungszeit, die eine Kraft braucht, um ein Element aus ſeiner anfänglichen Ruhe in Bewegung zu ſetzen und wirklich um einen Raumpunkt fortzurücken,

$$= 1 + m$$

5. Jede Bewegung durch einen bemerkbaren Raum beſteht alſo aus Abwechslungen von Ruhe und Fortrücken. Zu ieder Abwechslung gehört ein Fortrücken um einen Raumpunkt. Soll ein Element um N Raumpunkte fortrücken, ſo muß ſolches durch N Abwechslungen geſchehen. Beſchleunigte Bewegung kann alſo nur dadurch entſtehen, daß die Anzahl der Abwechslungen von Ruhe und Fortrücken für gleiche

Zei-

Zeiten immer gröſſer wird; verzögerte dadurch, daß die Anzahl von Abwechslungen in gleichen Zeiten immer kleiner wird. Gleichförmige iſt die, bei welcher in gleichen Zeiten immer gleichviele Abwechslungen erfolgen.

Zuſ.

§. 5. Die Geſchwindigkeit für eine Sek. heiſſe c; der Weg, den ein Punkt mit dieſer Geſchwindigkeit in der Zeit t (unter t eine Anzahl von Sekunden verſtanden) durchlauft, s; ſo hat man für die gleichförmige Bewegung

$$s = t.c$$

alſo auch

$$c = \frac{s}{t} \text{ und } t = \frac{s}{c}$$

Erklärung 5.

§. 6. Kräfte heiſſen abſolute, wenn ſie in bewegte Punkte ebenſo wirken wie in ruhige, ſo daß ihre Eindrücke in einen Punkt von dem Zuſtande der Ruhe und der Bewegung gar nicht abhängen.

Bleiben die Eindrücke einer Kraft in einen Punkt immer dieſelben, der Punkt mag ſich wo man will befinden, ſo iſt ſie eine unveränderliche abſolute Kraft, widrigenfalls eine veränderliche. Relative Kräfte ſind ſolche, deren Eindrücke von der gröſſeren oder kleineren Geſchwindigkeit der von ihnen angegriffenen Punkte abhängen.

Axiom I.

§. 7. Ein Punkt, der ſich einmal in Ruhe befindet, bleibt ſolange in Ruhe, bis ihn eine neue Kraft zur Bewegung beſtimmt.

Axiom 2.

§. 8. Ein Punkt, der ſich in Ruhe befindet, bleibt noch in Ruhe, wenn er von gleichen entgegengeſetzten Kräften angegriffen wird.

Axiom 3.

§. 9. Ein mit irgend einer Geſchwindigkeit in Bewegung geſetzter Punkt ſetzt ſeine Bewegung nach derſelben Richtung mit unveränderlicher Geſchwindigkeit fort, ſolange nicht eine von neuem hinzutretende Kraft ſeine Geſchwindigkeit abändert.

Anm. Man muß ſich allemal erinneren, daß ſich Bewegung nie auf ſtetiges Fortrücken, ſondern auf fortdauernde Abwechslung von Ruhe und Fortrücken beziehet, und daß alſo auch Geſchwindigkeit allemal den Raum bezeichnet, welcher vermöge der durch die jedesmalige Kraft beſtimmten Abwechslung von einem bewegten Punkte in einer beſtimmten Zeit (hier in einer Sekunde) durchloſſen wird.

Erklärung 6.

§. 10. Das allgemeine Geſetz der Unveränderlichkeit des Zuſtandes eines Punktes, ſolange keine neue Kräfte in denſelben wirken, heißt das Geſetz der Trägheit, beſſer das Geſetz der Beharrlichkeit.

Kraft der Trägheit, lebendige Kraft und todte Kraft ſind unſchickliche Benennungen.

Erfahrung 1.

§. 11. Ueberall wo wir uns auf unſerer Erde befinden, finden wir die allen Körpern gemeinſchaftliche Eigenſchaft, in gerader Linie zur Erde nieder zu fallen, ſobald ſie ſich ſelbſt überlaſſen werden. Fäden, an denen

nen man ſie aufhängt, werden von ihnen in gerader Linie angeſpannt, und mehrere ſolche neben einander aufgehängte Körper ſpannen die Fäden in Richtungen an, die von der parallelen Lage nicht unterſchieden werden können, und die auf die Fläche eines ruhigen Waſſerſpiegels ſenkrecht ſind. Wir ſelbſt fühlen dieſes Streben der Körper gegen die Erde zu ſinken, wenn wir ſie z. B. mit der Hand zu fallen verhindern wollen.

Erklärung 7.

§. 12. Von der im vorh. §. erwähnten Eigenſchaft nennen wir die Körper ſchwer, und was ihnen dieſe Eigenſchaft giebt, die Schwere. Die Richtung, nach der die Schwere wirkt, heißt die lothrechte, und die, mit der ſie einen rechten Winkel macht, die wagrechte oder horizontale.

Erklärung 8.

§. 13. Unter der Maſſe eines Körpers verſteht man die Summe von Atomen, welche bei der Bewegung des Körpers innerhalb ſeinem Umfange zugleich mit bewegt werden müſſen.

Hypotheſe.

§. 14. Die Schwere (§. 12) wirkt als eine abſolute Kraft (§. 6) in alle Atomen auf einerlei Weiſe, und zwar als eine veränderliche abſolute Kraft, die ſich verkehrt wie das Quadrat der Entfernung des Körpers vom Mittelpunkt der Erde verhält.

Anm. Die Uebereinſtimmung aller aus dieſer Hypotheſe flieſſenden Folgen mit den wirklichen Erſcheinungen berechtiget uns, ſie anzunehmen. Bei dieſen Vergleichungen muß auf die Wirkung der von der Bewegung der Erde herrüh-

rührenden Schwungkräfte mit Rückſicht genommen werden. Da übrigens die Richtigkeit der Hypotheſe keineswegs aus dem Verſtande abgeleitet, ſondern nur aus der Erfahrung erkennt werden kann, ſo ſcheint mir der Verſuch mit der Luftpumpe, wo man eine Feder mit iedem andern Körper im luftleeren Raume gleichſchnelle fallen ſieht, nicht ſo lächerlich als Käſtnern (Anfangsgr. der höh. Mechan. 2te Ausg. S. 34.)

Zuſ. 1.

§. 15. Für ganz Teutſchland und ſelbſt für ganz Europa iſt das Verhältnis der verſchiedenen Erdhalbmeſſer ſo wenig vom Verhältniſſe der Gleichheit verſchieden, auch ſind die verſchiedenen Wirkungen der erwähnten Schwungkräfte ſo unbedeutend, daß in Bezug auf Bewegungen, von welchen hier die Rede iſt, die Schwere als eine unveränderliche abſolute Kraft betrachtet werden kann. Sie iſt auf den höchſten Bergen noch nicht um ſo viel kleiner als in den tiefſten Gruben, daß dieſe Vorausſetzung einen bemerkbaren Fehler geben könnte.

Erklärung 9.

§. 16. Der Eindruck einer abſoluten Kraft in ieden Atom einer Maſſe heißt insbeſondere die beſchleunigende Kraft. Die beſchleunigende Kraft unſerer Schwere iſt alſo der Eindruck der Schwere auf die einzelen Atome der Körper.

Lehrſ. 1.

§. 17. Die Geſchwindigkeit einer durch eine abſolute Kraft in Bewegung geſetzten Maſſe, der nach der Richtung der Kraft keine Hindernis entgegen-

gengeſetzt iſt, wird bloß durch die Gröſſe der beſchleunigenden Kraft beſtimmt.

Bew. Weil die abſolute Kraft allen einzelen Atomen gleiches Beſtreben zur Bewegung mittheilt, ſo müſſen ſie auch alle gleiche Geſchwindigkeit annehmen, es kann alſo keines auf das andere wirken und iedes muß für ſich dem bloßen Eindruck der abſoluten Kraft folgen.

Erklärung 10.

§. 18. Die Summe der Eindrücke, welche eine abſolute Kraft in eine Maſſe macht, heißt dieſer Maſſe bewegende Kraft. Die von den Eindrücken der Schwere in eine Maſſe herrührende bewegende Kraft heißt insbeſondere das Gewicht der Maſſe.

Zuſ.

§. 19. Vermöge (§. 14) ſind wir zu folgendem Satze berechtiget: die Gröſſe einer Maſſe (die Menge ihrer Atomen) iſt ihrem Gewichte proportional. Verhältnißzahlen für die Gewichte ſind alſo zugleich Verhältnißzahlen für die Gröſſe der Maſſen.

Anm. Verhältniszahlen für die Gewichte können wir nur durch Feſtſetzung irgend eines angenommenen Fundamentalgewichtes beſtimmen.

Hierzu dient das in Cölln und mehreren teutſchen Städten niedergelegte Gewicht, das unter dem Namen der Cöllniſchen Mark bekannt iſt. Der Begriff dieſes Gewichts kann nicht anders als durch unmittelbare Anſchauung einer Maſſe erhalten werden, die derſelben gleich iſt oder in einem gegebenen Verhältniſſe mit derſelben ſteht.

Die

die Cöllniſche Mark iſt = 16 Loth
= 16 × 240 Gran = 3840 Gr.
= 65536 Richtpfennige
alſo 1 Gr = 17,07 Rpf.
1 Cölln. Pfund = 2 Mrk = 131072 Rpf.
Das Berliner Pfund = 131328 Cöllniſche Rpf.
1 Schiffspfund = 20 Lispfund = 280 Pfund.

Nach Medicinalgewicht iſt
1 Pf = 12 Unzen = 96 Drachmen
= 288 Skrupel = 5760 Gr.
= 5760 × $17\frac{2}{5}$ od. 100224 Cölln. Rpf.

Die Anzahl der Richtpfennige iſt die allgemeine Verhältnißzahl zur Vergleichung der Pfunde, weil allemal Cöllniſche Richtpf. verſtanden werden.

Nach neufranzöſ. Gewicht iſt

1 Centigramme	2,8	Cölln. Rpf.
Decigramme	28,0	—
Gramme	280,5	—
Dekagramme	2805,0	—
Hektogramme	28050,1	—
Kilogramme	280500,6	—
Myriagramme	2805006,2	—

Von Werkzeugen, welche die verhältnismäſſige Gröſſe von Maſſen nach beſtimmten Gewichtsmaaßen anzugeben dienen, kann erſt weiter unten geredet werden. Eine hieher gehörige Tafel ſ. am Ende dieſes Buchs.

Erklärung II.

§. 20. Unter dem Verhältniß der Dichtigkeit verſchiedener Maſſen verſteht man das Verhältniß der Maſſen (§. 13) bei gleichem kubiſchem Inhalt des Raums, in den ſie verbreitet ſind. Dieſes Verhältniß iſt alſo mit dem Verhältniß der Gewichte verſchiedener Maſſen, die in gleichen körperlichen

lichen Räumen verbreitet ſind, einerlei. Eine hierher gehörige Tafel findet man am Ende dieſes Buchs.

Das Verhältniß der Dichtigkeit heißt auch das Verhältniß der ſpecifiſchen Schwere oder des eigenthümlichen Gewichts. Gewöhnlich ſetzt man die ſpec. Schwere des deſtillirten Waſſers = 1; wenn nun die ſpec. Schwere einer andern Maſſe z. B. durch die Zahl n ausgedruckt wird, ſo wird hiermit geſagt, die andere Maſſe wiege bei gleichem kubiſchem Inhalt n mal ſo viel als reines Waſſer.

Zuſ.

§. 21. Der Eindruck, den die Schwere in einen Atom macht, heiſſe p; ein Körper enthalte in einem beſtimmten Volumen V eine Anzahl von Atomen = n, ſo iſt ſein Gewicht = n.p; ein anderer Körper, deſſen Volumen $\mathfrak{V}$, enthalte n Atomen, ſo iſt ſein Gewicht = n.p. Wenn nun im 1ten Fall n Atomen den Raum V ausfüllen, ſo gibt die Proportion

$$V : \mathfrak{V} = n : \frac{n.\mathfrak{V}}{V}$$

die Menge von Atomen des erſten Körpers, deren Volumen gleichfalls = $\mathfrak{V}$ ſeyn würde, und deren Gewicht = $\frac{n.\mathfrak{V}}{V}.p$ wäre.

Demnach verhalten ſich die Gewichte gleicher Voluminum des erſten und des andern Körpers

$$\text{wie } \frac{n.\mathfrak{V}}{V}.p \text{ zu } n.p$$

$$\text{oder wie } \frac{n.p}{V} \text{ zu } \frac{n.p}{\mathfrak{V}}$$

d. i. wie ihre Gewichte mit ihren Maſſen dividirt.

Eben-

Ebenſo verhalten ſich alſo auch ihre ſpec. Schweren oder ihre Dichtigkeiten.

Erklärung 12.

§. 21*. Das Produkt aus der Maſſe (d. h. aus der für ſie angenommenen Verhältnißzahl) in ihre Geſchwindigkeit, (oder in eine Verhältnißzahl der Geſchwindigkeit) heißt die Gröſſe der Bewegung.

Lehrſ. 2.

§. 22. Verſchiedene in Bewegung geſetzte Maſſen M, m haben gleiches Bewegungsvermögen, wenn ſie einerlei Gröſſe der Bewegung haben.

Bew. Die Geſchw. von M heiſſe c, in demſelben Augenblick da die von m = C iſt, ſo iſt nach der Vorausſetzung

$$M.c = m.C$$

Es ſey nun n die Menge gleicher einfacher Wirkungen bei iedem Atom von M für irgend ein ſehr kleines Zeittheilchen z. B. für $\frac{1}{1000000}$ Sek. ſo heißt dieſes ſoviel: iedes einzele Atom rückt in dieſem Zeittheilchen um n Raumpunkte fort, und iedes Fortrücken geſchieht mit einer abſolut unveränderlichen Geſchwindigkeit bei allen Arten von Bewegung immer nur durch einen Raumpunkt. Alſo iſt M.n die Summe aller einzelen Wirkungen für alle Atomen zuſammen genommen, die durch M ausgedruckt werden, für ein ſehr kleines Zeittheilchen. In demſelben Zeittheilchen werden bei iedem Atom von m eben ſolche einfache Ortsänderungen hervorgebracht, deren Anzahl ich = N ſetzen will; es iſt dieſemnach die Summe aller einfachen

chen Wirkungen für alle Atome der Maſſe $m = m : N$, für daſſelbe ſehr kleine Zeittheilchen verſtanden.

Wird nun das Bewegungsvermögen der Maſſe M durch B, das von m durch b ausgedrückt, ſo hat man

$$B : b = M.n : m.N$$

Es iſt aber

$$n : N = c : C$$

alſo

$$B : b = M.c : m.C$$

folglich, weil $M.c = m.C$ iſt,

$$B = b$$

Zuſ.

§. 23. Man kann daher die Gröſſe der Bewegung (§. 21) auch das Bewegungsvermögen nennen. Es iſt einerlei mit dem Carteſiſchen Kräftenmaaß (unten §. 91.)

Anm. Man muß hier, wo von Maſſen die Rede iſt, den Begriff von Gewichten ſorgfältig bei Seite ſetzen. Das Bewegungsvermögen einer beſtimmten Kugel, die z. B. aus n Atomen beſteht und mit der Geſchw. C ſich fortbewegt, bleibt daſſelbe, ob unſere Schwere in dieſe Atomen wirkt oder nicht. Sie würde in einem anderen Weltkörper bei derſelben Geſchwindigkeit daſſelbe Bewegungsvermögen haben, wenn auch gleich dort eine ganz andere Schwere in ſie wirkte. Der Umſtand, daß die Schwere in unſere Maſſen wirkt, dient uns hierbei nur für M und m d. h. für die verſchiedenen Maſſen Verhältnißzahlen ſetzen zu können.

Zwei-

Zweites Kapitel.

Allgemeine Betrachtungen des Bewegungsvermögens beim Stoſſe feſter Körper an einander.

Erklärung 13.

§. 24. Maſſen heiſſen elaſtiſche, wenn ſich durch angebrachte Kräfte die Lage ihrer Theile gegen einander ändern läßt, 1) ohne daß dadurch ihr Zuſammenhang aufgehoben wird, und 2) ſo, daß die erſte Lage der Theile gegen einander ohne Mitwirkung der Schwere von ſelbſt wieder hergeſtellt wird, ſobald iene Kräfte nicht mehr auf ſie wirken. Die, denen dieſe Eigenſchaft nicht zukommt, heiſſen unelaſtiſche; und zwar harte, wenn ſich ihre Geſtalt oder die Lage ihrer Theile gegen einander, ohne Theile von der ganzen Maſſe zu trennen, gar nicht ändern läßt; weiche, wenn ſie bei den Eindrücken einer auf ſie wirkenden bewegenden Kraft eine andere Geſtalt annehmen, die, wenn nicht die Schwere eine Aenderung bewirkt, noch bleibt, wann das, was ſie hervorbrachte, wieder weggenommen wird.

Anmerk. In dieſem Kapitel wird die Maſſe anſtoſſender Körper ſo betrachtet, als wenn ſie in iedem Körper in einem einzigen Punkte beiſammen wäre, und dieſe Punkte ſich in einer gemeinſchaftlichen Linie bewegten. Im 5ten Kap. wird gezeigt werden, daß es in einem ieden Körper einen ſolchen Punkt giebt, daß alſo ein ſolcher Stoß möglich iſt, wobei nämlich dieſe Punkte der zuſammenſtoſſenden Körper ſich in einer gemeinſchaftlichen geraden Linie bewegen

gen und in dieſer Linie an einander ſtoſſen. Er heißt der centrale Stoß (unten §. 74. Anm. 2.)

Aufg. 1.

§. 25. Zwei harte Maſſen M, m bewegen ſich in einerlei geraden Linie AB gerade gegen einander, iene (M) mit der Geſchwindigkeit C, dieſe (m) mit der Geſchwindigkeit c; man ſoll die Bewegung beider Maſſen nach dem Stoſſe beſtimmen.

Aufl. Das Bewegungsvermögen von M iſt M.C, das von m iſt m.c; iſt alſo $M.C > m.c$, ſo wird im Augenblick des Stoſſes ein Theil von MC aufgehoben, der = mc iſt und die Maſſe m verliehrt in dieſem Augenblick ihr ganzes Bewegungsvermögen und kommt zur Ruhe.

Das Bewegungsvermögen der Maſſe M bleibt nun noch $M.C - m.c$

Würde alſo die m in dieſem Augenblick vernichtet, ſo müßte die M mit einer Geſchwindigkeit $\mathfrak{C}$ ſich fortbewegen, ſo daß

$$M.\mathfrak{C} = M.C - m.c$$

wäre, alſo

$$\mathfrak{C} = \frac{M.C - m.c}{M}$$

Weil aber m nicht vernichtet wird, alſo ſich nach dem Stoſſe zugleich mit M nach BA bewegen muß, ſo wird

$$(M+m).\mathfrak{C} = M.C - m.c$$

alſo

$$\mathfrak{C} = \frac{M.C - m.c}{M+m}$$

Zuſ.

§. 26. Bewegt ſich m gleichfalls, wie M, von B nach A (fig. 2), ſo iſt die Summe beider Bewegungsvermögen vor dem Stoſſe

$$= M.C + m.c$$

Iſt dabei $C > c$, ſo kann erſt Stoß erfolgen, und weil keine Kräfte einander entgegenwirken, ſo bleibt auch noch nach dem Stoſſe die Summe

$$M.C + m.c$$

aber iezt ſezen beide Maſſen wiederum ihre Bewegung mit gemeinſchaftlicher Geſchwindigkeit fort; heißt dieſe $\mathfrak{C}$, ſo wird

$$(M+m).\mathfrak{C} = M.C + m.c$$

und $$\mathfrak{C} = \frac{M.C + m.c}{M+m}$$

Aufg. 2.

§. 27. Die Bewegung der beiden Maſſen M, m (fig. 1) unter den Umſtänden (§. 25) nach dem Stoße zu beſtimmen, woferne M und m elaſtiſch ſind.

Aufl. 1. Im Augenblick des Stoſſes bleibt das Bewegungsvermögen von M wie (§. 25) =

$$M.C - m.c$$

und die gemeinſchaftliche Geſchwindigkeit, mit der alſo auch die Maſſe m nach A getrieben wird, wäre alſo dieſem Augenblick des Stoſſes, ohne auf die Elaſticität Rückſicht zu nehmen,

$$\mathfrak{C} = \frac{M.C - m.c}{M+m}$$

2. E.

2. So würde alſo aus der Geſchw. C die $\mathfrak{C}$ (no. 1.) und was M an Geſchw. im erſten Augenblick des Stoſſes verlöhre, wäre

$$C - \mathfrak{C}$$

und das ihr entgehende Bewegungsvermögen

$$= M.(C - \mathfrak{C})$$

3. Es iſt alſo die Gewalt, mit der die Geſtalt von M im Augenblick des Stoſſes verändert wird, gleichfalls $= M.(C - \mathfrak{C})$; und da die Maſſe mit derſelben Kraft dieſe Geſtalt wieder herzuſtellen ſtrebt, inſoferne ſie vollkommen elaſtiſch iſt, ſo leidet ſie in ebendem Augenblick vermöge ihrer Elaſticität dieſelbe Verminderung ihres Bewegungsvermögens noch einmal, alſo im Ganzen eine Verminderung

$$= 2M.(C - \mathfrak{C})$$

und behält daher noch das Bewegungsvermögen

$$M.C - 2M.(C - \mathfrak{C})$$

nach ihrer anfänglichen Richtung, oder

$$2M.\mathfrak{C} - M.C = M.(2\mathfrak{C} - C)$$

4. Daſſelbe läßt ſich ebenſo von m ſagen.

Die Geſchwindigkeit γ, mit welcher die m im Augenblick des Stoſſes ihre Bewegung, ohne Rückſicht auf Elaſticitat fortſetzen müßte, wäre

$$\gamma = - \mathfrak{C} \text{ (no. 1.)}$$

5. Was ſie verlohren hätte, wäre

$$c - \gamma = c + \mathfrak{C}$$

oder die Verminderung ihres Bewegungsvermögens nach AB

$$= m.(c + \mathfrak{C})$$

6. Wegen der Elaſticität wird daher die Verminderung nach AB

$$= 2m.(c+\mathfrak{C})$$

und ſie bleibt noch nach AB

$$= m.c - 2m.(c+\mathfrak{C})$$
$$= -m.c - 2m.\mathfrak{C}$$
$$= -m.(2\mathfrak{C}+c)$$

7. Die Geſchwindigkeit, mit welcher m zurückſpringt, iſt alſo $2\mathfrak{C}+c$. Die M ſetzt ihre Bewegung nach BA fort, woferne $2\mathfrak{C} > C$ iſt, aber nur mit einer Geſchwindigkeit $= 2\mathfrak{C} - C$, die $< 2\mathfrak{C}+c$ alſo kleiner als die Geſchw. iſt, mit der die m nach BA zurückſpringt. Iſt aber $2\mathfrak{C} < C$, ſo ſpringt die M gleichfalls zurück.

Demnach hat iede der beiden Maſſen nach dem Stoſſe ihre eigene Bewegung.

8. Iſt alſo die Geſchwindigkeit nach BA von M nach dem Stoſſe $\mathfrak{G}$, von m aber g, ſo iſt (no. 3)

$$M.\mathfrak{G} = M.(2\mathfrak{C} - C)$$

oder (no. 1)

$$\mathfrak{G} = \frac{2M.C - 2m.c}{M+m} - C \text{ oder}$$

$$\mathfrak{G} = \frac{(M-m).C - 2m.c}{M+m}$$

und (no. 6) nach BA genommen

$$m.g = m.(2\mathfrak{C}+c)$$

oder (no. 1)

$$g = \frac{2M.C - 2m.c}{M+m} + c$$

oder

oder $$g = \frac{(M - m).c + 2 M.C}{M + m}$$

Zuſ. 1.

§. 28. Für m = M wird

$$\mathfrak{G} = - c$$
$$g = + C$$

d. h. M ſpringt mit der Geſchwindigkeit c nach AB, und m mit der Geſchw. C nach BA zurück.

Zuſ. 2.

§. 29. Die Formeln für $\mathfrak{G}$ und g (§. 27.) gelten für alle mögliche Fälle, wenn man nur bemerkt, daß die Geſchw. von M nach A mit + C und die von m nach B mit + c bezeichnet worden iſt, daß alſo für andere Bewegungen nur die Zeichen von C und c gehörig verändert werden dürfen. Befindet ſich M oder m vor dem Stoſſe in Ruhe, ſo wird C oder c = o geſetzt. Iſt M oder m mit andern unbeweglichen Maſſen feſt verbunden, ſo darf man nur M oder m = ∞ ſetzen.

Zuſ. 3.

§. 30. Kommt die Eigenſchaft der Elaſticität den Maſſen nicht ganz zu; iſt z. B. die unvollkommene Elaſticität von M nur $\frac{\varepsilon}{N}$, und die von m nur $\frac{\varepsilon}{n}$ der vollkommenen, ſo iſt (§. 27. no. 3) die Verminderung des Bewegungsvermögens vom M beim Stoſſe

$$= M.(C - \mathfrak{C}) + \frac{\varepsilon}{N}.M.(C - \mathfrak{C})$$

$$= \frac{N + \varepsilon}{N} M.(C - \mathfrak{C})$$

und ihr Bewegungsvermögen nach der anfänglichen Richtung bleibt nach dem Stoſſe noch

$$M.C - \frac{N+\varepsilon}{N} M.(C-\mathfrak{C})$$

$$= \frac{N+\varepsilon}{N}.M\mathfrak{C} - \frac{\varepsilon}{N}.MC$$

$$= M.(\frac{N+\varepsilon}{N}.\mathfrak{C} - \frac{\varepsilon}{N}C)$$

Ebenſo bleibt (§. 27. no. 6) das Bewegungsvermögen von m nach AB nach dem Stoſſe noch

$$= - m.(\frac{n+\varepsilon}{n}.\mathfrak{C} + \frac{\varepsilon}{N}c)$$

Und ſo giebt ſich (§. 27. no. 8.) nach BA (fig. 1.)

$$\mathfrak{G} = \frac{N+\varepsilon}{N}.\frac{MC-mc}{M+m} - \frac{\varepsilon}{N}.C$$

$$= \frac{NMC - Nmc + \varepsilon MC - \varepsilon mc}{N.(M+m)}$$

$$- \frac{\varepsilon MC + \varepsilon mC}{N.(M+m)}$$

$$= \frac{NMC - Nmc - \varepsilon mc - \varepsilon mC}{N.(M+m)}$$

oder

$$\mathfrak{G} = \frac{MC - mc - \frac{\varepsilon}{N}.m.(C+c)}{M+m}$$

Eben-

Ebenſo die Geſchw. von m nach BA nach dem Stoſſe

$$g = \frac{n+\varepsilon}{n} \cdot \frac{MC-mc}{M+m} + \frac{\varepsilon}{n} \cdot c$$

$$= \frac{\frac{n+\varepsilon}{n} \cdot MC + (\frac{\varepsilon}{n}M - m) \cdot c}{M+m}$$

oder auch

$$g = \frac{MC - mc + \frac{\varepsilon}{N} M\,(C+c)}{M+m}$$

oder es iſt nach dem Stoſſe die Geſchwindigkeit der Maſſe m nach ihrer anfänglichen Richtung AB

$$= \frac{mc - MC - \frac{\varepsilon}{n} M.(C+c)}{M+m}$$

ſo wie die von M nach AB nach dem Stoſſe

$$= \frac{-MC + mc + \frac{\varepsilon}{N}.m.(C+c)}{M+m}$$

iſt.

Anm. 1. Die Bewegung nach dem Stoſſe iſt, für $\frac{\varepsilon}{N} = \frac{\varepsilon}{n} = 1$,

$$\text{von } M = \frac{m^2\,c - MmC - Mm\,(C+c)}{M+m}$$

$$\text{von } m = \frac{-MC + mc + Mm\,(C+c)}{M+m}$$

 und

und beider Summe $=$

$$\frac{m^2 - MmC - Mm(C+c) - M^2 C + Mmc + Mm(C+c)}{M+m}$$

$$= \frac{-(M+m).MC + (M+m).mc}{M+m}$$

wo ſich $-C$ auf die Geſchw. von M nach B bezieht; alſo iſt die erwähnte Summe, wenn unter C die Geſchw. von M nach A verſtanden wird (§. 29.),

$$= \frac{(M+m).MC + (M+m).mc}{M+m}$$

$= MC + mc$, d. i. ſo groß als vor dem Stoſſe.

Anm. 2. Die beiden letzten Formeln dieſes §. begreifen die ganze Lehre von der Aenderung der Bewegung verſchiedener Maſſen, die ſich in einer einzigen geraden Linie bewegen und in derſelben an einander ſtoſſen, in ſich, die Maſſen mögen wie man will beſchaffen ſeyn. Iſt M vollkommen elaſtiſch, m aber hart, ſo iſt $\frac{\varepsilon}{N} = 1$, $\frac{\varepsilon}{n} = 0$; iſt m vollkommen elaſtiſch, M aber hart, ſo iſt $\frac{\varepsilon}{n} = 1$, $\frac{\varepsilon}{N} = 0$; ſind beide vollkommen elaſtiſch, ſo iſt $\frac{\varepsilon}{N} = \frac{\varepsilon}{n} = 1$; ſind beide vollkommen hart, ſo iſt $\frac{\varepsilon}{N} = \frac{\varepsilon}{n} = 0$. Bewegungen der Maſſe m von A nach B (fig. 1.) geben beiahte Werthe von c; von B nach A zu verneinte. Bewegungen der Maſſe M von B nach A geben beiahte Werthe von C, von A nach B zu verneinte.

Wäre M oder m wegen der Befeſtigung mit andern unbeweglichen Maſſen unbeweglich, ſo ſetzt man M oder $m = \infty$.

Anm. 3. In der Natur findet man unter den feſten Körpern weder vollkommen harte, noch vollkommen elaſtiſche Maſ-

Maſſen. Daher fallen wenigſtens bei feſten Körpern die Werthe von $\frac{\varepsilon}{N}$ und $\frac{\varepsilon}{n}$ allemal zwiſchen o und 1.

Anm. 4. C ſey die gröſſere Geſchwindigkeit, und $\mathfrak{C}$ die Geſchw. nach dem Stoſſe, zwei harte Maſſen angenommen; ſo iſt der Unterſchied der Geſchwindigkeit vor und nach dem Stoſſe

für die Maſſe $M = C - \mathfrak{C}$

— — — $m = c + \mathfrak{C}$

Und $(C - \mathfrak{C})^2 . M + (c + \mathfrak{C})^2 . m = MC^2 + mc^2 + M . \mathfrak{C}^2 - 2M\mathfrak{C}C + m . \mathfrak{C}^2 + 2m\mathfrak{C}c$

Wenn man nun den Werth von $\mathfrak{C}$ verlangt, für welchen dieſe Summe ein Kleinſtes wird, ſo kommt es nur darauf an, in welchem Falle $M\mathfrak{C}^2 - 2M\mathfrak{C}C + m\mathfrak{C}^2 + 2m\mathfrak{C}c$ ein minimum wird? Die Differ. Rechnung giebt nun

$$M\mathfrak{C} - MC + m\mathfrak{C} + mc = 0$$

woraus man

$$\mathfrak{C} = \frac{MC - mc}{M + m}$$

erhält, (wie §. 25). Hr. v. Maupertuis nennt die Produkte aus den Quadraten der beim Stoſſe entſtandenen Geſchwindigkeitsänderungen in die zugehörigen Maſſen Wirkungen des Stoſſes. Man ſieht alſo, daß die neue Geſchwindigkeit (hier $\mathfrak{C}$), welche beim Stoſſe harter Maſſen erfolgt, gerade durch die kleinſtmögliche Summe von Wirkungen hervorgebracht wird. Daſſelbe findet man ebenſo für elaſtiſche Körper. Dieſer Satz vom Stoſſe heißt der Satz der kleinſten Wirkung.

Anm. 5. Quadrirt man die Geſchwindigkeiten vollkommen elaſtiſcher Körper nach dem Stoſſe, ſo findet man die Summe der Produkte aus dieſen Quadraten in die zugehörigen Maſſen $= MC^2 + mc^2$ alſo ebenſo groß als die Summe der Produkte aus den Maſſen in die Quadrate ihrer Geſchwindigkeiten vor dem Stoſſe. Dieſer Satz vom

Stoſſe heißt der Satz von Erhaltung der lebendigen Kräfte, von welchem Joh. Bernoulli zuerſt Gebrauch gemacht hat.

Drittes Kapitel.

Vom Gleichgewicht der Kräfte, die an Punkten einer Ebene angebracht ſind und deren Richtungslinien in dieſer Ebene ſelbſt liegen.

Erklärung 14.

§. 31. Unter einer feſten Ebene wird hier iede bewegliche willkührlich begränzte ebene Raumfläche verſtanden, deren einzele Punkte eine in Bezug auf die Gränzlinien der Ebene unverrückbare feſte Lage haben, und in welche ſonſt keine Kräfte wirken, als die hier iedesmal beſonders genennt werden.

Lehrſ. 3.

§. 32. AB (fig. 3.) ſey eine willkührliche feſte Ebene, ab eine in ihr willkührlich angenommene gerade Raumlinie; wird nun in irgend einem Punkt dieſer Linie m eine Kraft nach der Richtung ab angebracht, ſo macht dieſe Kraft völlig einerlei Eindruck auf die Ebene AB, man mag m wo man will in der ab nehmen.

Bew.

Bew. m mag wo man will in ab liegen; ſo läßt ſich der Kraft in m allemal eine andere ihr gleiche in derſelben Linie ab z. B. in n gerade entgegen ſetzen; da nun in dieſem Falle allemal ein Gleichgewicht erfolgen muß, ſo muß es für den Eindruck auf die Ebene gleichgültig ſeyn, wo m und n liegen.

Erklärung 15.

§. 33. Die gerade Linie, nach welcher man in einer von mehreren Kräften angegriffenen feſten Ebene eine neue Kraft anbringen müßte, um die Ebene im Gleichgewicht zu erhalten, heißt die **Linie des mittleren Drucks**; die erfoderliche Gröſſe dieſer Kraft heißt **der mittlere Druck**, auch **die mittlere Kraft**.

Lehrſ. 4.

§. 34. Wenn in zwei willkührlich angenommene Punkte m, n (fig. 3.) gleiche Kräfte p, o nach mp, no ſenkrecht auf die Linie mn in der Ebene AB wirken, nach cd aber ſenkrecht auf die Mitte von mn eine Kraft $d = p + o$ angebracht wird, ſo iſt die gerade Linie mn weder einer fortgehenden noch einer umdrehenden Bewegung fähig.

Bew. Aus demſelben Grunde, warum m nach p zu gedreht werden ſollte, müßte auch n nach o zu um c gedreht werden. Alſo iſt keine Umdrehungsbewegung möglich, und die Punkte der Linie nm müßten alſo, wenn kein Gleichgewicht mit der Kraft d ſtatt fände, den Richtungen der Kräfte no, mp parallel ſich fortbewegen. Iſt aber in c die Kraft $d = 2p$ nach der gerade entgegengeſetzten Richtung cd angebracht, ſo müßten zu gleicher Zeit alle Punkte der Linie

nie nm, in Richtungen die der cd gleichlaufend wären, ſich nach cd bewegen; alſo iſt auch keine fortgehende Bewegung möglich.

Aufg. 3.

§. 35. In den Punkten m, n der Ebene AB (fig. 4.) ſind verſchiedene Kräfte Q, P nach Richtungen mQ, nP, die auf die gerade nm ſenkrecht ſind, angebracht; man ſoll einen Punkt C in der mn angeben, in welchem eine ſenkrecht nach CR angebrachte Kraft $R = P + Q$ die ganze Ebene im Gleichgewicht erhält.

Aufl. Man drucke P und Q in Zahlen aus, die ſich auf einerlei Einheiten beziehen, und theile nun die mn in $\frac{1}{2}$ (P+Q) gleiche Theile.

Davon trage man $\frac{1}{2}$ P Theile aus n in x, und $\frac{1}{2}$ Q Theile aus m in x.

Jetzt mache man $nv = nx$, $mw = mx$, ſo enthält vw überhaupt P+Q gleiche Theile; nämlich

vx hat P gleiche Theile

wx — Q ebenſolche Theile.

Eine Kraft = 1 in iedem Theilungspunkt von vx angebracht bewirkt in n einen Druck $= P \times 1 = P$, und eine ebenſolche Kraft = 1 in iedem Theilungspunkt von wx angebracht bewirkt in m einen Druck $= Q \times 1 = Q$.

Es iſt alſo gleichgültig, ob in n die Kraft P, und in m die Q angebracht iſt, oder ob beide weggenommen und dafür in allen P+Q Theilungspunkten von v bis w gleiche Kräfte = 1 ſenkrecht auf vw angebracht werden.

Es

Es entſteht alſo ein Gleichgewicht, wenn in der Mitte C dieſer Linie vw eine Kraft $P+Q$ ſenkrecht nach CR angebracht wird (§. 34).

Nimmt man alſo $vC = wC$, ſo iſt C der geſuchte Punkt.

Demnach

$$vn + nc = \tfrac{1}{2} vw = \tfrac{1}{2} (P+Q)$$

Es iſt aber $vn = \tfrac{1}{2} P$, alſo

$$nc = \tfrac{1}{2} (P+Q) - \tfrac{1}{2} P = \tfrac{1}{2} Q$$

Ueberdas

$$nm = \tfrac{1}{2} P + \tfrac{1}{2} Q$$

und

$$mC = nm - nC = \tfrac{1}{2} P$$

Folglich für das Gleichgewicht der Ebene

$$\tfrac{1}{2} P : \tfrac{1}{2} Q = mC : nC$$

oder

$$P : Q = mC : nC$$

oder auch

$$P \times nC = Q \times mC$$

Auch hat man

$$(P+Q) : Q = (mC + nC) : nC$$
$$= mn : nC$$

alſo

$$nC = \frac{mn \times Q}{P+Q}$$

Ebenſo

$$mC = \frac{mn \times P}{P+Q}$$

Zuſ.

Zuſ. 1.

§. 36. Alſo wird die in C, m und n (fig. 4) auf die erwähnte Art von drei Kräften R, Q, P angegriffene Ebene im Gleichgewicht erhalten, wenn

$$Q = \frac{nC}{mC} . P$$

und

$$R = P + Q$$

genommen wird.

Sind alſo nC, mC ungleich, ſo ſind auch Q und P ungleich.

Wenn aber bei ungleichen Kräften P, Q ein Gleichgewicht ſtatt findet, ſo kann in einem ſolchen Falle das Gleichgewicht nicht mehr beſtehen, ſobald man ſtatt der einen Kraft P eine andere, die = Q wäre, ſubſtituiren wollte, folglich können gleiche Kräfte bei ungleichen Werthen von nC und mC nie ein Gleichgewicht bewirken, und ebendarum kann bei gleichen Kräften P, Q, auch nie ein Gleichgewicht beſtehen, wann mC und nC ungleich ſind. Demnach thut nicht nur der Punkt C (fig. 3 und 4) der Foderung des Gleichgewichts ein Genüge, ſondern er iſt auch der einzige, welcher dieſer Foderung ein Genüge thut.

Zuſ. 2.

§. 37. Demnach iſt CR (fig 4) die Linie des mittleren Drucks für die Kräfte P und Q, und wenn C der Punkt iſt, in welchem dieſe Linie die mn ſenkrecht ſchneidet, ſo iſt allemal

$$P . nC = Q . mC$$

woferne P und Q ſenkrecht an nm angebracht ſind.

Zuſ.

Zuſ. 3.

§. 38. Weil es für den Eindruck, den die Kraft R auf die Ebene macht, einerlei iſt, wo ſie in der Linie RCS angebracht wird, oder auch: weil die dem mittleren Druck entgegengeſetzte gleiche Kraft R dieſen Druck allemal auf einerlei Weiſe aufhebt, in welcher Stelle der Linie RS ſie angebracht werden mag, ſo behält der vorige Satz für fig. 4. auch noch ſeine Richtigkeit, wenn die Kraft R an irgend einem willkührlich angenommenen Punkte y in RS nach SR angebracht wird. Auch die Angriffspunkte der Kräften P und Q können in den Richtungslinien nP und mQ wo man will genommen werden, die Kräfte welche in den Stellen n, C, m einander im Gleichgewicht erhalten, bleiben auch dann noch im Gleichgewicht. Wirkt alſo (fig. 5) in a eine Kraft P nach aP, in b eine Q nach bQ der aP gleichlaufend, und in y eine Kraft $R = P + Q$ nach yR der aP gleichlaufend, ſo bleibt die Ebene im Gleichgewicht, wenn $nC \times P = mC \times Q$ iſt, oder (av und bw auf CR ſenkrecht gezogen) wenn

$$av \times P = bw \times Q$$

iſt.

Lehrſ. 5.

§. 39. A, B (fig. 6.) ſeyen Punkte in der Ebene M, welche von Kräften P, Q nach willkührlichen Richtungen AP, BQ angegriffen werden, die verlängert in D zuſammenſtoſſen; Cm, Cn ſeyen Perpendikel aus einem Punkte der geraden AB auf die Richtungslinien der Kräfte, ſo daß $P \times Cm = Q \times Cn$ ſey, ſo iſt DC die **Linie des mittleren Drucks.**

Bew.

Bew. 1. Die Ebene MN wird von einer Kraft P am Ende eines Halbmeſſers Cm auf einerlei Weiſe um den Punkt C gedreht, man mag von C aus welchen Halbmeſſer man will = Cm nehmen; nimmt man alſo Cv = Cm und läßt p = P in v ſenkrecht nach vp ziehen, ſo wird die Ebene ebenſo um C gedreht wie von P in m.

Es iſt aber p mit Q im Gleichgewicht, wenn $Cv \times p = Cn \times Q$, folglich auch P mit Q im Gleichgewicht, wenn $Cm \times P = Cn \times Q$ iſt.

2. Wenn alſo die AB in einem Punkte gehalten oder nach einer dem mittleren Druck entgegengeſetzten Richtung gedruckt werden ſoll, ſo daß die Ebene völlig ruhig bleibt, ſo muß dieſe entgegengeſetzte Kraft R in C angebracht werden, z. B. nach CE, deren Lage erſt noch beſtimmt werden ſoll.

3. Der Punkt D wird aber von beiden Kräften zugleich angegriffen; ſoll nun der hieraus in D entſtehende Druck dennoch mit dem Gleichgewicht beſtehen, ſo muß er der Kraft R gleich und entgegengeſetzt ſeyn, d. i. die Linie, nach welcher die beiden Kräfte gemeinſchaftlich D zu treiben ſtreben, muß in die EC fallen.

Da nun C und E allemal beſtimmte Punkte ſind, ſo erhellet, daß ſich die Richtung CE der Kraft R ergiebt, wenn man die gerade CD zieht, oder daß CD die Linie des mittleren Drucks iſt.

Zuſ. 1.

§. 40. Wenn alſo (fig. 6) Kräfte P, Q in Punkten A, B unter Winkeln α, β angreifen, und C

der

der Mittelpunkt des Drucks in der geraden AB iſt, ſo iſt für das Gleichgewicht

$$P.AC.\sin\alpha = Q.BC.\sin\beta$$

oder

$$P.\sin\alpha : Q.\sin\beta = BC : AC$$

daher auch wie (§. 35)

$$AC = \frac{AB.Q.\sin\beta}{P.\sin\alpha + Q.\sin\beta}$$

Zuſ. 2.

§. 41. Wären A, B (fig. 7) die von P, Q, angegriffenen Punkte, und ſollte nun eine in der mn angebrachte Kraft R die Ebene im Gleichgewicht erhalten, ſo darf man nur a, b ſtatt A, B als die von P, Q angegriffenen Punkte betrachten und nun

$$ac = \frac{ab.Q.\sin\beta}{P.\sin\alpha + Q.\sin\beta}$$

nehmen, ſo iſt c der Punkt, in welchem die dritte Kraft R angebracht werden muß.

So giebt ſich auch C in AB, und dann iſt cC die Linie des mittleren Drucks, ohne daß man die Spitze des Dreiecks ſuchen darf.

Lehrſ. 6.

§. 42. Nimmt man von der Spitze D der verlängerten Richtungslinien QB, PA (fig. 8) auf dieſen Linien Db, Da ſo, daß

$$Db : Da = Q : P$$

wird, und verzeichnet das Parallelogramm aDbo, ſo iſt Do die Linie des mittleren Drucks **ſowohl der Lage als der Gröſſe nach.**

Bew. I. Nach der Vorausſetzung iſt

$$ao : bo = Q : P$$

Zieht man nun on, om ſenkrecht auf DP, DQ, ſo iſt

$$\triangle\, aon \backsim \triangle\, bom$$

und

$$ao : on = bo : om$$

oder

$$ao : bo = on : om$$

daher auch

$$on : om = Q : P$$

und

$$on . P = om . Q$$

folglich Do die Linie des mittlern Drucks der Lage nach (§. 39.)

II. Man verlängere die oD nach E, und nehme an, DE ſey die Gröſſe des mittleren Drucks oder der ihr entgegengeſetzten gleichen Kraft R, ſo daß DE nach demſelben Maaßſtabe den Werth von R ausdrückt, nach welchem die Seiten Db, Da die Werthe von Q und P geben.

Nun verzeichne man noch das Parallelogramm EDbG und ziehe die Diagonale DG, ſo iſt dieſe vermöge (I.) die mittlere Richtung von Q und R, und da dieſe beiden Kräfte Q und R mit der P im Gleichgewicht ſeyn ſollen, ſo muß DG der DA gerade entgegengeſetzt, alſo ADG eine gerade Linie ſeyn. Weil nun Gb ſowohl der DE als der Do gleich iſt, ſo hat man auch Do = DE, alſo Db : Do = Q : R, d. h. wenn Q durch die Linie Db ausgedrückt wird, ſo wird R durch die Diag. Do ausgedruckt.

Erklärung 16.

§. 43. Wenn ein Punkt D (fig. 8.) von zweien Kräften P, Q nach verſchiedenen Richtungen DP, DQ angegriffen wird, die Kräfte mögen nun an dieſem Punkt unmittelbar oder an andern in ihren Richtungslinien DP, DQ wo man will angenommenen Punkten A, B angebracht ſeyn, ſo heiſſen ſolche **Seitenkräfte** in Bezug auf die **mittlere Kraft** R, welche in derſelben Ebene an D angebracht werden müßte, um die ganze Ebene im Gleichgewicht oder D ruhig zu erhalten.

Zuſ. 1.

§. 44. Aus den beiden Seitenkräften P, Q (fig. 8) ergiebt ſich, wenn man Q durch Db und P durch Da ausdruckt, die mittlere

$$Do = \sqrt{(ao^2 + Da^2 - 2\,ao.Da.\mathrm{Cos}\,Dao)}$$

(Trig. §. 26) oder, wenn man die mittlere R heißt

$$R = \sqrt{(Q^2 + P^2 + 2P.Q.\mathrm{Cos}\,PDQ)}$$

Dieſe Formel mit der

$$Ac = \frac{AB.Q.\mathrm{ſin}\,ABQ}{P.\mathrm{ſin}\,BAP + Q.\mathrm{ſin}\,ABQ} \quad (§. 41)$$

verbunden, wo A und B in DP und DQ willkührlich angenommen werden können, giebt Gröſſe und Richtung der mittleren Kraft.

Zuſ. 2.

§. 44*. Wäre in A (fig. 8*) eine Kraft P nach AP, in B eine Q nach BQ angebracht, deren Richtungslinien in D einander begegnen, ſo kann man auf der verlängerten AD die DE = P und auf der

DB die $DG = Q$ nehmen, aus welchen beiden nach Verzeichnung des Parallelogramms die mittlere DF entſteht, welche alſo die Lage und Gröſſe der Kraft R bezeichnet, mit welcher D nach DF getrieben wird; es muß alſo für den Fall des Gleichgewichts in der verlängerten FD, wo man will, eine Kraft R der DF gleich und entgegengeſetzt angebracht werden, z. B. in C, oder in m, oder in n wo man will. Man hat alſo in dieſem Falle die angebrachte $R = FD$ als die mittlere zu betrachten. Weil nun, für $Ca = CA$ und $Aav = aAP$, eine Kraft $o = P$ mit der P im Gleichgewicht iſt, und die $v = o$ den Punkt a in Ruhe erhält, ſo muß das Syſtem noch in Ruhe bleiben, wenn ſtatt der Kraft P in A die v in a nach av angebracht wird. Weil nun in dieſem Falle, wenn Cx auf av und Cy auf die verlängerte QB ſenkrecht iſt, $P.Cx = Q.Cy$ ſeyn muß, ſo muß auch $P.Cs = Q.Cy$ ſeyn, wenn Cs auf AP ſenkrecht gezogen wird, weil auf dieſe Weiſe $Cs = Cx$ wird.

Zuſ. 3.

§. 45. Weil die Kräfte P, Q, welche (fig. 9) in A und B nach DP, DQ wirken, unter ſich im Gleichgewicht ſind, woferne

$$P.AC.\sin\alpha = Q.BC.\sin\beta$$

iſt (§. 40 und 44*), ſo iſt aus gleichem Grunde, wenn man P wegnimmt und dafür die p in a anbringt, (a mag in der geraden Dp wo man will liegen), p mit Q im Gleichgewicht, woferne

$$p.aC.\sin\gamma = Q.BC.\sin\beta$$

bleibt, oder woferne

$$p = \frac{BC.\sin\beta}{aC.\sin\gamma}.Q = \frac{AC.\sin\alpha}{aC.\sin\gamma}.P$$

genom-

genommen wird, wo Zähler und Nenner Perpendikel aus irgend einem Punkte der Linie des mittleren Drucks oder der Richtungslinie der zum Gleichgewicht erfoderlichen mittleren Kraft auf die Richtungslinien der Seitenkräfte ausdrucken. So könnten alſo ſtatt mehrerer Kräfte P, P', P'' ꝛc. die auf der einen Seite von DA an Punkten A, A', A'' ꝛc. nach Richtungen angebracht wären, welche mit AC, $A'C$, $A''C$ ꝛc. die Winkel α, α', α'' ꝛc. machten, andere Kräfte p, p', p'' ꝛc. auf derſelben Seite von DF an einem einzigen Punkte a nach einer Richtung ap angebracht werden, die mit der aC einen beliebigen Winkel γ machte, woferne $(p + p' + p'' + \text{ꝛc.}) \,.\, aC \,.\, \sin\gamma$

$$= P.AC.\sin\alpha + P'.A'C.\sin\alpha' + P''.A''C.\sin\alpha' + \text{ꝛc.}$$

Sind alſo P, P', P'' ꝛc. zuſammen mit der Q im Gleichgewicht, ſo bleibt dieſes Gleichgewicht, wenn man ſtatt der verſchiedenen Kräfte P, P', P'', die in A, A', A'' angebracht ſind, eine einzige

$$V = p + p' + p'' = \frac{P.AC.\text{ſ}\alpha + P'.A'C.\sin\alpha' + P''A''C\text{ſ}\alpha''}{aC.\sin\gamma}$$

an der Ca in a unter dem Winkel γ anbringt.

Die Linie des mittleren Drucks bleibt dann umgeändert, aber die Gröſſe des mittleren Drucks ändert ſich bei dieſer Subſtituirung einer neuen Kraft ab, wie die Gleichung für R (§. 44) ergiebt.

Daher läßt ſich das Geſetz des Gleichgewichts, wovon in dieſem Kapitel die Rede iſt, allgemein ſo ausdrücken:

„Eine Kraft R, die in einem Syſteme von „Kräften, deren Richtungslinien alle in einer „einer einzigen Ebene liegen, vollkommenes

„Gleichgewicht bewirken ſoll, muß nach einer
„Linie wirken, gegen welche die übrigen Kräfte
„eine ſolche Lage haben, daß die Produkte aus
„den in Bezug auf dieſe Linie einander entge-
„genwirkenden Kräften in die auf ſie aus ei-
„nem gemeinſchaftlichen Punkt iener Linie ge-
„fällten Perpendikel gleiche Summen geben.

„Und wenn dieſe entgegengeſetzten Sum-
„men gleich groß ſind, ſo iſt allemal das ganze
„Syſtem im Gleichgewicht, woferne die nach
„iener Linie wirkende Kraft zugleich der Gröſſe
„des mittleren Drucks aller übrigen Kräfte
„gleich iſt.

Zuſ. 4.

§. 46. Da ſich allemal eine mittlere Kraft angeben läßt, die der gemeinſchaftlichen Wirkung aller in einerlei Ebene wirkenden Kräfte gleich und, nach der beſtimmbaren Linie des mittleren Drucks angebracht, mit iener gemeinſchaftlichen Wirkung in vollkommenem Gleichgewicht iſt, ſo läßt ſich auch umgekehrt iede an einem Punkte nach irgend einer Linie angebrachte Kraft in ſoviele andere als man will und nach welchen Richtungen man will, zerlegen, aus denen nämlich die gegebene als eine mittlere entſtehen müßte.

Jede Kraft läßt ſich nämlich der Richtung und Größe nach durch eine gerade Linie ausdrücken, und iede gerade Linie läßt ſich zur Diagonale von einem Parallelogramm machen, deſſen zwei Seiten welche man will ſeyn können, und die dann allemal als Seitenkräfte ſtatt der gegebenen angenommen werden können. Mit ieder ſolchen Seitenkraft läßt ſich immer wieder dieſelbe Zerlegung in zwei neue willkührliche Seitenkräfte vornehmen u. ſ. w.

Z. B. ab (fig. 10) ſtelle die Gröſſe und Lage einer gegebenen Kraft R vor, die den Punkt a nach ak angreift, ſo läßt ſich auf ab ein willkührliches Dreieck afb und hiernach das Parallelogramm afbc verzeichnen, ſo daß ac, af Seitenkräfte werden.

Statt der ac kann man wiederum die Seitenkräfte ae, ad; ſtatt der af die ag, ah nehmen.

Auf ſolche Weiſe iſt die R oder ab in die vier

ae, ad, ag, ah

zerlegt, welche zuſammen in a ſo wirken, wie die ab allein thun würde.

Anm. Auf dem Bisherigen beruht die ganze Lehre von der Zuſammenſetzung und der Zerlegung der Kräfte, die wichtigſte Lehre der ganzen Statik. Ihre Anwendung iſt beſonders bei Punkten wichtig, die in beſtimmten feſten Linien liegen, wovon im Folgenden geredet wird.

Lehrſ. 7.

§. 47. Wenn auf den Raumpunkt b (fig. 11) der materiellen Raumlinie AB, eine Kraft P in der geraden Pb wirkt, ſo kann der Punkt b kein anderes Beſtreben erhalten, ſich von der AB zu entfernen oder loszureiſſen, als nach der auf AB ſenkrechten Richtung bc.

Bew. Der Anfang der Bewegung kann nur im Fortrücken um einen Raumpunkt beſtehen, der Punkt b muß alſo das Beſtreben erhalten, um einen Raumpunkt fortzurücken. Es würde aber iedes Fortrücken um einen Raumpunkt, das nicht nach bc, d. h. ſenkrecht auf AB geſchähe, gar keine Entfernung von AB, alſo auch iedes Streben nach einer Rich-

tung, die nicht ſenkrecht auf AB wäre, gar kein Streben zur Entfernung von AB ſeyn.

Zuſ. 1.

§. 48. Wenn daher die Kraft P nach Pb einen phyſiſchen Punkt o an die feſte Linie AB andruckt, (fig. 11), ſo muß der Punkt b dem von der Kraft P angedruckten Punkt o einen hinlänglichen Widerſtand nach cb entgegenſetzen, damit der Punkt o den b nicht aus der AB treiben könne.

Druckt man nun P durch ab aus, zieht die ab ſenkrecht auf AB und verzeichnet das Parallelogramm bade, ſo iſt ad oder eb die Gröſſe des Drucks auf AB, dem Punkt o müßte nach cb eine Kraft = eb entgegen wirken, damit er nicht in die AB treten könnte. Aus den Kräften ab und eb entſteht die mittlere bd, die der AB gleichlaufend iſt. Wirkt nun in den Punkt o, der bA gleichlaufend, zugleich eine dritte Kraft = bd, ſo bleibt o nothwendig in Ruhe. So leidet alſo ein Punkt o von einer Kraft, deren Richtung und Gröſſe durch ab ausgedruckt wird, in dem Falle, wann o an einer beſtimmten materiellen Linie anliegt, allemal einen doppelten Eindruck, den einen ſenkrecht auf die beſtimmte Linie, und den andern parallel mit der Richtung ebendieſer Linie. Dieſe letztere Wirkung iſt dabei allemal eine nothwendige Folge von der Kraft ab und dem Widerſtande oder der Gegenwirkung eb. Wird alſo b verhindert nach bc fortzurücken, ſo kann dennoch Bewegung des Punkts o nach bB erfolgen, wenn nicht in o eine Kraft = bd der BA parallel entgegen wirkt.

Zuſ. 2.

§. 49. Allemal erhält hierbei im Fall der Ruhe der Punkt o das Beſtreben nach bf fortzurücken, welches der Kraft P gemäß iſt. Dieſes läßt ſich auch ſo einſehen:

1. Die ſenkrechte be = ad iſt = P. ſin α; zieht man en auf bf ſenkrecht, ſo entſteht aus ihr nach bf die bn = be. Coſ ebn = be. ſin Bbf = be. ſin α = P. ſin α^2.

2. Man ſetze, um den Punkt o in Ruhe zu erhalten, neben o einen feſten Punkt auf die Linie bB, der den o nach k fortzurücken verhindere, und zerlege die Wirkung nach bB oder die bk = bd gleichfalls in die kx, ſenkrecht auf bf und die bx, ſo iſt bk = bd = P. Coſ α, und bx = bk. Coſ Bbf = bk. Coſ α = P. Coſ α^2; alſo

die ganze Wirkung
nach bf = P. (ſin α^2 + Coſ α^2) = P

3. Hingegen iſt die Wirkung

ne = be. Coſ α = P. ſin α. Coſ α
xk = bk. ſin α = P. Coſ α. ſin α

alſo heben ſich dieſe beiden einander entgegengeſetzten Kräfte auf.

4. Sind alſo EB, DC (fig. 12) feſte Linien, ſenkrecht auf BC, und werden nun parallel mit EB ſoviele phyſiſche Punkte o durch die Kraft P an AB angedruckt, als in BC neben einander liegen könnten, ſo müßte ieder dieſer Punkte o, die nun nicht nach B ausweichen können, mit der ganzen Kraft P nach Pf fortzurücken ſtreben. Wenn alſo der geſammte Druck, den alle dieſe Punkte zuſammen auf BC ausüben wür-

den, wenn BA nicht da wäre, Q heißt, ſo wäre im erwähnten Falle die geſammte Preſſung auf AB nach Richtungen, die auf BC ſenkrecht wären, gleichfalls $= Q$.

5. Wäre von o nach B nichts vorhanden, das den Punkten o in ihrer Bewegung hinderlich wäre, ſo wäre der geſammte Druck aller Punkte o auf AB nach $Pf = Q . \sin \alpha^2$

6. Wären Hinderniſſe vorhanden, welche der Bewegung der Punkte o nach BC zwar entgegen, doch aber nicht groß genug wären, ſie ganz aufzuheben, ſo kann man dieſe Hinderniß für jeden Punkt o nach $Bo = \frac{1}{n} P . \mathrm{Cof}\, \alpha$ ſetzen, alſo (no. 2) $bk = \frac{1}{n} P . \mathrm{Cof}\, \alpha$, und $bx = \frac{1}{n} P . \mathrm{Cof}\, \alpha^2$, alſo die Wirkung nach bf für jeden Punkt o

$$= P . \sin \alpha^2 + \frac{1}{n} P . \mathrm{Cof}\, \alpha^2$$

alſo für alle Punkte o zuſammengenommen

$$= Q . (\sin \alpha^2 + \frac{1}{n} . \mathrm{Cof}\, \alpha^2)$$

Für die Ausübung iſt dieſe letzte Formel vorzüglich wichtig.

Aufg. 4.

§. 50. AC (fig. 13) ſey die Hypothenuſe eines rechtwinklichten Dreiecks ABC; M ſey eine feſte Ebene, die in o von einer Kraft P nach der mN ſenkrecht auf AB angegriffen wird; man ſoll die verſchie-

ſchiedenen Wirkungen von P in Bezug auf das Dreieck ABC beſtimmen.

Aufl. 1. Druckt man die P durch die ov aus, wo v der Punkt iſt, in welchem die AC von der oN durchſchnitten wird, und zieht nun om auf die AC ſenkrecht, ſo giebt om die auf AC ſenkrechte, mv = on die der CA parallele Wirkung (§. 49). Iſt alſo ovm = α, ſo iſt

$$\text{der ſenkrechte Druck om} = P.\sin\alpha$$
$$= P.\sin AvN = P.\text{Cof}\,\beta$$
$$\text{der parallele on} = \text{vm} = P.\text{Cof}\,\alpha$$
$$= P.\sin\beta$$

2. Iſt nun bei x nicht noch eine beſondere Hinderniß angebracht, welche dem Eindruck nach on entgegengeſetzt iſt, ſo muß die Ebene M ſich nach dieſer Richtung vermöge der Kraft $P.\sin\beta$ wirklich fortbewegen.

3. In dieſem Falle iſt alſo, während der Bewegung der Druck der Ebene M auf das Dreieck nach der auf AB ſenkrechten Richtung = $P.\sin\alpha^2$ (§. 49. no. 5) = $P.\text{Cof}\,\beta^2$.

4. Wäre bei x eine Hinderniß angebracht, oder die Ebene M durch eine der on entgegengeſetzte Kraft gehalten, ſo bliebe der Druck nach oN = P (§. 49. no. 2).

Aufg. 5.

§. 51. Es ſey alles wie im vor. §, von o ſoll nach oz unter einem willkührlichen Winkel opA = p eine Kraft S die Ebene M ruhig erhalten; man ſoll die Grösse von S, ingleichem den auf AC

ſenk-

ſenkrechten Druck Q beſtimmen, welchen die AC im Falle des Gleichgewichts leiden wird.

Aufl. Die von willkührlicher Länge der AC parallel gezogene oy drücke die Kraft aus, mit welcher der Punkt o der CA gleichlaufend fortzurücken ſtrebt; zieht man nun yv auf oy ſenkrecht, und verzeichnet das Rektangel oyvq, ſo druckt ov die mittlere der beiden Seitenkräften qv (= oy) und yv aus, wovon erſtere die Bewegung des Punktes o verhindert, und letztere den auf AC ſenkrecht entſtehenden Druck bezeichnet, der durch den Widerſtand der feſten Linie AC aufgehoben wird.

Hier iſt nun $S.\mathrm{Coſ}\,ovq = vq = P.\mathrm{ſin}\,\beta$ alſo

$$S = \frac{P.\mathrm{ſin}\,\beta}{\mathrm{Coſ}\,p}$$

Der von S herrührende ſenkrechte Druck auf CA iſt $oq = vq.\mathrm{tang}\,p = P.\mathrm{ſin}\,\beta.\mathrm{tang}\,p$. Aber M übte für ſich ſchon den Druck $P.\mathrm{Coſ}\,\beta$ ſenkrecht auf AC aus (§. 50. no. 1), alſo iſt

$$Q = P.\mathrm{Coſ}\,\beta + P.\mathrm{ſin}\,\beta.\mathrm{tang}\,p$$

oder auch $Q = P.\mathrm{Coſ}\,\beta + S.\mathrm{ſin}\,p$

Zuſ. 1.

§. 52. Wenn die oz der AB gleichlaufend, alſo $p = \beta$ iſt, ſo wird

$$S = \frac{P.\mathrm{ſin}\,\beta}{\mathrm{Coſ}\,\beta} = P.\mathrm{tang}\,\beta$$

und

$$Q = P.\mathrm{Coſ}\,\beta + S.\mathrm{ſin}\,\beta$$

Anm.

Anm. Für $p = 90°$, oder wenn M, durch eine Kraft S nach der Richtung oq, ruhig erhalten werden ſoll, wird

$$S = \frac{P . \sin \beta}{o} = \infty$$

Die Bedeutung iſt nicht, daß die Ebene M ein unendlich groſſes Beſtreben nach qo hätte und deßhalb durch eine entgegengeſetzte $S = \infty$ nach oq gedrückt werden müßte, um in Ruhe erhalten zu werden. Es wird damit nur angezeigt, daß von einer nach oq wirkenden Kraft S gar kein Theil nach oy wirkt, daß alſo gar nichts vorhanden wäre, was die Bewegung nach on verhindern könnte. Die Wirkung nach oy, welche aus S entſteht, iſt $= S . \operatorname{Cos} p$ alſo, für $p = 90°$, $= o$. Und ſo folgt überhaupt aus der Gleichung

$$S = \frac{P \sin \beta}{\operatorname{Cos} p}$$

keineswegs, daß die Ebene M nach zo ein Beſtreben habe, das $= \frac{P . \sin \beta}{\operatorname{Cos} p}$ ſey. Die Kraft S muß darum ſo groß ſeyn, weil ſie nicht ganz angewendet wird, der Bewegung von M entgegen zu wirken, ſondern ein Theil davon bloß beſtimmt iſt, die Ebene M nach oq an die AC anzudrucken; die zur Verhinderung der Bewegung (die nur nach yo erfolgen kann) beſtimmte Wirkung iſt nur ein Theil von S, nämlich $= S . \operatorname{Cos} p$ und dieſe muß dem wirklichen mit BA parallelen Beſtreben $P . \sin \beta$ gleich ſeyn.

Zuſ. 2.

§. 53. Iſt der ſenkrechte Druck, welchen die Kraft P (§. 50) verurſacht, d. i. der Druck $P . \operatorname{Cos} \beta$ von der Art, daß mit ihm zugleich eine der Bewegung nach on entgegengeſetzte Hinderniß $= \mu . P . \operatorname{Cos} \beta$ entſteht, ſo bleibt der Trieb nach on (§. 50) nur noch $= P . \sin \beta - \mu . P . \operatorname{Cos} \beta$.

Zieht

Zieht die Kraft S nach oz, ſo entſteht daraus der ſenkrechte nach oq

$$= P . Coſ \beta + S . ſin p$$

und hieraus eine Hinderniß der Bewegung nach on =

$$\mu . (P . Coſ \beta + S . ſin p)$$

Soll alſo die entſtehende Wirkung nach oy, d. i. S. Coſ p gerade groß genug ſeyn, um M ruhig zu erhalten, ſo muß

$$S . Coſ p = P . ſin \beta - \mu . (P . Coſ \beta + S . ſin p)$$

ſeyn. Daraus folgt

$$S = \frac{P . (ſin \beta - \mu . Coſ \beta)}{Coſ p + \mu . ſin p}$$

Iſt die vom ſenkrechten Druck herrührende Hinderniß auf gleiche Weiſe der Bewegung nach oy entgegen, und ſoll S zugleich dieſe Hinderniß nach oy gerade aufheben, ſo wird

$$S . Coſ p = P . ſin \beta + \mu . (P . Coſ \beta + S . ſin p)$$

daher für dieſen Fall

$$S = \frac{P . (ſin \beta + \mu . Coſ \beta)}{Coſ p - \mu . ſin p}$$

d. h. Wirkliche Bewegung nach on erfordert

$$S < \frac{P . (ſin \beta - \mu . Coſ \beta)}{Coſ p + \mu . ſin p}$$

und wirkliche Bewegung nach oy

$$S > \frac{P . (ſin \beta + \mu . Coſ \beta)}{Coſ p - \mu . ſin p}$$

Zuſ.

Zuſ. 3.

§. 54. Wirkten in alle Punkte der materiellen Ebene M (fig. 14) Kräfte in Richtungen, die der Seite CB des rechtwinklichten Dreiecks ABC gleichlaufend wären, ſo kann man durch einen willkührlich angenommenen Punkt o in der Ebene M eine gerade ab der AB gleichlaufend ziehen, und nun kann man ſich ſtatt der Summe von Kräften, welche in ieder geraden auf AB ſenkrechten Linie in der Ebene M wirken, allemal eine einzige Kraft in dem Punkte denken, wo eine ſolche auf AB ſenkrechte Reihe von angegriffenen Punkten die ab durchſchneidet, woferne dieſe einzige iener Summe gleich iſt. So laſſen ſich alſo alle Kräfte, die in die Ebene M wirken, ſo anſehen, als wären ſie in Punkten der geraden de neben einander ſenkrecht auf AB angebracht. Und da es allemal einen Punkt o giebt, durch welchen die Linie rs des mittleren Drucks durchgeht, ſo läßt ſich das Bisherige auch auf eine ſolche Ebene anwenden, indem der Erfolg nur derſelbe iſt, als wäre die Hauptſumme aller nach den einzelen Linien wirkenden partiellen Summen von Kräften in o beiſammen nach os angebracht.

Vier-

Viertes Kapitel.

Vom Gleichgewicht der Kräfte, die an Punkten nach Richtungen wirken, welche nicht in einer einzigen Ebene liegen.

Lehrſ. 7.

§. 55. Wenn an einem einzigen Punkt mehrere Kräfte nach Linien angebracht ſind, die nicht in einer einzigen Ebene liegen, ſo giebt es doch für ſie alle eine Linie des mittleren Drucks.

Bew. Man denke ſich die verſchiedenen Richtungslinien mit 1, 2, 3, 4 . . . . bezeichnet, ſo läßt ſich zuerſt für 1 und 2 eine mittlere I finden, dann zwiſchen I und 3 eine mittlere II, und nun wieder zwiſchen II und 4 eine mittlere III u. ſ. w. ſo daß man zuletzt die mittlere von allen erhält.

Zuſ. 1.

§. 56. Wenn hingegen in verſchiedenen Punkten einer oder verſchiedener Ebenen Kräfte nach Richtungen angreifen, die in verſchiedenen Ebenen liegen, ſo kann es nur zwiſchen 1 und 2 eine mittlere I, zwiſchen I und 3 eine mittlere II u. ſ. w. geben, woferne die beiden 1 und 2, I und 3 u. ſ. w. d. h. allemal ſolche zwei in eine einzige Ebene fallen.

Zuſ. 2.

§. 57. Weil ſich durch iedes Syſtem von Punkten parallele Flächen denken laſſen, in denen ſie alle liegen,

liegen, ſo kann man ſich iedes Syſtem parallel angegriffener Punkte als ein Syſtem paralleler Ebenen denken, die alle in einer gewiſſen Anzahl von Punkten nach parallelen Richtungen angegriffen werden. Für iede einzele Ebene läßt ſich nun wie für die M (fig. 14. §. 54) die Linie des mittleren Drucks rs finden; und da alle dieſe Linien rs, die in den verſchiedenen Ebenen liegen, unter einander parallel ſind, ſo giebt es für die 1te und 2te eine mittlere I, zwiſchen I und 3 wieder eine mittlere u. ſ. w. Alſo giebt es für das ganze Syſtem eine mittlere Linie des Drucks, die in einer Ebene liegt, welche mit den übrigen Ebenen des Syſtems gleichlaufend iſt.

Erklärung 17.

§. 58. **Eine Ebene, in der die Linie des mittleren Drucks liegt, heißt eine Ebene des mittleren Drucks oder Druckebene.**

Zuſ. 1.

§. 59. Für iedes Syſtem parallel angegriffener Punkte giebt es alſo bei einer beſtimmten Lage des Syſtems unzählich viele Ebenen des mittleren Drucks. Wird nur eine dieſer Ebenen unterſtützt, ſo iſt das Syſtem gegen den Umſturz geſchützt. Soll es aber auch gegen fortrückende Bewegung geſchützt ſeyn, ſo müſſen alle ſolche Druckebenen in Linien, die auf die Richtungen der Kräfte ſenkrecht ſind, unterſtützt ſeyn (§. 50), woferne nicht beſondere Hinderniſſe dieſem Fortrücken entgegengeſetzt ſind.

Zuſ. 2.

§. 60. Die Linie des mittleren Drucks liegt allemal im Durchſchnitte zweier Druckebenen, daher ſich ſolche durch Verſuche finden läßt.

Erklärung 18.

§. 61. Wenn ein Syſtem von Punkten A, B, C, D ꝛc. die wie man will liegen mögen, von Kräften P, Q, R, S nach parallelen Richtungen AP, BQ, CR, DS angegriffen werden, für welche die Linie des mittleren Drucks in vx fällt; und wenn nun m ein Punkt in dieſer Linie iſt, durch welchen allemal die Linie des mittleren Drucks durchgeht, z. B. die 1, 1 oder die 2, 2, oder die 3, 3 u. ſ. w. ſobald die Richtungen der Kräfte ſo abgeändert werden, daß ſie allemal der 1, 1 oder der 2, 2 oder der 3, 3 u. ſ. w. parallel ſind, ſo heißt m der Mittelpunkt des Drucks für dieſes Syſtem.

Lehrſ. 8.

§. 62. Für iedes Syſtem angegriffener Punkte giebt es einen Mittelpunkt des Drucks.

Bew. A, B (fig. 16) ſeyen zwei Punkte, in welche Kräfte P, Q in parallelen Richtungen AP, BQ wirken, a liege in der geraden AB ſo, daß, ad und ae auf AP und BP ſenkrecht gezogen,

$$ad . P = ae . Q \quad (\S. 38)$$

iſt, ſo iſt bc, den Richtungen AP und BQ durch a parallel gezogen, eine Linie des mittleren Drucks.

Nun ſeyen EG, FH zwei andere durch A, B gezogene Parallellinien, und nun ſollen P, Q an A nach AE, an B nach BF wirken; av ſey auf EG, ax auf FH ſenkrecht, ſo iſt

$$av : aA = ax : aB$$
$$aA : ad = aB : ae$$

alſo

$$av : ad = ax : ae$$

oder

oder

$$av : ax = ad : ae = Q : P$$

Folglich auch

$$av . P = ax . Q$$

daher die durch a parallel mit AE, BF gezogene yz gleichfalls eine Linie des mittleren Drucks (§. 38).

Demnach iſt iede durch a gezogene gerade Linie eine Linie des mittleren Drucks, und a der Mittelpunkt des Drucks von A und B.

Wäre nun im erſten Fall noch ein dritter Punkt C vorhanden, woran die R nach CR den AP, BQ gleichlaufend angebracht wäre, ſo verhielte ſich die Sache wieder wie vorhin bei einem Paare paralleler Kräfte, denn man könnte ſtatt der beiden P, Q in A, B iezt eine einzige S = P + Q in a nach bc anbringen, die daſſelbe thäte, und für S und R gäbe es nun wie vorhin in der geraden aC wiederum einen Mittelpunkt des Drucks, welches nun der Mittelpunkt des Drucks für P, Q und R wäre.

So giebt es alſo einen Mittelpunkt des Drucks für iede Anzahl von Punkten, in welche Kräfte nach parallelen Richtungen wirken.

Zuſ.

§. 63. Der Mittelpunkt des Drucks paralleler Kräfte, die in ein Syſtem wirken, liegt alſo allemal da, wo zwei Linien des mittleren Drucks einander durchſchneiden. Daher läßt ſich der Mittelpunkt des Drucks auch durch Verſuche finden.

Fünftes Kapitel.

Vom Gleichgewicht eines Syſtems von Punkten, in welche die Schwere wirkt, und vom Schwerpunkte.

Erklärung 19.

§. 64. Eine ſchwere Linie heißt hier eine feſte Raumlinie, die in allen ihren Raumpunkten von der Schwere angegriffen wird; ebenſo eine ſchwere Ebene, eine feſte ebene Raumfläche, die in allen ihren Raumpunkten den Eindrücken der Schwere unterworfen iſt. Der Mittelpunkt des bloß von den Eindrücken der Schwere herrührenden Drucks heißt der Schwerpunkt; iede gerade Linie, in welcher der Schwerpunkt liegt, eine Schwerlinie, und iede Ebene, in welcher der Schwerpunkt liegt, eine Schwerebene.

Aufg. 6.

§. 65. Den Schwerpunkt eines ſchweren Dreiecks ABC (fig. 17) zu finden.

Aufl. 1. Der Schwerpunkt der Raumlinie BC liegt offenbar in der Mitte D; daſſelbe gilt von allen der BC parallel liegenden Raumlinien, welche die ganze Raumebene ABC bilden; alſo geht die gerade AD, welche alle dieſe Parallelen in zwei gleiche Theile theilt, durch die Schwerpunkte aller dieſer neben einander liegenden Raumlinien; ſie iſt daher eine Schwerlinie. Ebenſo iſt, wenn AE = BE genommen wird, CE eine Schwerlinie, folglich beider

Durch-

Durchſchnitt o der Schwerpunkt (§. 63), der ſich alſo leicht durch Verzeichnung finden läßt.

2. Die Berechnung giebt ihn ſo:

Weil BE : BA = BD : BC = 1 : 2, ſo iſt ED der AC gleichlaufend.

Daher $\triangle$ DoE $\backsim$ $\triangle$ AoC, und nun

$$Eo : oC = DE : AC = 1 : 2$$

folglich $$Co = \tfrac{2}{3} CE.$$

Aus gleichem Grunde auch

$$Ao = \tfrac{2}{3} AD$$

Zuſ. 1.

§. 66. Hieraus ergiebt ſich der Schwerpunkt eines ieden ſchweren Vielecks wie ABCDEF (fig. 18), indem man ſolches durch Diagonalen BF, CF, CE in Dreiecke zerlegt, deren Grundlinien BF, FC, FE und CE in den Punkten m, n, o und p in zwei gleiche Theile getheilt werden, da man dann Aa = $\tfrac{2}{3}$ Am, Bb = $\tfrac{2}{3}$ Bn, Cc = $\tfrac{2}{3}$ Co und Dd = $\tfrac{2}{3}$ Dp nimmt. So erhält man der einzelen Dreiecke Schwerpunkte a, b, c und d.

Die Schwere wirkt alſo in das Vieleck ebenſo, als wären bloß in a, b, c und d die Gewichte der zugehörigen Dreiecke angebracht, die ich durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ ausdrücken will.

Für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erhält man nun den gemeinſchaftlichen Schwerpunkt α, indem man (§. 35)

$$a\alpha = \frac{ab \cdot \mathfrak{B}}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}} \text{ nimmt.}$$

Nimmt man ebenſo auf der αc

$$\text{die } \alpha v = \frac{\alpha c . \mathfrak{C}}{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})+\mathfrak{C}}$$

und nun auf der vd

$$\text{die } vx = \frac{vd . \mathfrak{D}}{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C})+\mathfrak{D}}$$

ſo iſt x der Schwerpunkt des ganzen Vielecks.

Zuſ. 2.

§. 67. Iſt ABCDEF (fig. 18) die eine Grundfläche eines ſchweren Prismas, ſo liegt gegenüber in der andern Grundfläche derſelbe Schwerpunkt x, und in der Mitte der geraden Linie xx der Schwerpunkt des ganzen Prismas.

Aufg. 7.

§. 68. Den Schwerpunkt eines Kreisabſchnittes zu beſtimmen, wenn bloß die ihn begränzende Bogenlinie, als Raumlinie betrachtet, die Eindrücke der Schwere leidet (fig. 19)

Aufl. C ſey der Mittelpunkt des Kreisbogens, BD die Sehne, aB = aD, CA eine gerade Linie durch C und a, ſo iſt AC (aus ebendem Grund wie AD §. 65) eine Schwerlinie, und der Schwerpunkt muß zwiſchen A und a liegen, z. B. in o.

Die Summe der Eindrücke in BAD ſey = P, auf der verlängerten AC ſey Cm = Co und nun in m ein Gewicht = P angebracht, und in C wirke der Schwere parallel eine Kraft Q nach CE, ſo muß nach der Vorausſetzung dieſes ganze Syſtem in Ruhe beharren.

rs ſey ein gerades Element des Bogens DAB, ſo iſt rv die Richtung der in rs wirkenden Schwere, alſo Cv . rs das Produkt aus der in rs wirkenden Kraft in die Entfernung vom Schwerpunkt C des ganzen Syſtems.

Aber $rs : rn = Cr : Cv$

alſo

$$Cr . rn = Cv . rs$$

Zu allen Elementen (wie rs) gehören ſolche kleine Dreiecke wie rns, wovon die Summe aller mit BD parallelen Seiten (wie rn) = der geraden BD iſt.

Es iſt alſo die Summe der Produkten aus allen in BAD wirkenden Kräften in ihre Entfernung von $C = Cr . BD = CA . BD$. Daher für das Gleichgewicht des ganzen Syſtems

$$CA . BD = Cm . P$$

oder, weil $BAD = P$ alſo $BD = \frac{BD}{BAD} . P$ iſt,

$$CA . \frac{BD}{BAD} . P = Cm . P$$

daher

$$\frac{BD . CA}{BAD} = Cm = Co$$

So iſt alſo der Schwerpunkt o beſtimmt.

Aufg. 8.

§. 69. Der Kreisausſchnitt DCBAD (fig. 19) ſey in allen ſeinen Punkten ſchwer; man ſoll ſeinen Schwerpunkt beſtimmen.

Aufl. Der Ausſchnitt iſt aus einer Menge ſolcher kleiner Dreiecke wie rCs zuſammengeſetzt; zieht man CG durch die Mitte der Grundlinie rs, und nimmt $Cz = \frac{2}{3} Cr$, ſo iſt z des elementariſchen Dreiecks Schwerpunkt (§. 65).

Beſchreibt man nun aus C mit Cz einen Bogen dzb, ſo fällt zwiſchen iedes Paar Linien wie Cr, Cs ein Stückchen des beſchriebenen Bogens dzb, das ſeinen Schwerpunkt gleichfalls in z hat.

Alſo haben der Kreisausſchnitt und der in allen Punkten als ſchwer angenommene Bogen bzd einerlei Schwerpunkt x, der ſich ergiebt, wenn man auf der CA

$$Cx = \frac{bd \,.\, Cz}{bzd} = \frac{bd \,.\, \frac{2}{3} CA}{bzd}$$

$$= \frac{2 \,.\, BD \,.\, CA}{3 \,.\, BAD}$$

nimmt.

Zuſ. 1.

§. 70. Die Fläche des Kreisabſchnittes (fig. 19) heiſſe A, die des Dreiecks DBC heiſſe D, ſo verhalten ſich die Summen der in A und D wirkenden Kräfte wie A und D. Iſt nun t der Schwerpunkt des Abſchnittes, y der des Dreiecks, ſo iſt der im vor. §. gefundene Punkt x der gemeinſchaftliche Schwerpunkt von beiden, alſo

$$xt \times A = xy \,.\, D$$

oder

$$(Ct - Cx.) \,.\, A = (Cx - Cy) \,.\, D$$

Alſo

Alſo

$$Ct = \frac{Cx - Cy).D}{A} + Cx$$

$$= \frac{Cx(A+D) - Cy.D}{A}$$

wo $Cx = \frac{2.BD.CA}{3.BAD}$ (§. 69) und $Cy = \frac{2}{3} Ca$ (§. 65) gegebene Gröſſen ſind. Hierdurch wird alſo der Schwerpunkt t des Kreisabſchnittes beſtimmt.

Zuſ. 2.

§. 71. Setzt man die ringförmige Fläche BDdb = M, den Ausſchnitt dCb = N, und iſt t der Schwerpunkt von M; y der von N, ſo erhält man ebenſo

$$Ct = \frac{Cx(M+N) - Cy.N}{M}$$

wo wiederum aus (§. 69)

$$Cx = \frac{2.BD.CA}{3.BAD}$$

und $$Cy = \frac{2.bd.Cb}{3.bzd}$$ iſt.

Aufg. 9.

§. 72. **Den Schwerpunkt einer ieden Pyramide zu finden.**

Aufl. I. Wenn die Grundfläche ABC ein Dreieck iſt (fig. 20).

Man nehme BE = EC und ziehe die DE, auf der man die En = $\frac{1}{3}$ DE nimmt; zieht man nun die

nA, ſo geht ſolche durch die Schwerpunkte aller in der Pyramide mit der Seitenfläche BDC parallel liegenden Dreiecke, welche die ganze Pyramide bilden. Alſo iſt nA eine Schwerlinie.

Aus gleichem Grunde iſt mD eine Schwerlinie, wenn man $Em = \frac{1}{3} EA$ nimmt. Beide nA und mD liegen in dem Dreieck AED, ſie durchſchneiden alſo einander in irgend einem Punkte o, und dieſer iſt der Schwerpunkt der Pyramide (§. 63).

Zieht man die gerade mn, ſo iſt

$$\triangle Emn \backsim \triangle EAD$$
$$\triangle mon \backsim \triangle DoA$$

daher

$$mo : oD = mn : AD = Em : EA = 1 : 3$$

(§. 65) und

$$mo : mD = mo : (mo + oD) = 1 : 4$$

Alſo

$$Do = \tfrac{3}{4} Dm$$

auch

$$Ao = \tfrac{3}{4} An$$

II. Wenn die Grundfläche eine geradlinigte Figur von mehr als 3 Seiten iſt.

In dieſem Falle kann die Grundfläche in Dreiecke zerlegt werden, zu welchen ebenſoviele Pyramiden gehören, die zuſammen die gegebene ausmachen.

Jede ſolche partielle Pyramide hat einen Schwerpunkt o und ihre Grundfläche einen Schwerpunkt m, ſo daß für iede $Do = \frac{3}{4} Dm$ iſt; es muß alſo die Ebene, in welcher alle Schwerpunkte o liegen, der parallel ſeyn, in welcher die m liegen, d. i. der Grundfläche, und es muß daher eine durch o der Grund-

fläche

fläche parallel gelegte Ebene eine Schwerebene der ganzen Pyramide ſeyn. Offenbar iſt aber eine von D durch den Schwerpunkt der Grundfläche gezogene gerade Linie eine Schwerlinie, weil ſolche durch die Schwerpunkte aller mit der Grundfläche parallelen Querſchnitte durchgeht; alſo muß der Schwerpunkt der ganzen Pyramide da liegen, wo die erwähnte Schwerlinie die vorher erwähnte Schwerebene ſchneidet; denkt man ſich dieſen Durchſchnittspunkt mit v, den Schwerpunkt der Grundfläche mit s bezeichnet, ſo muß, weil die Schwerebene der Grundfläche parallel durch o durchgeht,

$$Do : Dm = Dv : Ds$$

ſeyn, alſo auch

$$Dv : Ds = 3 : 4$$

oder $$Dv = \tfrac{3}{4} Ds$$

Anm. Derſelbe Satz gilt auch für Kegel.

Aufg. 10.

§. 73. EAD (fig. 21) ſey eine krumme Linie, AB ihre Axe für ſenkrechte Koordinaten wie AC, CD, ſo daß die verlängerte DC allemal CE = CD giebt; man ſoll aus der Gleichung für die krumme Linie den Schwerpunkt der ſchweren Ebene EAD beſtimmen.

Aufl. 1. Der Schwerpunkt muß in der Axe liegen; er ſey alſo m; man verlängere BA nach F und nehme auf der AF die An = Am.

Die Anzahl der Eindrücke, womit die Schwere in die Ebene EAD wirkt, heiſſe P, ſo iſt P die Summe aller Raumpunkte, d. h. der ganze Flächeninhalt von DAE, und wenn der Eindruck der Schwere in

in einen einzelen Raumpunkt ε heißt, ſo iſt $P.\varepsilon$ die Summe aller Eindrücke; wird nun in n ein Gewicht $= P.\varepsilon$ angebracht, und in A der Schwerkraft entgegen eine Kraft $R = 2P.\varepsilon$, ſo muß dieſes ganze Syſtem in Ruhe beharren.

2. Wenn die zu ieder Abſciſſe (wie AC) = x gehörige Ordinate (wie CD) durch y ausgedruckt wird, ſo iſt iede Raumlinie, wie DE, $= 2y$ und die Summe von Eindrücken der Schwere in iedes Element der Fläche iſt (Alg. §. 56) $= (2ydx).\varepsilon$; alſo, $dx = 1$ Raumpunkt verſtanden, das Produkt aus ieder ſolcher Summe von Eindrücken in die Entfernung des Elements von $A = x \times 2ydx.\varepsilon$, und die Summe dieſer Produkte für die Fläche von A bis DE

$$= 2\int \varepsilon xydx$$

Für das Gleichgewicht, mit $P.\varepsilon$ in n, hat man alſo

$$An.P.\varepsilon = 2\int \varepsilon xydx$$

und

$$An = Am = \frac{2.\int yxdx}{P}$$

oder

$$Am = \frac{\int yxdx}{\int ydx}$$

Für ſchiefwinklichte Koordinaten ſey $DCB = \alpha$, ſo wird

$$Am = \frac{\int y.(\sin\alpha).xdx}{\int (y.\sin\alpha)\,dx}$$

alſo wie vorhin

$$Am = \frac{\int yxdx}{\int ydx}$$

I. Ex.

I. Ex. AD (fig. 21) ſey eine gerade Linie, alſo DAE ein Dreieck, für welches allgemein $ax = y$ geſetzt werden kann, ſo iſt für iedes x,

$$Am = \frac{\int ax \, . \, xdy}{\int axdx} = \frac{\frac{1}{3}ax^3}{\frac{1}{2}ax^2}$$

$$= \frac{2}{3}x$$

alſo, für $x = AC$,

$$Am = \frac{2}{3}AC$$

wie §. 65.

II. Ex. AD ſey eine Parabel (höhere Geom. §. 19), ſo iſt $y^2 = bx$ (höh. Geom. §. 20), alſo

$$Am = \frac{\int b^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} \, . \, xdx}{\int b^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx} = \frac{\int x^{\frac{3}{2}}dx}{\int x^{\frac{1}{2}}dx}$$

$$= \frac{\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}}{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{5}x$$

Aufg. 11.

§. 74. DAE (fig. 21) ſey ein Durchſchnitt eines Sphäroids (höh. Geom. §. 16), in welchem die Axe AB liegt; man ſoll den Schwerpunkt m des Sphäroids finden.

Aufl. Das Element des Sphäroids iſt für iede Abſciſſe x, zu der im Durchſchnitt die ſenkrechte Ordinate y gehört, $= \pi y^2 dx$ (Alg. §. 59). Man er-

erhält daher, nur πy^2 ſtatt $2y$ geſchrieben, wie vorhin

$$Am = \frac{\int \pi y^2 xdx}{\int \pi y^2 dx} = \frac{\int y^2 xdx}{\int y^2 dx}$$

I. Ex. Das Sphäroid ſey ein ſenkrechter Kegel, deſſen Durchſchnitt ein gleichſchenklichtes Dreieck iſt, für welches $ax = y$ geſetzt werden kann, indem des Kegels Axe zugleich die Abſciſſenaxe iſt, ſo erhält man für iedes x

$$Am = \frac{\int a^2 x^2 . xdx}{\int a^2 x^2 dx} = \frac{a^2 . \frac{1}{4} x^4}{a^2 . \frac{1}{3} x^3}$$

$$= \frac{3}{4} x$$

wie (§. 72).

II. Ex. Das Sphäroid ſey ein paraboliſches, auf deſſen Axe die Abſciſſen mit den ſenkrechten Ordinaten genommen werden, ſo iſt (höh. Geom. §. 20) $y^2 = bx$, alſo

$$Am = \frac{\int bx . xdx}{\int bxdx} = \frac{\frac{1}{3} bx^3}{\frac{1}{2} bx^2}$$

$$= \frac{2}{3} x$$

III. Ex. Das Sphäroid ſey ein Kugelabſchnitt, ſo iſt, den Durchmeſſer der Kugel $= a$ geſetzt, $y^2 = ax - x^2$, alſo für iedes x

$$Am = \frac{\int (ax - x^2) . xdx}{\int (ax - x^2) dx}$$

$$= \frac{\int (ax^2 dx - x^3 dx)}{\int (axdx - x^2 dx)} = \frac{\frac{1}{3} ax^3 - \frac{1}{4} x^4}{\frac{1}{2} ax^2 - \frac{1}{3} x^3}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} ax - \frac{1}{4} x^2}{\frac{1}{2} a - \frac{1}{3} x}$$

wel-

welches ſich für die Halbkugel, d. i. für $x = \frac{1}{2}a$ in

$$Am = \frac{\frac{1}{6}a^2 - \frac{1}{16}a^2}{\frac{1}{3}a} = \frac{5}{16}a$$

verwandelt.

Anm. 1. Man ſieht hieraus, mit welcher Schnelligkeit die höhere Analyſis Reſultate liefert, die man ohne ſie zum Theil gar nicht finden würde. Inzwiſchen läßt ſich doch auch durch ſie der Schwerpunkt von Körpern nicht finden, deren Form von keinem beſtimmten Geſetze abhängt. Wenn wir auch dieſes Geſetz nicht kennen, ſo giebt es doch, wie aus der obigen Lehre erhellet, für iedes Syſtem von ſchweren Punkten, alſo für Körper von ieder Form einen Schwerpunkt.

Wenn wir übrigens gleich keine Körper haben, die in allen innerhalb ihrem äuſſeren Umfange liegenden Punkten ſchwer wären, wie bei den bisherigen Berechnungen in Bezug auf ſchwere Ebenen und ſchwere Körper angenommen worden iſt, ſo erhellet doch die unmittelbare Anwendbarkeit der ſo gefundenen Formeln auf unſere Körper, ſobald ſolche als gleichförmig dicht, d. h. als ſolche angenommen werden können, welche in ſehr kleinen gleichgroſſen aliquoten Theilen des ganzen Körperraums gleichviele ſchwere Raumpunkte enthalten, weil ſolche mit einem völlig dichten Körper einerlei Schwerpunkt haben. Von Metallen beſtimmter Art gilt dieſe Vorausſetzung in groſſer Genauigkeit, ſo auch vom Waſſer, Weingeiſt u. d. g. nicht ſo genau von den einzelen Holzarten. In völliger Schärfe mögte ſie wohl von keiner Art von Materien gelten.

Anm. 2. Aus dem Bisherigen erhellet auch, daß zwiſchen mehreren Körpern ein centraler Stoß (§. 24. Anm.) ſtatt findet, ſobald ſich ihre Schwerpunkte in einerlei geraden Linie bewegen und ihre Berührungspunkte beim Stoſſe in dieſelbe Linie fallen.

Erklärung 20.

§. 75. ABCD (fig. 22) ſey ein Rektangel mit horizontaler Grundlinie AB, BE ſey gleichfalls horizontal und auf die AB ſenkrecht, CE ein Perpendikel aus C auf die BE, ſo heißt hier ABCD eine ſchiefe Ebene, CBE ihr Neigungswinkel.

Aufg. 12.

§. 76. Auf der ſchiefen Ebene ABC (fig. 22) liegt ein ſchwerer Körper, man ſoll die Wirkungen der Schwere in denſelben beſtimmen.

Aufl. M ſey eine der Fläche BCE parallele Schwerebene des Körpers, o der Schwerpunkt, abc ein rechtwinklichtes Dreieck, das mit der M in einerlei Ebene liegt, ſo verhält ſich alles in Anſehung der Schwerebene M und des Dreiecks abc völlig ſo, wie (fig. 14. §. 54) in Anſehung der Ebene M auf dem Dreieck ABC, daher die dortigen Sätze ohne Aenderung auch hier angewendet werden.

Anm. Die Bewegung des Körpers, welche nach ca allemal erfolgen muß, wenn dem Beſtreben nach ca nicht beſondere Hinderniſſe entgegengeſetzt ſind, heißt ſein Fall auf einer ſchiefen Ebene. Es iſt alſo in dieſer Bedeutung unrichtig, daß ein Körper vor dem Fall ſicher ſey, ſobald ſein Schwerpunkt unterſtützt iſt.

Sechs-

Sechstes Kapitel.
Vom mathematiſchen Hebel.

Erklärung 21.

§. 77. Ein Syſtem von angegriffenen Punkten, die ſamt den Richtungslinien der an ihnen angebrachten Kräfte in einer feſten Ebene liegen, heißt ein mathematiſcher Hebel, wann im Falle einer entſtehenden Bewegung das ganze Syſtem ſich um einen gemeinſchaftlichen Punkt drehen muß. Dieſer gemeinſchaftliche Punkt heißt der Ruhepunkt oder auch Umdrehungspunkt (ſonſt auch Hypomochlium). Die geraden Linien vom Umdrehungspunkt bis zu den angegriffenen Punkten heiſſen Hebelärme. Liegen die Hebelärme in einer einzigen geraden Linie, ſo heißt der Hebel ein geradlinigter, in andern Fällen ein Winkelhebel oder gebrochener Hebel.

Ich nenne überdas einen mathematiſchen Hebel einen einfachen oder einen vielfachen, nachdem er nur zwei oder mehrere Aerme hat.

Wo vom Hebel ſchlechtweg die Rede iſt, wird allemal ein einfacher verſtanden.

Erklärung 22.

§. 78. Der geradlinigte mathematiſche Hebel heißt ein zweiſeitiger (*vectis heterodromus*) oder auch ein Hebel der erſten Art, wenn ſeine beiden Aerme auf verſchiedenen Seiten des Ruhepunktes liegen; ein einſeitiger (*vectis homodromus*) oder

auch ein Hebel der andern Art, wenn beide Hebelärme auf einer Seite des Ruhepunktes liegen.

Erklärung 23.

§. 79. Die Produkte aus den angebrachten Kräften in die Entfernungen des Ruhepunktes von ihren Richtungslinien heiſſen ſtatiſche Momente der Kräfte.

Lehrſ. 9.

§. 80. Sowohl am einſeitigen als am zweiſeitigen Hebel, er mag geradlinigt oder gebrochen ſeyn, ſind Kräfte P und Q im Gleichgewicht, wenn ihre ſtatiſchen Momente gleich groß ſind, d. i. wenn (fig. 23, 24, 25 u. 26)

$$P.Ca = Q.Cb$$

iſt.

Bew. Allemal muß im Falle des Gleichgewichts der Ruhepunkt C einen gewiſſen Druck R nach irgend einer Richtung Cr aushalten, alſo dieſer Punkt nach der entgegengeſetzten CR widerſtehen; daher das Gleichgewicht fortbeſtehen muß, wenn in C eine Kraft = R nach CR angebracht wird.

Dieſe in C zum Gleichgewicht erfoderliche Kraft iſt allemal die mittlere von P und Q und der Satz iſt für dieſen Fall ſchon (§. 40 und 44*) erwieſen.

Anm. Man ſieht, daß die Lehre vom Hebel nur einen beſonderen Fall der Lehre von der Zuſammenſetzung der Kräfte betrifft, wo nämlich ſtatt der einen Kraft, die mit allen übrigen im Gleichgewicht iſt, ein unverrückbarer Punkt angenommen wird, der durch irgend eine Kraft ſeine Stelle zu verlaſſen verhindert wird.

Nicht

Nicht nur beim zweiſeitigen Hebel (fig. 24), ſondern auch beim einſeitigen (fig. 25) muß nach (§. 44*) der unverrückbare Punkt C in der Linie des mittleren Drucks liegen. Die Lehre vom Hebel erfodert alſo nach Vorausſendung des 3ten Kapitels keine beſondere Theorie, ſie iſt nur Anwendung der dortigen allgemeineren Lehren, die in der That folgenden allgemeinen Satz in ſich ſchlieſſen.

Carteſiſcher Grundſatz.

§. 80 a. Wenn Kräfte P, Q an verſchiedenen Punkten p, q, von welchen keiner ohne den andern in Bewegung gerathen kann, ſo angebracht werden, daß iede die Bewegnng der andern zu verhindern ſtrebt, ſo erhalten ſie einander im Gleichgewicht, wenn ſie ſich verkehrt wie die Wege verhalten, welche die von ihnen angegriffenen Punkte im Falle einer entſtehenden Bewegung gleichzeitig durchlaufen müßten.

Und hiermit iſt wiederum der folgende ganz einerlei.

Grundſatz von den virtuellen Geſchwindigkeiten.

§. 80 b. Entgegengeſetzte Kräfte erhalten einander im Gleichgewicht, wenn ſie ſich umgekehrt wie die Geſchwindigkeiten verhalten, mit welchen die von ihnen angegriffenen Punkte gleichzeitige Bewegung anfangen würden, oder wenn die Produkte aus den Kräften in ihre gleichzeitige Anfangsgeſchwindigkeiten gleich groß ſeyn würden.

Anm. Es verſteht ſich, daß nur von Wegen (§. 80 a) oder von Geſchwindigkeiten (§. 80 b) nach denienigen Richtungen die Rede ſeyn kann, nach welchen die Kräfte wirken. Uebrigens läßt ſich die Wahrheit des Carteſiſchen Princips oder des ihm gleichgültigen von den virtuellen

Geſchwindigkeiten auch aus der Natur der Sache ſelbſt ohne iene ſpeciellere Beweiſe des 3ten Kap. herleiten.

Wenn auf einen Punkt eine zehenfache Kraft wirkt, die in einem gewiſſen Zeittheilchen die kleinſtmögliche Ortsänderung des angegriffenen Punktes bewirkt; und wenn während demſelben Zeittheilchen die einfache Kraft auf einen Punkt, der ſich ohne ienen nicht bewegen kann, ſo wirkt, daß letzterer zehen kleinſtmögliche Ortsänderungen leidet, ſo leidet letzterer den einfachen Eindruck in dem ganzen Zeittheilchen zehenmal nach einander; erſterer leidet in demſelben Zeittheilchen den einfachen Eindruck zehenfach auf einmal, aber auch nur einmal. Wirkte in erſteren nur die einfache Kraft, ſo hätte die iezt da angebrachte Kraft das zehenfache Streben zur Bewegung, ſo wie der andere Punkt gleichfalls das zehenfache Beſtreben hat. Es kann alſo weder der eine noch der andere ſich bewegen.

Siebentes Kapitel.

Geſetze des freien Falles.

Lehrſ. 10.

§. 81. Ein Zeitelement oder untheilbarer Zeitpunkt iſt derienige Theil der Zeit, in welchem ein Körperelement um einen Raumpunkt fortrückt, und dieſer Theil der Zeit iſt unveränderlich.

Bew. Gäbe es noch einen Theil von einem zum Fortrücken durch einen Raumpunkt erfoderlichen Zeittheil, ſo müßte vor Verfluß des ganzen Zeittheils das Element um einen Theil des Raumpunktes fortrücken,

rücken, welches unmöglich iſt, weil der Raumpunkt ſelbſt keine Theile hat.

In dieſem untheilbaren Zeitpunkt iſt aber auch nur das Fortrücken durch einen einzigen Raumpunkt möglich, weil, woferne irgend ein Element mehr als einen Raumpunkt in einem Zeitpunkt durchlaufen ſollte, ſolches nur einen Theil ienes Zeitpunkts darauf verwendete, um durch einen Raumpunkt durchzukommen, welches wiederum wegen der erwieſenen Untheilbarkeit des Zeitpunktes unmöglich iſt.

Zuſ.

§. 82. Wenn alſo in gleichen Mengen von Zeitpunkten ungleiche Mengen von Raumpunkten, d. h. in gleichen Zeiten ungleiche Räume von verſchiedenen Elementen durchloffen werden, ſo können dieſe verſchiedene Elementen während ienen Zeiten nicht gleichviele Zeitpunkte hindurch in wirklicher Bewegung geweſen ſeyn. Demnach kann die Verſchiedenheit der Geſchwindigkeiten verſchiedener Elemente oder verſchiedener Körper bloß in der Verſchiedenheit der Menge von Zeitpunkten, welche ieder Körper wirklich auf Bewegung verwendet, ihren Grund haben. Jeder in Bewegung geſetzte Körper, der noch einer gröſſeren Geſchwindigkeit fähig wäre, muß alſo nothwendig, ſo groß auch ſeine Geſchwindigkeit ſeyn mag, ſich in einem abwechſelnden Zuſtande von Ruhe und Bewegung befinden, ſo daß ſeine Bewegung nie ſtetig iſt, ſondern uns nur um deßwillen ſtetig erſcheint, weil uns der kleine Zeittheil, in welchem der Körper ruhig bleibt, unbemerkbar verſchwindet oder ieder uns bemerkbare Zeittheil ſchon unzähliche ſolche Zeitpunkte in ſich ſchließt, welche auf wirkliche Fortrückungen verwendet werden. Ein Körper kommt aus einem

Punkte A in einen entfernten B mit ſtetiger Bewegung, wenn er in iedem Zeitpunkte, der während dieſer Bewegung verfloß, um einen Raumpunkt fortrückte. Mit dieſer ſtetigen Bewegung iſt alſo zugleich die gröſtmögliche Geſchwindigkeit verbunden, und es iſt für ſtetige Bewegung keine Verſchiedenheit von Geſchwindigkeit möglich.

Erklärung 24.

§. 83. Unter dem Fall eines Körpers verſteht man allgemein dieienige Bewegung deſſelben, wodurch er ſich einer unter ihm, d. h. dem Mittelpunkt der Erde näher liegenden horizontalen Ebene vermöge der Eindrücke der Schwere nähert, es mögen noch andere Kräfte mitwirken oder nicht. Wirken gar keine andere Kräfte auf den Körper, welche die Wirkung der Schwere verändern können, ſo heißt der Fall ein freier Fall, und die allgemeinen Beſtimmungen der Art, wie Zeit, Fallhöhe und Geſchwindigkeit von einander abhängen, machen die Geſetze des freien Falles ſchwerer Körper aus.

Erklärung 25.

§. 84. Wenn in einem gewiſſen Zeitpunkt ein Körper ſich ſelbſt überlaſſen wird, ſo daß nun die Schwere frei in ihn wirken kann, ſo können von dieſem Zeitpunkte an m — 1 Zeitpunkte erfoderlich ſeyn, bevor der Körper um einen Raumpunkt fortrückt, das dann im mten Zeitpunkt geſchieht; die Summe dieſer m Zeitpunkte nenne ich in der Folge allemal ein Zeittheilchen, das alſo mehrere und ſehr viele Zeitpunkte unter ſich begreifen kann. Auch für andere abſolute Kräfte behalte ich dieſen Begriff von einem Zeitttheilchen bei, da dann m nur andere Werthe hätte.

Aufg.

Aufg. 13.

§. 85. Aus der Vorausſetzung des Geſetzes der Trägheit (§. 10) und daß die Schwere eine unveränderliche abſolute Kraft ſey, die Geſetze des freien Falles ſchwerer Körper herzuleiten.

Aufl. 1. Wenn ein Körper in einem gewiſſen Zeitpunkt ſich ſelbſt überlaſſen wird, ſo daß nun die Schwere frei in ihn wirken kann, ſo iſt

	Fallhöhe.		Fallhöhe.
Im 1ten Zeittheilchen	1 Rpunkt	In 1 Zeitth.	1 Rpkt.
2ten — — —	2 Rp.	2 — —	3 Rp.
3ten — — —	3 Rp.	3 — —	6 Rp.
4ten — — —	4 Rp.	4 — —	10 Rp.
⋮		⋮	
Im nten — — —	n Rp.	In n Zeitth.	(1 + 2 + 3 + 4 . . . + n) Rp.
⋮		⋮	
Im rten — — —	r Rp.	In r Zeitth.	(1 + 2 + 3 + 4 + 5 . . . + r) Rp.

2. Die in n Zeittheilchen durchloſſene Fallhöhe heiſſe s, die in r Zeittheilchen durchloſſene S, ſo hat man (Alg. §. 29. IX)

$$s = \frac{(n+1).n}{2};\quad S = \frac{(r+1).r}{2}$$

alſo

$$s : S = (n+1).n : (r+1).r$$

3. Für jeden uns nur bemerkbaren Raum, der z. B. auch nur dem Durchmeſſer eines feinen Haares gleich

gleich wäre, müſſen s und S oder $\frac{(n+1).n}{2}$ und $\frac{(r+1).r}{2}$ doch ungeheure Zahlen ſeyn, weil ſie die Mengen von Raumpunkten ausdrucken, aus welchen ein ſolcher Raum beſteht. Daher iſt das Verhältniß $(n+1):(r+1)$ von dem $n:r$ nicht zu unterſcheiden, folglich ohne merklichen Fehler

$$s : S = n^2 : r^2$$

Die Zeit, worin s durchloffen wird, ſey in bemerkbaren Zeiteinheiten, z. B. in Sekunden $= t$; die Zeit, worin S durchloffen wird, in ebenſolchen Zeiteinheiten, $= T$, ſo iſt

$$n : r = t : T$$

alſo

$$s : S = t^2 : T^2$$

4. Weiß man alſo aus hinlänglichen Beobachtungen, daß z. B. für $T = 1$ Sek. S einer bekannten Gröſſe g gleich geſetzt werden kann, ſo hat man allgemein

$$s : g = t^2 : 1$$

und

$$\text{I. } s = t^2 g$$

5. Am Ende des rten Zeittheilchens hat der Körper einen Raum $S = \frac{(r+1).r}{2}$ Rpkten durchloffen; er durchlauft aber im rten Zeittheilchen wirklich r Raumpunkte, alſo würde er, wenn er ſich weiter hin bloß vermöge der Trägheit fortbewegte, in iedem folgenden Zeittheilchen gleichfalls r Raumpunkte durchlaufen oder ſeine Geſchwindigkeit würde für ein einzeles

jedes Zeittheilchen $=$ r Npkte ſeyn, ſo daß er in den folgenden r Zeittheilchen einen Raum $=$ r . r ſehr genau $= 2 . S$ vermöge der erlangten Geſchwindigkeit durchlaufen könnte.

Nimmt man alſo für r ſoviele Zeittheilchen als 1 Sek. ausmachen, und weiß man, daß ein ſchwerer Körper in der 1ten Sek. von einer Höhe $S = g$ frei herabfällt, ſo hat er am Ende der 1ten Sek. eine Geſchw. vermöge der er in den folgenden r Zeittheilchen, d. h. in der folgenden Sek. einen Raum $= 2g$ durchlaufen könnte.

Wird alſo die Geſchw. für Sekunden ausgedruckt, ſo iſt die Geſchwindigkeit eines frei fallenden Körpers am Ende der 1ten Sek $= 2g$

6. Aus (no. 1) erhellet, daß die Geſchwindigkeit der Zeit proportional iſt; heißt alſo die Geſchw. am Ende der 1ten Sek. v, am Ende der tten c, ſo hat man

$$1 : t = v : c$$

alſo

$$\text{II. } c = t . v = 2gt \text{ (no. 5)}$$

7. Wenn inzwiſchen ein einzeles Zeittheilchen (no. 2) N Raumpunkte enthält, alſo auch am Ende des Nten Zeittheilchens die erlangte Geſchwindigkeit für 1 Zeittheilchen $=$ N Npkte wäre, ſo müßte der Körper nunmehr in iedem Zeitpunkt um einen Raumpunkt fortrücken, iezt hätte er alſo eine ſtetige Bewegung und die größtmögliche Geſchwindigkeit (§. 82). Alſo gelten die Formeln (no. 4. u. no. 6) nur bis zu einem Werth von t, welcher nicht mehr als N Zeitpunkte in ſich ſchließt.

Wenn alſo der Werth von t, welcher N Zeitpunkte enthält, durch τ ausgedruckt wird, ſo kann nur

$$c = 2g\tau$$

werden, und die Gleichung $c = 2gt$ gilt nur ſo lange als t nicht $> \tau$ wird.

8. Aus (no. 6) hat man auch

$$\text{III.} \quad t = \frac{c}{2g}$$

9. Und nun, dieſen Werth von t gebraucht, aus (no. 4)

$$\text{IV.} \quad s = \frac{c^2}{4g}$$

woraus ſich zugleich

$$c^2 = 4g \cdot s$$

alſo

$$\text{V.} \quad c = 2\sqrt{gs}$$

ergiebt.

10. Gebraucht man dieſen Werth von c in (no. 8), ſo hat man

$$t = \frac{2\sqrt{gs}}{2g}$$

oder

$$\text{VI.} \quad t = \sqrt{\frac{s}{g}}$$

Den Werth von g hat man durch Verſuche = 15,625 Rhl. Fuße gefunden, d. h. ſo tief fällt ein Körper lothrecht in der erſten Sekunde durch die Luft. Ich werde in der Folge dafür allemal 15,6 ſetzen. ſ. unten (§. 111). Anwendungen der vorſtehenden Formeln

meln auf fallende Körper ſetzen alſo voraus, daß der Widerſtand der Luft noch nicht bedeutend ſey und daß er für die erſte Sekunde des Falles als Null angeſehen werden könne. Er wird aber deſto bedeutender, ie mehr der Werth von s die Höhe von 15, 6 Rhl. F. übertrifft.

Zuſ.

§. 86. Wenn der in t Sek. durchloſſene Raum s, der in t + 1 Sek. durchloſſene S heißt, ſo hat man (§. 85. no. 4. I)

$$s = t^2 g, \quad S = (t+1)^2 . g = t^2 g + (2t+1) g$$

alſo

$$S - s = (2t+1) . g$$

Iſt t eine ganze Zahl, ſo iſt 2t + 1 die tte ungerade Zahl. Alſo nehmen die Räume oder Fallhöhen frei fallender Körper in den nach einander folgenden Sekunden zu wie die ungeraden Zahlen.

Zeiten.	Fallhöhen.
1 Sek.	1 . g
2 —	1+3) . g
3 —	(1+3+5) . g
4 —	(1+3+5+7) . g
.	
.	
.	
.	
n —	(1+3+5+7 . . . + n) . g

Der vorſtehende Satz hat aber nur ſeine Richtigkeit, wann t eine ſehr groſſe Menge von Zeittheilchen (§. 85. no. 1) in ſich begreift (§. 85. no. 3). Werden die Zeiten durch Mengen von Zeittheilchen (§. 85. no. 1) ausgedruckt, ſo nehmen die Fallhöhen wie die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe zu; nämlich

Zei-

Zeiten.	Fallhöhen.
1 Zeittheilchen	1 Rpunkt
2 ———	1 + 2
3 ———	1 + 2 + 3
.	
.	
.	
n ———	1+2+3 . . 3+n

Anm. 1. In der Ausübung haben wir es immer mit Werthen von t zu thun, die den Bedingungen, unter welchen die Formeln für den freien Fall (§. 85) ihre Anwendbarkeit behalten, Genüge thun. D. h. wir haben nie ſo groſſe Werthe von t, auch nie ſo kleine, daß die Fälle der Unanwendbarkeit (§. 85. no. 7. und hier §. 86) eintreten könnten. Daher behalten die Galileiſche Geſetze für alle mathematiſche Unterſuchungen über Bewegungen, die uns in der Natur bemerkbar ſind, ihre Richtigkeit.

Anm. 2. Die vorſtehenden Sätze ſind, wie man ſieht, ohne alle Rückſicht auf Hrn. Le Sage's Hypotheſe (De Lüc Unterſ. über die Atmoſph. II. Th. S. 655) aus der Natur der Sache ſelbſt hergeleitet worden. Auch will ich iene Hypotheſe damit gar nicht vertheidigen. Doch ſcheint es mir merkwürdig, daß Le Sage zur Unterſtützung ſeiner Hypotheſe ebendaſſelbe Geſetz für Zeiten und Fallhöhen annahm, auf welches die bisherigen Betrachtungen am Ende dieſes §. leiten. Die Käſtneriſchen Einwendungen (a. a. O. S. 660 u. f.) gegen dieſes Geſetz (ich rede nicht von den Einwendungen gegen Le Sage's Hypotheſe von einer ſtoſſenden Materie) ſind ohne alles Gewicht. Wenn die Natur eines Gegenſtandes von der Art wäre, daß ſie die Anwendung der ſo genannten Analyſis des Unendlichen nicht geſtattete, ſo könnte dieſes keinen Grund abgeben, der Sache eine andere Natur beilegen zu wollen, alſo kann die Erinnerung a. a. O. §. 16 hier gar nichts gegen das erwähnte Geſetz beweiſen. Es iſt aber nicht einmal richtig, daß dieſes Geſetz die Anwendung der Anal. d. Unendl.

aus-

ausſchlöſſe. Ebenſo unbedeutend ſind die Erinnerungen a. a. O. S. 19. Bei mathematiſchen Unterſuchungen iſt es gar nichts ungewöhnliches, anfänglich Gröſſen mit in die Betrachtung aufzunehmen, deren Werthe man nicht kennt, und die am Ende der Unterſuchung zu einem Reſultat führen, das vollkommen brauchbar iſt und von ienen unbekannten Gröſſen gar nicht mehr abhängt, daher man auch ihre Werthe gar nicht zu wiſſen braucht. Ebendas iſt hier der Fall. Die Gröſſe der Zeittheilchen (§. 84) braucht man nicht zu kennen, um den allgemeinen Satz daraus herzuleiten, daß ſich die in den einzelen Zeittheilchen durchloſſene Räume nicht wie die ungeraden, ſondern wie die in der natürlichen Ordnung auf einander folgenden Zahlen verhalten. Wer gründliche Kenntniß der Natur liebt, kann ſchon darum dieſen Satz nicht für unwichtig halten; er muß aber ſeine Wichtigkeit umſoviel mehr erkennen, wenn er zugleich ſieht, wie die Geſetze der Bewegung für bemerkbare oder wirklich ausmeßbare Zeiten daraus hergeleitet werden. Und zuletzt muß es doch wohl befriedigender ſeyn, die Anwendbarkeit der Galileiſchen Geſetze aus der Natur der Sache zu erkennen, als dieſe Geſetze aus unrichtigen Gründen abzuleiten und nur darum beizubehalten, weil ſie mit unſeren Erfahrungen übereinſtimmen. Da die Galileiſchen Geſetze nur auf ausmeßbare Zeiten und auf dieſe richtig angewendet werden, wenn ſich gleich die Räume fallender Körper wie die Triangularzahlen unbekannter Mengen von Zeitatomen (ſo nennt Käſtner meine Zeitpunkte; er verwechſelt aber Zeitatome mit meinen Zeittheilchen, die ſelbſt ſchon Mengen von Zeitatomen ſind) verhalten, ſo paßt auch ganz und gar nicht die Frage hierher, welche er (a. a, O. §. 22) als eine Enwendung gebraucht: „Sollen wir alle phyſiſche und aſtronomiſche „Kenntniſſe wegwerfen? nur damit wir ſagen können, die „Wege des fallenden Körpers verhalten ſich wie die Tri„angularzahlen unbekannter Mengen eines unbekannten „Zeitatoms.“

Erklä-

Erklärung 26.

§. 87. Die zu irgend einer Geſchwindigkeit c gehörige Höhe heißt die Höhe, von welcher ein ſchwerer Körper frei herabfallen müßte, um die Geſchw. c zu erlangen; ebenſo verſteht man unter der zu irgend einer Höhe h gehörigen Geſchwindigkeit die Geſchwindigkeit, welche ein Körper erlangt, wenn er durch eine Höhe h frei herabfällt.

Hierzu dienen die Formeln (§. 85. IV. V.)

Achtes Kapitel.

Umſtände, welche die beſchleunigende Kraft unſerer Schwere abändern; insbeſondere Bewegung auf einer ſchiefen Ebene, und vom einfachen Pendel.

Lehrſ. 11.

§. 88. Wenn ein Körper, deſſen Gewicht = P iſt, in Umſtände verſetzt wird, unter denen er nach irgend einer Richtung von einer unveränderlichen abſoluten Kraft getrieben wird, ſo daß der Körper nur durch einen Gegendruck = dem Gewicht p in Ruhe erhalten werden könnte, wenn ſonſt gar keine andere Kräfte wirkten, ſo durchlauft er nach der Richtung der erwähnten Kraft in einer beſtimmten Zeit t den Raum $\frac{p}{P}$. s, wenn er der

Schwere

Schwere frei überlaſſen in derſelben Zeit den Raum s nach der Richtung der Schwere durchlaufen würde.

Bew. 1. Die Menge ſchwerer Atomen, woraus der Körper beſteht, ſey $= m$, ſo wirkt in ieden Atom eine Kraft $= \frac{\mathfrak{P}}{m}$. Soviel Kraft iſt alſo für ieden Atom nöthig, um ihn, und mit ihm alle übrigen, d. h. den ganzen Körper, in der Zeit t durch den Weg s zu treiben.

2. Wirkt nun in die Maſſe deſſelben Körpers eine Kraft nach irgend einer Richtung ſo, daß ſie ihr nach dieſer Richtung die bewegende Kraft p mittheilt, ſo iſt das Beſtreben eines ieden einzelen Atoms nach derſelben Richtung $= \frac{p}{m}$.

3. Man iſt berechtiget anzunehmen, daß die Menge der Ortsänderungen in einerlei Zeit der Gröſſe der Kraft proportional ſey, welche dieſe Ortsänderungen bewirkt. Wenn alſo der im Fall (no. 2) vom Körper in der Zeit t durchloſſene Raum S heißt, ſo hat man

$$s : S = \frac{\mathfrak{P}}{m} : \frac{p}{m}$$
$$= \mathfrak{P} : p$$

alſo

$$S = \frac{p \cdot s}{\mathfrak{P}}.$$

Anm. Die Erfahrung beſtättiget die Vorausſetzung no. 3. vollkommen.

Zuſ.

§. 89. Weil für die erſte Sekunde des freien Falles s = g (= 15, 6 Rhl. Fuße) iſt, ſo hat man im Falle (§. 88)

$$S = \frac{p}{\mathfrak{P}} \cdot g$$

für die 1te Sekunde der Bewegung. Da nun für alle unveränderliche abſolute Kräfte dieſelben Sätze gelten, welche (§. 85) von derienigen bewieſen worden ſind, die wir die Schwere nennen, indem man dort für iede ſolche beſchleunigende Kraft nur $\mathfrak{g}$ ſtatt g ſchreiben darf, ſo daß $\mathfrak{g}$ den iedesmal in der erſten Sek. durchloſſenen Raum ausdruckt, ſo erhält man für die Bewegung eines Körpers, der in die Umſtände (§. 88) verſetzt wird, alle erfoderliche Formeln, wenn man darin $\mathfrak{g}$ ſtatt g ſchreibt, und iedesmal

$$\mathfrak{g} = \frac{p}{\mathfrak{P}} \cdot g$$

nimmt. Multiplicirt man mit 2 t, ſo erhält man

$$2\mathfrak{g}t = \frac{p}{\mathfrak{P}} \cdot 2gt.$$

Es iſt aber $2\mathfrak{g}t$ die in der Zeit t von dem Körper, auf den ſich $\mathfrak{g}$ bezieht, in der Zeit t erlangte Geſchwindigkeit (§. 85. no. 6); ſetzt man alſo dieſe Geſchw. = c, ſo hat man

$$c = 2gt \cdot \frac{p}{\mathfrak{P}}, \text{ und } p = \frac{c}{2gt} \cdot \mathfrak{P}$$

Anm. Der Raum $\mathfrak{g} = \frac{p}{\mathfrak{P}} \cdot g$ wird auch die Beſchleunigung genennt. Für die freie Wirkung unſerer Schwere iſt $p = \mathfrak{P}$, alſo g ſelbſt die Beſchleunigung unſerer natürlichen Schwere.

Zuſ.

Zuſ. 1.

§. 90. Wenn die in der Maſſe $\mathfrak{P}$ wirkende natürliche Schwere = 1, und die beſchleunigende Kraft, welche in derſelben Maſſe die bewegende Kraft p bewirkt, = f geſetzt wird, ſo hat man auch

$$f : 1 = g : g$$

Vermöge der Kraft f wird in der Zeit t der Raum $s = t^2 . g$, und vermöge der Schwere der Raum $h = t^2 . g$ durchloffen, alſo auch

$$f : 1 = s : h$$

ſolange f während der Bewegung unveränderlich bleibt.

Wäre aber f eine veränderliche beſchleunigende Kraft, ſo bleibt ſie nur für ein Zeittheilchen dt unveränderlich, und da für dieſes Zeittheilchen die durchloffenen Räume ds und dh ſind, ſo gilt alsdann das Verhältniß, vermöge deſſen ſich die beſchleunigende Kräfte wie die in gleichen Zeiten durchloffene Räume verhalten, bloß für die Räume ds und dh; man hat alſo in dieſem Falle nur

$$f : 1 = ds : dh$$

und
$$f = \frac{ds}{dh}$$

wenn s und h gleichzeitig durchloffen werden.

Zuſ. 2.

§. 90*. Iſt $f = \frac{p}{\mathfrak{P}}$ eine unveränderliche beſchleun. Kraft, vermöge der ein Körper in irgend einer Zeit t den Raum s durchlauft, und durchlauft ein Körper in irgend einer andern Zeit T den Raum h vermöge der frei wirkenden Schwere, ſo erlangt iener eine

eine gewiſſe Geſchwindigkeit c, dieſer eine C, und es iſt (§. 85. V.)

$$c : C = 2\sqrt{gs} : 2\sqrt{gh}$$

Soll alſo c = C ſeyn, ſo hat man

$$g.s = g.h$$

und

$$g : g = h : s$$

alſo auch

$$f : 1 = h : s$$

und $$f = \frac{h}{s}$$

Iſt aber die beſchleunigende Kraft veränderlich, ſo kann ſie nur für die Räume ds und dh als unveränderlich angenommen werden, und man hat alſo in dieſem Falle nur

$$f = \frac{dh}{ds}$$

wenn s der Raum iſt, durch welchen ein Körper von der beſchl. Kraft getrieben dieſelbe Geſchwindigkeit erlangt, die unſere Schwere einem Körper beim freien Falle durch die Höhe h mittheilt.

Zuſ. 3.

§. 91. Für eine andere Maſſe ſollen P′, p′, g′, f′ daſſelbe bedeuten, was für die vorige Maſſe P, p, g, f bedeutete, ihre Geſchwindigkeit, nachdem ſie den Raum s durchloſſen hat, heiſſe C, ſo iſt

$$\mathfrak{C} = 2\sqrt{g'.s}$$

und es iſt (vor. §.)

$$c : \mathfrak{C} = 2\sqrt{g.s} : 2\sqrt{g's}$$
$$= \sqrt{g} : \sqrt{g'}$$

oder

oder (§. 89) $= \sqrt{(\frac{p}{\mathfrak{P}}.g)} : \sqrt{(\frac{p'}{\mathfrak{P}'}g)}$

daher

$$c^2 : \mathfrak{C}^2 = \frac{p}{\mathfrak{P}} : \frac{p'}{\mathfrak{P}'}$$
$$= p\mathfrak{P}' : p'\mathfrak{P}$$

und

$$c^2.p'\mathfrak{P} = \mathfrak{C}^2.p\mathfrak{P}'$$

oder

$$c^2.\mathfrak{P} : \mathfrak{C}^2.\mathfrak{P}' = p : p'$$

wo p, p' die bewegende Kräfte der Maſſen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ ſind.

Alſo verhalten ſich die bewegende Kräfte verſchiedener Maſſen wie die Produkte aus den Maſſen in die Quadrate der Geſchwindigkeiten, die ſie erlangen, wenn ſie gleiche Räume durchlaufen.

Dieſer Satz enthält das Leibnitziſche Kräftenmaaß.

Setzt man die Dauer der Bewegung von $\mathfrak{P} = t$, von $\mathfrak{P}' = t'$, ſo hat man auch (§. 89)

$$c : \mathfrak{C} = 2gt.\frac{p}{\mathfrak{P}} : 2gt'.\frac{p'}{\mathfrak{P}'}$$
$$= tp\mathfrak{P}' : t'.p'\mathfrak{P}$$

alſo, für gleiche Zeiten,

$$c.p'.\mathfrak{P} = \mathfrak{C}.p.\mathfrak{P}'$$

oder

$$c.\mathfrak{P} : \mathfrak{C}.\mathfrak{P}' = p : p'$$

d. i.

die bewegende Kräfte verſchiedener Maſſen verhalten ſich wie die Produkte aus den Maſſen

 in

in die nach gleichen Zeiten der Bewegung erlangten Geſchwindigkeiten.

Dieſer Satz enthält das Carteſiſche Kräftenmaaß.

Alſo ſind beide Beſtimmungen, die Leibnitziſche und die Carteſiſche gleich richtige Folgen aus den allgemeinen Bewegungsgeſetzen; nur ſind c, C in der erſteren Formel allemal andere Verhältnißzahlen als c, C in der letzteren; in iener ſind es Geſchwindigkeiten, die beim Durchlaufen gleicher Räume erlangt werden; in letzterer ſind es Geſchwindigkeiten, die in gleichen Zeiten der Bewegung erzeugt werden. Dieſe verchiedene Bedeutungen vorausgeſetzt iſt das Leibnitziche $c^2 : C^2$ mit dem Carteſiſchen $c : C$ ganz einerlei.

Aufg. 14.

§. 91*. Ein ſchwerer Körper M, deſſen Gewicht $\mathfrak{P}$ iſt, wird, ſich ſelbſt überlaſſen und alle Hinderniſſe bei Seite geſetzt, auf eine ſchiefe Ebene CA (fig. 13) gelegt, die mit der horizontalen Grundlinie einen Winkel CAB $= \beta$ macht; man ſoll ſeine Bewegung beſtimmen, d. i. angeben, wie während ſeiner Bewegung Zeit, Raum und Geſchwindigkeit von einander abhängen.

Aufl. Der Körper wird hier nach CA von einer Kraft getrieben, welche ihm das Streben zur Bewegung oder einen Druck

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P} . \sin \beta$$

giebt (§. 50. no. 2).

Alſo iſt (§. 89) $\mathfrak{g} = \frac{\mathfrak{P} . \sin \beta}{\mathfrak{P}} . g = \sin \beta . g$

Man

Man darf alſo (§. 85) überall nur $\sin\beta \times g$ ſtatt g ſchreiben.

Zuſ. 1.

§. 92. Unter der vorigen Vorausſetzung falle der Körper nach bd herab, ſo daß da wagrecht, ba lothrecht ſey (fig. 27), ſo fällt er in der Zeit t nach bd durch einen Raum $h = t^2 . \sin\beta . g$, nach ba durch einen Raum $H = t^2 . g$ (§. 85. no. 4. u. §. 90), alſo für einerlei Zeiten des Falls

$$h : H = t^2 \sin\beta . g : t^2 g = \sin\beta : 1$$

Beſchreibt man nun aus der Mitte von ba, hier aus e einen Kreis, der die ba in c ſchneidet, ſo wird $\varepsilon = \beta$, alſo auch

$$h : H = \sin\varepsilon : 1 = bc : ba$$

alſo lauft der Körper, der Schwere überlaſſen, die Sehne bc in derſelben Zeit, in welcher er den Durchmeſſer ba beim freien Falle durchlaufen würde. Dieſes gilt, c mag wo man will liegen, man könnte z. B. bk ſtatt der bd nehmen, und nun $bka = \beta$, $baf = \varepsilon$ ſetzen.

Man kann alſo bf auch = ca nehmen, und ein ſchwerer Körper lauft in gleichen Zeiten durch bf und durch ba, wenn er durch bf auf einer ſchiefen Ebene und durch ba frei herabfällt.

Da nun die beiden Dreiecke abf und bac kongruent ſind, alſo cab = fba iſt, ſo hat man auch

$$\begin{aligned} cad &= 90^\circ - cab = 90^\circ - fba \\ &= bka \end{aligned}$$

demnach werden gleiche Sehnen bf und ca, weil ſie gleiche Winkel mit der Horizontallinie machen, wiederum in gleichen Zeiten, nämlich in derſelben Zeit

durchloffen, in welcher ein ſchwerer Körper frei durch den ganzen Durchmeſſer ba fallen würde; dieſe iſt $\sqrt{\frac{ba}{g}}$ (§. 85. VI).

Zuſ. 2.

§. 92*. Ein Körper, der ſich ſelbſt überlaſſen längſt einer ſchiefen Ebene abgleitet, z. B. von C bis A (fig. 13), hat in A eine Geſchwindigkeit $= 2\sqrt{g.CA}$ (§. 85. no. 5) $= 2\sqrt{\sin\beta.g.CA}$ $= 2\sqrt{\sin\beta.g.\frac{BC}{\sin\beta}} = 2\sqrt{g.BC}$, d. i. dieſelbe, welche er in B haben würde, wenn er durch die lothrechte CB frei herabgefallen wäre.

CB (fig. 28) ſey lothrecht, AB eine krumme Linie, in der ein Körper oder ſein Schwerpunkt von a nach B ſo herabfalle, daß er überall der Tangente der krummen Linie folgen kann; aα, bβ, dδ ꝛc. ſeyen auf CB ſenkrecht, ſo erhellet, daß er in b, d, e, B dieſelben Geſchwindigkeiten haben müſſen, die er beim freyen lothrechten Falle in α, β, δ, ε, B hat.

Aufg. 15.

§. 93. BA (fig. 29) ſey der lothrechte Durchmeſſer eines Halbkreiſes ADB, deſſen Mittelpunkt C iſt; Am = b ein ſehr kleiner Theil des Durchmeſſers, der in Vergleichung mit BA = a unbedeutend ſeyn ſoll, Ao = x eine Abſciſſe, op die zugehörige Ordinate; ein ſchwerer ſich ſelbſt überlaſſener Punkt bewege ſich ohne alle Hinderniß von n bis p, man ſucht die hierzu erfoderliche Zeit t.

Aufl.

Aufl. Der Punkt hat in p die Geſchwindigkeit $2\sqrt{g(b-x)}$ (§. 92), alſo $dt = \frac{\frac{1}{2}a \cdot d\,\text{Bogen}\,np}{2\sqrt{g(b-x)}}$; die Abſciſſen von C aus auf CA genommen ſollen v heiſſen, ſo iſt d Bog. np $\doteq$ — d Bog. ſin y oder — d Bog. Coſ v $= \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)}}$ (Alg. §. 55. II.) $= \frac{-dx}{\sqrt{(ax-x^2)}}$; daher

$$dt = -\frac{\frac{1}{2}a \cdot dx}{2\sqrt{g \cdot (b-x) \cdot (ax-x^2)}}$$

$$= -\frac{a\,dx}{4\sqrt{g(bx-x^2)(a-x)}}$$

Man kann aber hier beinahe a ſtatt a — x ſetzen, dieſes giebt

$$dt = -\frac{dx \cdot \sqrt{a}}{4\sqrt{g \cdot (bx-x^2)}}$$

Denkt man ſich nun einen Kreis, deſſen Durchmeſſer b wäre und bezeichnet die Abſciſſen aus dem Mittelpunkte dieſes Kreiſes genommen mit z, ſo iſt wiederum, b = 1 geſetzt,

$$-\frac{dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}}$$

$$= -d\,\text{Bog. Coſ}\,z.$$

alſo

$$t = \frac{-\sqrt{a}}{4\sqrt{g}} \cdot \text{Bog. Coſ}\,z \quad (\text{♄}$$

welches, für $z = \frac{1}{2}$ oder für $x = b = 1$, $t = 0$ giebt, daher keine Konſtante hinzukommt. Für $x = 0$, d. i. für den Augenblick, da der bewegte Punkt

in A ankommt, iſt $z = -\frac{1}{2}$ und Bog. Coſ $(-\frac{1}{2})$ = Bog. $180^\circ = \pi$, wenn π die bekannte Ludolphiſche Zahl 3, 14 .... bedeutet.

Daher für den Fall von n bis A

$$t = \frac{\sqrt{a}}{4\sqrt{g}} \cdot \pi = \frac{1}{4}\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

Das verneinte Zeichen in (♄) zeigt nur an, daß die Aenderungen von t und von Coſ z einander entgegengeſetzt ſind.

Zuſ.

§. 94. Allgemein für ieden Werth von Am (fig. 29) hat man (§. 93)

$$dt = -\frac{a}{4\sqrt{g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{((bx - x^2).(a-x))}}$$

Dieſes Integral ergiebt ſich gerade zu aus (Alg. §. 83. XXXIV), wo man nur noch mit $\frac{a}{4\sqrt{g}}$ multipliciren darf. Auf dieſe Weiſe erhält man allgemein

$$t = \left(1 + \frac{1}{4}\frac{b}{a} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2.\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2.\frac{b^3}{a^3} + \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2.\frac{b^4}{a^4} + \text{ꝛc.}\right).\frac{1}{4}\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

Anm. Der Ausdruck, daß ein unendlich kleiner Bogen nA von einem ſchweren Punkt in der Zeit $t = \frac{1}{4}\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ durchloſſen werde, iſt ebenſo unbeſtimmt als unrichtig. Noch ohne unendlich klein zu ſeyn kann ein Bogen nA ſchon mit der Sehne nA kongruent ſeyn, und dann wäre im Fall der Bewegung die Zeit, worin der

der Weg nA durchloffen wird, nicht $= \frac{1}{4}\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$, ſondern $= \sqrt{\frac{a}{g}}$ (§. 91). Aber eine ſolche Linie nA würde ſelbſt noch horizontal ſeyn, daß alſo von n nach A in dieſem Fall vermöge der Schwere keine Bewegung anfangen könnte. Daher muß hier nA ein Bogen ſeyn, der mit ſeiner Sehne nicht mehr kongruent iſt, wenn die Formel auf ihn ſoll angewendet werden können, und die Vorausſetzung b = o iſt daher gar nicht verſtattet.

Erklärung 27.

§. 94. n (fig. 30) ſey ein ſchwerer Punkt, der durch die ſteife Linie Cn, die man ohne Maſſe annimmt, verhindert wird, ſich von dem unbeweglichen Punkt C zu entfernen, ſo daß daß er ſich nur in dem Bogen BD, der mit C in einerlei lothrechten Ebene liegt, vermöge der Eindrücke der Schwere bewegen kann, ſo heißt die Linie Cn mit dem ſchweren Punkt n ein **einfaches Pendel**. Sind mit dem n noch mehrere ſchwere Punkte verbunden, die ſich mit ihm, im Fall der Bewegung, zugleich um C drehen müſſen, ſo hat man ein **zuſammengeſetztes Pendel**; C heißt der **Aufhängepunkt** auch **Bewegungspunkt**. Die Bewegung durch den Bogen BD, welchen der ſchwere Punkt durchlauft, wenn das Pendel anfänglich bis in B erhoben wird, heißt ein **Schwung** oder **Pendelſchlag**.

Lehrſ. 12.

§. 95. Wenn CA (fig. 30) lothrecht iſt, BA = DA genommen und nun das Pendel in der Lage CB ſich ſelbſt überlaſſen wird, ſo befindet es

ſich am Ende eines Schwunges in der Lage CD; alle Hinderniſſe bei Seite geſetzt; und die Zeit des Niedergangs durch DA iſt der Zeit des Aufgangs durch AD gleich.

Bew. Weil die Eindrücke der Schwere während der Bewegung von A nach D dieſelben ſind, wie von B nach A, nur der Bewegung entgegengeſetzt, ſo muß der ſchwere Punkt einen Punkt D erreichen, von welchem er nach A zurückfallend wieder dieſelbe Geſchwindigkeit in A erlangen würde, die er bis in D verlohren hat; dazu wird aber erfodert, daß DA = BA ſey. Damit aber gleichviele entgegengeſetzte Eindrücke von A nach D erfolgen können, wie von D nach A, ſo müſſen auch die Zeiten des Auf- und Niedergangs gleichgroß ſeyn.

Zuſ. 1.

§. 96. Wenn der ſchwere Punkt des einfachen Pendels bis in B auf die Höhe Am = b über die tiefſte Stelle erhoben wird, und die Länge deſſelben CB = l iſt, ſo iſt der Durchmeſſer des Kreiſes, in welchem das Pendel ſchwingt = 2l, alſo (§. 93) ſehr nahe

die Zeit eines Schwungs $t = \left(1 + \frac{b}{8.l} + \frac{b^2}{28,5.l^2}\right) \cdot \frac{1}{2}\pi \cdot \sqrt{\frac{2l}{g}}$

wo man ſelten das 3te Glied nöthig hat.

Zuſ. 2.

§. 97. Weil, für b = 0, $t = \frac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{2l}{g}}$ wird, ſo drucken ſich die mechaniſchen Schriftſteller hier-

hierüber gewöhnlich ſo aus: für den Schwung durch einen unendlich kleinen Bogen ſey

$$t = \tfrac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{2l}{g}} = \pi \sqrt{\frac{l}{2g}}.$$

Der kleinſtmögliche Schwung ſetzt wenigſtens b = 1 Raumpunkt voraus (§. 94. Anm.); dazu gehört aber ſchon ein Bogen von unzählich vielen Raumpunkten, daß ſich alſo der Bogen für den kleinſtmöglichen Schwung wohl nicht unendlich klein nennen läßt. Auch wird für unendlich kleine Bögen die Sehne immer für den Bogen genommen; nur hier ſoll man den unendlich kleinen Bogen von ſeiner Sehne unterſcheiden, damit man nicht die Zeit des kleinſten Schwungs $= \sqrt{\frac{2l}{g}}$ erhalte (§. 93). Solche Verwirrungen findet man bei den beſten Schriftſtellern.

Zuſ. 3.

§. 98. Wenn der Erhebungswinkel BCA (fig. 30) nur wenige Grade beträgt, ſo iſt ſchon $\frac{b}{8.l}$ ein ſo kleiner Bruch, daß man ohne nachtheilichen Fehler $t = \pi \sqrt{\frac{l}{2g}}$ beibehalten kann. Iſt T die Schwungzeit für ein Pendel von der Länge $\mathfrak{L}$ bei demſelben g, ſo hat man auch $T = \pi . \sqrt{\frac{\mathfrak{L}}{2g}}$, alſo

$$t : T = \frac{\pi}{\sqrt{2g}}\sqrt{l} : \frac{\pi}{\sqrt{2g}}\sqrt{\mathfrak{L}}$$
$$= \sqrt{l} : \sqrt{\mathfrak{L}}$$

Folg.

Folglich auch

$$l : \mathfrak{L} = t^2 : T^2$$

Wenn das Pendel l in einer gewiſſen Zeit von t Sekunden n Schwünge, und das $\mathfrak{L}$ in derſelben Zeit N Schwünge macht, ſo macht das erſtere in $\frac{t}{n}$ Sekunden und das letztere in $\frac{t}{N}$ Sek. einen Schwung, alſo

$$\frac{t}{n} : \frac{t}{N} = \sqrt{l} : \sqrt{\mathfrak{L}}$$

oder $$Nn . \frac{t}{n} : Nn . \frac{t}{N} = \sqrt{l} : \sqrt{\mathfrak{L}}$$

d. i.

$$N : n = \sqrt{l} : \sqrt{\mathfrak{L}}$$

Hätte man bei verſchiedenen einfachen Pendeln nicht einerlei Schwere, ſo müßte man

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{2g}}$$

ſetzen, und jedesmal den gehörigen Werth von g ſubſtituiren (§. 89).

Neuntes Kapitel.

Vom Momente der Trägheit, deſſen Einfluß auf die Bewegung eines Syſtems von Maſſen, die ſich in den verſchiedenen Stellen des Syſtems mit verſchiedenen Geſchwindigkeiten bewegen, und insbeſondere vom zuſammengeſetzten Pendel.

Aufg. 16.

§. 99. Die kleinere und die gröſſere Scheibe (fig. 31), deren Maſſen ganz bei Seite geſetzt werden, ſollen ſich im Fall der Bewegung um eine gemeinſchaftliche Axe durch a drehen; in b iſt nach der Tangente des Kreiſes eine Maſſe (etwa mittelſt eines um die Scheibe gelegten Fadens, deſſen Maſſe bei Seite geſetzt wird) angebracht, in welche die Schwere nicht wirkt, die aber, woferne die Schwere in ſie wirkte, ein Gewicht = Q erhalten würde; an derſelben Scheibe wirke z. B. in c wiederum nach der Tangente des Kreiſes eine Kraft = P, die nämlich ſo ſtark drucken würde als ein Gewicht = P, ſo wird die Maſſe Q durch die Kraft P in Bewegung geſetzt, ſo daß ſie in der erſten Sek. einen Raum = g durchlauft. Wenn nun Q von b weggenommen und dagegen eine Maſſe R an dem Umfang der kleineren Scheibe z. B. in d auf dieſelbe Weiſe angebracht wird: wie wird dieſe Maſſe R beſchleuniget werden?

Aufl.

Aufl. Vermöge (§. 89) iſt $g = \frac{P}{\mathfrak{Q}} . g$.
Eine Kraft $\frac{ac}{ae} . P$ in e, die der P in c gleichgültig iſt, treibt $\mathfrak{R}$ in der erſten Sekunde durch einen Raum

$$g' = \frac{S}{\mathfrak{R}} . g = \frac{\frac{ac}{ae} . P}{\mathfrak{R}} . g;$$ ebenſo wird alſo auch $\mathfrak{R}$ beſchleunigt, wenn ſtatt der S in e die P in c angebracht iſt.

Da aber in iedem Fall des Punktes c Geſchwindigkeit nothwendig $\frac{ac}{ae}$ mal ſo groß ſeyn muß als die des Punktes e oder der Maſſe $\mathfrak{R}$, ſo iſt der in der 1ten Sek. von c durchloſſene Raum

$$g'' = \frac{ac}{ae} . g'$$

Zuſ.

§. 100. Soll alſo der Punkt c immer auf dieſelbe Weiſe durch die Kraft P bewegt werden, es mag die Maſſe $\mathfrak{Q}$ in b, oder ſtatt ihrer die $\mathfrak{R}$ in d angebracht werden, ſo muß

$$g = g''$$

alſo

$$\frac{P}{\mathfrak{Q}} . g = \frac{ac}{ae} . g' = \frac{\frac{ac}{ae} . \frac{ac}{ae} . P . g}{\mathfrak{R}}$$

ſeyn, oder

$$\frac{1}{\mathfrak{Q}} = \frac{ac^2}{ae^2 . \mathfrak{R}}$$

alſo

alſo

$$\mathfrak{Q} . ac^2 = \mathfrak{R} . ae^2$$

oder

$$\mathfrak{Q} . ab^2 = \mathfrak{R} . ad^2$$

d. h. Wenn eine abſolute Kraft an einem Hebel eine Maſſe $\mathfrak{Q}$ in Bewegung ſetzt, deren Entfernung vom Umdrehungspunkt q iſt, ſo bleibt die Bewegung des Punktes, an welchem die Kraft unmittelbar angreift, ungeändert, wenn man ſtatt der Maſſe $\mathfrak{Q}$ in der Entfernung q, eine andere $\mathfrak{R}$ in der Entfernung r vom Umdrehungspunkte anbringt, woferne nur

$$\mathfrak{Q} . q^2 = \mathfrak{R} . r^2$$

bleibt, oder woferne man nur

$$\mathfrak{R} = \frac{q^2}{r^2} . \mathfrak{Q}$$

nimmt.

Erklärung 28.

§. 101. Wenn eine Maſſe $\mathfrak{Q}$ ſo mit einem Punkt am Hebel, wie (fig. 31 mit dem b) verbunden iſt, daß alle Theilchen der ganzen Maſſe mit dem Punkte am Hebel gleiche Geſchwindigkeit annehmen, ſo heißt das Produkt aus der Maſſe $\mathfrak{Q}$ in das Quadrat der Entfernung ienes Punktes vom Umdrehungspunkt oder von der Umdrehungsaxe (vorhin $\mathfrak{Q}.q^2$) das **Moment der Trägheit** dieſer Maſſe in Anſehung iener Umdrehungsaxe.

Zuſ.

§. 102. Sind alſo verſchiedene Theilchen einer Maſſe, z. B. α, β, γ, in verſchiedenen Entfernungen a, b, c von der Umdrehungsaxe mit Punkten des Hebels verbunden, ſo iſt das Moment der Trägheit

heit der aus dieſen Theilchen zuſammengeſetzten Maſſe $= \alpha . a^2 + \beta . b^2 + \gamma . c^2$.

Eigentlich kommt hierbei nichts auf verſchiedene Entfernungen, ſondern auf verſchiedene Geſchwindigkeiten an, die mit den verſchiedenen Entfernungen verbunden ſind. Die verſchiedenen Entfernungen haben nämlich die ihnen proportionale Mengen von Eindrücken der Kraft zur Folge, auf die es eigentlich ankommt, und die Geſchwindigkeiten ſind nichts anders als Verhältnißzahlen für die gleichzeitigen Mengen von Eindrücken. Daher kann man den Satz (§. 99), der nur zur Deutlichkeit in Bezug auf den Hebel vorgetragen worden iſt, auch ohne Rückſicht auf denſelben allgemein ſo abfaſſen, daß man dabei bloß auf ein Syſtem von Punkten ſieht, deren keiner ohne den andern in Bewegung kommen kann, und deren Geſchwindigkeiten im Fall einer entſtehenden Bewegung ſich allemal wie gegebene Linien ad, ab oder q, r verhalten.

Ebendarum kann das Moment der Trägheit einer Maſſe, deren Theilchen einerlei gleichzeitige Geſchwindigkeit haben, auch durch das Produkt aus der Maſſe in das Quadrat der Geſchwindigkeit ausgedruckt werden, die ihr in einem gewiſſen Augenblick zukommt. Und ſo iſt das Moment der Trägheit einer ieden Maſſe die Summe der Produkte aus ihren verſchiedenen Atomen in die Quadrate der ihnen gleichzeitig zukommenden Geſchwindigkeiten.

Dieſemnach läßt ſich der Satz (§. 100) allgemeiner auch ſo ausdrucken:

> Wenn irgend ein Punkt eines Syſtems von der ihn angreifenden Kraft in Bewegung geſetzt wird, ſo daß die zu dem Syſtem gehöri-

gen materiellen Theilchen α, β, γ.... in einem gewiſſen Augenblick die gleichzeitige Geſchwindigkeit a, b, c.... erhalten, ſo behält der angegriffene Punkt ganz dieſelbe beſchleunigte Bewegung, wenn die Theilchen α, β, γ.... weggenommen und ſtatt ihrer andere 𝔄, 𝔅, ℭ.... in Punkten angebracht werden, welche ſich gleichzeitig mit den Geſchwindigkeiten A, B, C.... bewegen, woferne nur

$$\alpha^2.a + \beta^2.b + c^2.\gamma = \mathfrak{A}.A^2 + \mathfrak{B}.B^2 + \mathfrak{C}.C$$

bleibt, d. i. woferne das Moment der Trägheit der Maſſe $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ nur ebenſo groß bleibt als das der Maſſe $\alpha + \beta + \gamma$.

Daher iſt die Berechnung der Momente der Trägheit für alle Fälle von Wichtigkeit, wo es darauf ankommt, zuſammengeſetzte Maſſen, die ein Syſtem bilden, deſſen verſchiedene Theile ſich mit verſchiedenen Geſchwindigkeiten bewegen, auf einen einzigen gegebenen Punkt zu reduciren.

Aufg. 17.

§. 103. acde (fig. 32) ſey der ſenkrechte Durchſchnitt eines rechtwinklichten Parallelepipedums nach ſeiner Länge; durch c ſenkrecht auf die Fläche dieſes Rektangels denke man ſich eine Axe, um die ſich das Parallelepipedum, deſſen Breite β heiſſen ſoll, frei drehen kann; man ſucht das Moment der Trägheit dieſes Parallelepipedums.

Aufl. 1. Auf der Grundlinie cd = m nehme man eine willkührliche Abſciſſe cp = x, und Ordinate po = y und nun bei o das Element β.dx.dy, ſo iſt dieſes Elements Moment der Trägheit nach (§. 101) ausgedruckt

$$= (x^2 + y^2)\,\beta.dx.dy$$

2. Die Summe aller in der Höhe y, die fürs erſte als unveränderlich angenommen wird, neben einander liegenden Elemente bildet einen Streifen, deſſen Moment der Trägheit

$$= \beta . dy \int (x^2 + y^2) . dx.$$

oder, wegen des noch unveränderlich angenommenen y,

$$= \beta dy . \int (x^2 dx + y^2 dx)$$
$$= \beta . dy . (\tfrac{1}{3} x^3 + y^2 x)$$

alſo, x = m geſetzt, für die ganze Länge des in der Höhe y liegenden Streifens

$$= \beta . dy . (\tfrac{1}{3} m^3 + my^2)$$

3. Demnach hat man für die zu den verſchiedenen Streifen von cd bis o gehörigen Momente der Trägheit zuſammen genommen

$$\beta . \int dy . (\tfrac{1}{3} m^3 + my^2)$$
$$= \beta . (\tfrac{1}{3} my^3 + \tfrac{1}{3} m^3 y)$$

und, für die ganze Höhe y = n,

$$\text{das Mom. der Tr.} = (\tfrac{1}{3} mn^3 + m^3 n) . \beta$$
$$= \tfrac{1}{3} \beta mn . (n^2 + m^2)$$

Heißt alſo des Parallelepipedums kub. Inhalt K, und die Diagonale des Rektangels acde, D; ſo iſt

$$\text{das Mom. der Tr.} = \tfrac{1}{3} D^2 . K$$

Iſt n gegen m ſehr klein, ſo iſt es genau genug = $\tfrac{1}{3} m^2 . K$, wo ſich K eigentlich auf die Maſſe bezieht, wofür man alſo auch das Gewicht ſetzen kann.

Zuſ.

§. 104. Das Rektangel (fig. 33) bedeute einen ebenſolchen ſenkrechten parallelepipediſchen Durch-

ſchnitt,

ſchnitt, fd theile daſſelbe in zwei kongruente Theile, ſo daß ca = co werde, und die Axe, um die ſich das Parallelepipedum frei drehen kan, gehe durch c ſenkrecht auf das Rektangel; iſt nun ac = n, cd = m, cf = l, ſo iſt

das Mom. d. Tr. des ganzen Parallelepip. $= \frac{2}{3} \beta . (mn . (n^2 + m^2) + nl . (n^2 + l^2))$

oder, wenn die Diagonale ce = D, die cg = d, der kub. Inhalt des Parallelepipedums auf die Länge ae = K, auf die Länge ag = k geſetzt wird,

das M. d. Tr. des ganzen Parallelepip. $= \frac{1}{3} (D^2 . K + d^2 . k)$

$$= \frac{1}{3} \left(D^2 + \frac{1}{m} . d^2\right) . K$$

Iſt n gegen m ſehr klein, ſo läßt ſich genau genug

das M. d. Tr. $= \frac{1}{3} (m^2 + l^2) . K$

ſetzen, wo wiederum für K auch das Gewicht genommen werden kann.

Anm. Für andere Körper laſſen ſich die Momente der Trägheit auf dieſelbe Weiſe beſtimmen. ſ. Handb. der Maſchinenlehre II. Kap.

Erklärung 29.

§. 105. Die Maſſe AB (fig. 34) ſtelle ein zuſammengeſetztes Pendel vor, das ſeinen Aufhängepunkt in c hat; cQ ſey ein einfaches Pendel, das ſeinen Schwung Qbq in derſelben Zeit machen würde, in welcher das zuſammengeſetzte um ebenden Winkel erhobene Pendel einen Schwung macht, ſo

iſt cb die Länge des korreſpondirenden einfachen Pendels, und b der Mittelpunkt des Schwunges.

Aufg. 18.

§. 106. AB (fig. 34) ſey eine parallelepipediſche gleich dichte Maſſe, ein zuſammengeſetztes Pendel, das in c ſeinen Aufhängepunkt hat; man ſoll die Länge cb des korreſpondirenden einfachen Pendels, alſo auch den Mittelpunkt des Schwunges beſtimmen.

Aufl. 1. Weil hier der Schwerpunkt d des zuſammengeſetzten Pendels in der Mitte von AB liegt, ſo verhält ſich die Sache ſo, als wäre die Summe von Kräften, welche in die ganze Stange wirken, in der Entfernung cd von c vereiniget. Iſt alſo das Gewicht der ganzen Stange $= P$, $cA = l$, $cB = m$, ſo hat man $cd = \frac{1}{2}(l+m) - l = \frac{1}{2}(m-l)$, und in d eine Kraft $= P$, die in alle Atomen zuſammengenommen wirkt.

Dieſe Kraft treibt nun den Punkt c ebenſo, wie ſie thun würde, wenn in d eine Maſſe $\mathfrak{P}$ angebracht wäre, die daſſelbe Moment der Trägheit hätte, das alle Theilchen zuſammengenommen haben (§. 100, 102), d. i. wie ſie thun würde, wenn ſtatt der von A bis B zerſtreuten Maſſe bloß in d eine Maſſe $\mathfrak{P}$ unter der Bedingung angebracht würde, daß

$$\mathfrak{P} \cdot cd^2 = \tfrac{1}{3}\left(D^2 + \frac{1}{m} \cdot d^2\right) \cdot P.$$

2. Alſo hat man $\mathfrak{P} = \dfrac{D^2 + \frac{1}{m} \cdot d^2}{3 \cdot cd^2} P.$

Daher

Daher, weil in dieſe Maſſe die Kraft P wirkt (§. 89)

$$\mathfrak{g} = \frac{P}{\mathfrak{P}} g = \frac{3 \,.\, cd^2}{D^2 + \frac{1}{m} \,.\, d^2} \,.\, g$$

$$= \frac{3 \,.\, \frac{1}{4}(m-l)^2}{D^2 + \frac{1}{m} d^2} \,.\, g$$

3. Iſt alſo t die Zeit, in welcher der Punkt d einen Schwung macht, ſo hat man (§. 98) für den kleinſtmöglichen Schwung

$$t = \pi \surd \frac{cd}{2\mathfrak{g}} = \pi \surd \frac{\frac{1}{2}(m-l)\left(D^2 + \frac{1}{m} d^2\right)}{\frac{3}{4}(m-l)^2 \,.\, g}$$

$$= \pi \surd \frac{D^2 + \frac{1}{m} d^2}{3(m-l) \,.\, g}$$

4. Iſt nun cb = l′, ſo hat man für ein einfaches Pendel, in das unſere Schwere wirkt, die Zeit des kleinſtmöglichen Schwunges

$$= \pi \surd \frac{2g}{l'} \quad (\S.\ 96)$$

Und da nach der Aufgabe dieſe Zeit der (no. 3) gleich ſeyn ſoll, ſo hat man

$$\surd \frac{D^2 + \frac{1}{m} d^2}{3(m-l) \,.\, g} = \surd \frac{l'}{2g}$$

alſo

$$\frac{2.(D^2 + \frac{1}{m} d^2)}{3(m-1)} = l'$$

Zuſ. 1.

§. 107. Wäre cA oder l, alſo auch $d = 0$, überdas die Stange ſo dünne, daß $D = m$ geſetzt werden dürfte, ſo hätte man

$$l' = \tfrac{2}{3} m.$$

Zuſ. 2.

§. 108. Wäre irgendwo, z. B. in k (fig. 34) noch ein Gewicht $= p$ angebracht, das ohne merklichen Fehler ſo angeſehen werden dürfte, als ob es in dem einzigen Punkte k beiſammen vereinigt wäre, ſo wird fürs erſte der Schwerpunkt d ſeine Stelle verändern, z. B. in e rücken, und es wäre ietzt

$$\mathfrak{P}.ce^2 = (\tfrac{1}{3} D^2 + \frac{1}{m} d^2).P + ck^2.p$$

welches

$$\mathfrak{P} = \frac{(\tfrac{1}{3} D^2 + \frac{1}{m} d^2).P + ck^2.p}{ce^2}$$

gäbe, alſo

$$\mathfrak{g} = \frac{P+p}{\mathfrak{P}}.g = \frac{(P+p).ce^2}{(\tfrac{1}{3} D^2 + \frac{1}{m} d^2).P + ck^2.p}.g$$

da dann $de = \frac{dk.p}{P+p}$ wäre (§. 35),

alſo

alſo $ce = cd + de = \frac{1}{2}(m - l) + \frac{dk.p}{P + p}$

Und nun hätte man für die Zeit des kleinſten Schwunges

$$t = \pi \sqrt{\frac{ce}{2g}}$$

$$= \pi \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}(m-l) + \frac{dk.p}{P+p}\right).\left(\left(\frac{1}{3}D^2 + \frac{1}{m}d^2\right).P + ck^2.p\right)}{2.(P+p).ce^2.g}}$$

$$= \pi \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}(m-l) + \frac{dk.p}{P+p}\right).\left(\left(\frac{1}{3}D^2 + \frac{1}{m}d^2\right).P + ck^2.p\right)}{2(P+p).\left(\frac{1}{2}(m-l) + \frac{dk.p}{P+p}\right)^2.g}}$$

die dann wie vorhin $= \pi \sqrt{\frac{l'}{2g}}$ ſeyn müßte. Alſo

$$l' = \frac{\left(\frac{1}{2}(m-l) + \frac{dk.p}{P+p}\right).\left(\left(\frac{1}{3}D^2 + \frac{1}{m}d^2\right).P + ck^2.p\right)}{(P+p).\left(\frac{1}{2}(m-l) + \frac{dk.p}{P+p}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{3}D^2 + \frac{1}{m}d^2\right).P + ck^2.p}{(P+p).\left(\frac{1}{2}(m-l) + \frac{dk.p}{P+p}\right)}$$

wo der Nenner =

$$\frac{1}{2}(m-l).P + \left(\frac{1}{2}m - l\right).p + dk.p$$
$$= \frac{1}{2}(m-l).P + (cd + dk).p$$

iſt, alſo

$$l' = \frac{\left(\frac{1}{3}D^2 + \frac{1}{m}d^2\right).P + ck^2.p}{\frac{1}{2}(m-l).P + ck.p}$$

Zuſ. 3.

§. 109. Wäre cA, alſo auch l und d = o, und k unten bei B (fig. 34) angebracht, alſo ck = m, ſo wäre

$$l' = \frac{\frac{1}{3} D^2 . P + m^2 . p}{\frac{1}{2} mP + m . p}$$

und für eine ſehr dünne Stange, deren Dicke (n §. 103) in Vergleichung mit der Länge m unbedeutend wäre, ſo daß man m ſtatt D ſetzen könnte,

$$l' = \frac{\frac{1}{3} P + p}{\frac{1}{2} P + p} . m$$

$$= \frac{2 P + 6 p}{3 P + 6 p} . m$$

oder auch

$$l' = \left(1 - \frac{P}{3 P + 6 p}\right) . m$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3 + 6 . \frac{p}{P}}\right) . m$$

Anm. 1. Wäre an eine dünne cylindriſche Stange, wie AB (fig. 35) unten eine Linſe angeſchroben, deren Mittelpunkt k wäre, und die ihren Aufhängepunkt bei c hätte; oder wäre, wie (fig. 36), eine kleine Kugel, deren Mittelpunkt k wäre, mit einem dünnen Faden bei c aufgehängt, ſo ſieht man leicht, wie in dieſen Fällen die vorſtehenden Formeln anzuwenden wären. Es wäre nämlich (Fig 35) das Gewicht der Stange AB = P, das der Linſe = p, die Länge cA = l, die cB = m, und k der Mittelpunkt der Linſe. Ebenſo
(Fig 36) das Gewicht des Fadens cB = P, das der Kugel = p, die Länge l alſo auch d = o, die cB = m, und k der Mittelpunkt der Kugel.

In beiden Fällen dürfte man, wenn Stange und Faden in Vergleichung mit ihrer Länge dünne genug wären, D = m nehmen, daher auch die cylindriſche Geſtalt von Stange und Faden die Berechnung in dieſem Falle nicht abändert. Dabei wird übrigens ck vielmal gröſſer angenommen als der Durchmeſſer der Linſe oder der Kugel.

Setzt man $ck = \frac{v}{w} \cdot m$, ſo hat man allemal in dieſen Fällen

$$l' = \frac{\frac{1}{3} m^2 \cdot P + \frac{v^2}{w^2} \cdot m^2 \cdot p}{\frac{1}{2} m P + \frac{v}{w} \cdot m \cdot p} \quad (☾$$

$$= \frac{2P + 6 \cdot \frac{v^2}{w^2} \cdot p}{3P + 6 \cdot \frac{v}{w} p} \cdot m$$

wo dann $\frac{v}{w}$ (fig. 35) ein eigentlicher und (fig. 36) ein uneigentlicher Bruch iſt.

Die allgemeine Regel, welche in ☾ enthalten iſt, läßt ſich ſo ausdrücken:

Um aus dem zuſammengeſetzten Pendel die Länge eines mit ihm korreſpondirenden einfachen zu beſtimmen, dividire man das Moment der Trägheit des zuſammengeſetzten durch ſein ſtatiſches Moment, den Aufhängepunkt als Umdrehungspunkt betrachtet.

Kann P in Vergleichung mit p für Null geachtet werden, wie (fig. 36) der gewöhnliche Fall iſt, ſo kommt

$$l' = \frac{v}{w} \cdot m = ck$$

Dabei wird vorausgeſetzt, daß $ck^2 \cdot p$ ohne merklichen Fehler für das Mom. der Trägheit von p angenommen werden könne.

Anm. 2. Der angeſchrobene Körper bei B mag eine Kugel oder eine Linſe ſeyn, ſo iſt in aller Schärfe das Moment der Trägheit von p oder dem angeſchrobenen Körper niemals $= ck^2 \,.\, p$, ſondern, wenn p eine Kugel iſt, $= (ck^2 + \frac{2}{5} r^2) \,.\, p$, wenn r den Halbmeſſer Bk der Kugel oder der Linſe bedeutet, wie die höhere Analyſis ergiebt; alſo genau

$$l' = \frac{\frac{1}{3} m^2 P + \left(\frac{v^2}{w^2} . m^2 + \frac{2}{5} r^2\right) . p}{\frac{1}{2} m P + \frac{v}{w} . m . p}$$

folglich, wenn P bei Seite geſetzt werden kann,

$$l' = \frac{v}{w} . m + \frac{2\,wr}{5 . vm} . r$$

$$= ck + \frac{2\,wr}{5w . ck} . r = ck + \frac{2\,r}{5 . ck} . r$$

d. i. in dieſem Falle liegt der Mittelpunkt des Schwunges in der Tiefe $\frac{2\,r}{5 . ck} . r$ unter dem Mittelpunkt der Kugel.

Aufg. 19.

§. 110. **Mittelſt eines Pendels von willkührlicher Länge die eines einfachen Sekundenpendels, d. h. eines einfachen Pendels, das die kleinſten Schwünge in 1 Sek. macht, für den Erdſtrich zu beſtimmen, wo man wohnt.**

Aufl. 1. Man beobachte für die genau beſtimmte Länge einer Stunde die Anzahl von Schwüngen, die das Pendel macht, wenn es nur um ein paar Grade aus der lothrechten Lage erhoben wird. Sie ſey nach der Beobachtung = N, ſo läßt ſich ohne merklichen Fehler dieſe Anzahl N als die Anzahl der kleinſten Schwünge für eine Stunde annehmen.

2. Man

2. Man ſuche die Länge des mit dem gebrauchten Pendel correſpondirenden einfachen Pendels nach §. 109. Sie ſey = 𝔏.

3. So hat man, wenn die geſuchte Länge = l' geſetzt wird, nach (§. 98)

$$N : 3600 = \sqrt{l'} : \sqrt{\mathfrak{L}}$$

alſo

$$l' = \frac{\mathfrak{L} \cdot N^2}{3600^2}$$

Anm. Weil die von der Umdrehung der Erde um ihre Axe entſtehende Schwungkraft die Wirkung der Schwere um etwas vermindert, ſo iſt der Werth von l' für die verſchiedenen Polhöhen verſchieden. Iſt nämlich

die wahre Polhöhe	ſo iſt die Länge des einfachen Sek. Pendels
15°	439, 477 Par. Lin.
20	439, 578
30	439, 856
45	440, 236
60	440, 617
75	440, 897
90	441, 000

ſ. Neue Abh. der Kurf. Akad. zu Erfurth I. B. Es werden hierbei kleinſte Schwünge verſtanden. Man kann bei einem Pendel, wie fig. 36, dieſe Längen geradezu für ck beibehalten. Für iedes Pendel, wie (fig. 35), giebt ſich ck aus der letzten Formel §. 108, da man dann für ſehr dünne Stangen m, l für D, d ſchreiben kann.

Aufg. 20.

§. 111. Den Werth von g, d. h. die Tiefe des freien Falls (in der Luſt) in der erſten Sekunde für den Erdſtrich zu finden, für den man die Länge

des einfachen Sekundenpendels bei kleinſten Schwüngen kennt.

Aufl. Die Gleichnng $t = \pi \surd \frac{l'}{2g}$ (§. 97) giebt für eine Sekunde

$$1 = \pi \surd \frac{l}{2g}$$

alſo auch

$$\frac{\pi^2 . l}{2g} = 1 \text{ und } g = \frac{\pi^2 . l'}{2}$$

wo man die Werthe von l aus dem vor. §. nehmen kann.

Zehentes Kapitel.

Von der Wirkung der Schwungkräfte bei Körpern, die ſich in einem Kreiſe bewegen.

Aufg. 21.

§. 112. In dem feſten Punkt c (fig. 37) iſt ein Faden cm befeſtiget, an deſſen Ende ein Atom m einer Maſſe angebracht iſt, der ſich vermöge einer ihm beigebrachten Geſchwindigkeit in einem Stück des Kreisbogens fmag bewegt: man ſoll die Kraft beſtimmen, mit welcher ſich der Atom in ieder Stelle des Bogeus nach der Richtung des Halbmeſſers vom Mittelpunkt c zu entfernen ſucht.

Aufl.

Aufl. 1. Der Atom befinde ſich ietzt in m, ſeine Geſchwindigkeit an dieſer Stelle ſey c, ſo würde er ſich mit dieſer Geſchwindigkeit nach der Tangente mo fortbewegen, woferne er nicht durch den in c befeſtigten Faden hieran verhindert würde.

2. ma ſey ein Element des Bogens (Geom. §. 109), das der Atom in dem Zeittheilchen dt durchlauft; man verlängere die ca, welche das Element ma ganz auf der einen Seite liegen läßt, bis n, wo ſie die Tangente mo trifft, ſo iſt n der Punkt, in welchen der Atom d am Ende der Zeit dt treten würde, wenn er nicht in dieſem Augenblick durch den Faden gehalten würde.

3. Die na iſt nur ein einziger Raumpunkt und vermöge (Geom. §. 109)

$$1 : ma = 1 : \sqrt{2r} = \sqrt{2r} : 2r$$

wenn r oder des Kreiſes Halbmeſſer in Raumpunkten ausgedruckt wird.

Wird nun c gleichfalls in Raumpunkten ausgedruckt, ſo hat man

$$ma = \sqrt{2r} = c \,.\, dt$$

alſo

$$1 : cdt = cdt : 2r$$

oder

$$c^2 (dt)^2 = 2r$$

4. Nun iſt, wenn die zu c gehörige Höhe (§. 87) v heißt, $c^2 = 4gv$ (§. 85. no. 9), alſo

$$4gv (dt)^2 = 2r$$

und

$$1 : g (dt)^2 = 2v : r$$

Hier

Hier iſt aber 1 die Ortsänderung, welche der Atom in der Zeit dt längſt dem Halbmeſſer machen würde, um ſich von c zu entfernen, wenn er durch den Faden nicht gehalten würde; und $g(dt)^2$ die Summe von Ortsänderungen, welche er beim freien Falle in der Zeit dt vermöge unſerer Schwere machen würde (§. 85. no. 4); wird alſo die beſchleunigende Kraft unſerer Schwere = 1, und die, welche in den Atom längſt dem Halbmeſſer wirkt, = p geſetzt, ſo iſt

$$1 : g(dt)^2 = p : 1$$

daher

$$p : 1 = 2v : r$$

und

$$p = \frac{2v}{r}$$

Da hier v ſich gleichfalls auf Raumpunkte bezieht, wenn r in Raumpunkten ausgedruckt wird, ſo kann man auch v durch jede andere Einheit ausdrucken, wenn nur r durch dieſelbe Einheit ausgedruckt wird.

Erklärung 30.

§. 113. Die Kraft p, vermöge der der Atom m bei ſeiner Bewegung durch das Element eines Kreiſes ſich vom Mittelpunkt c dieſes Kreiſes zu entfernen ſtrebt, heißt die in den Atom wirkende Schwungkraft, auch Centrifugalkraft (vis centrifuga). Die Kraft, welche im Mittelpunkte des zum Element gehörigen Kreiſes (wie in c fig. 37) der Centrifugalkraft entgegenwirkt (wie ſolches bei der vorherigen Vorſtellung der Faden that), heißt die Normalkraft, ſie mag der Centrifugalkraft gleich ſeyn oder nicht.

Zuſ.

Zuſ. 1.

§. 114. Weil $p = \frac{2V}{r} = \frac{2 \cdot c^2}{4gr} = \frac{c}{2gr} \cdot c$ und für alle Atomen eines um einen gemeinſchaftlichen Punkt bewegten Körpers $\frac{c}{r}$ einerlei Werth hat, ſo iſt für die verſchiedenen Atomen eines ſolchen Körpers die Schwungkraft p der Umlaufsgeſchwindigkeit c, folglich auch dem Halbmeſſer r, der zu iedem Atom gehört, oder ſeiner Entfernung vom Umdrehungspunkt proportional.

Man darf alſo, um die Schwungkraft eines Körpers zu erhalten, nur die ganze Maſſe ſo betrachten, als wenn ſie in ſeinem Schwerpunkt vereinigt wäre, ſo daß man v und r nur für den Schwerpunkt angeben darf.

Zuſ. 2.

§. 115. Wenn die Normalkraft N, die auf den Körper, deſſen Schwerpunkt ſich z. B. iezt in m (fig. 37) befindet, wirkt, gröſſer oder kleiner als $\frac{2V}{mc}$ iſt (wo mc den Halbmeſſer in der Figur bezeichnet), ſo kann ſich der Schwerpunkt bei fortgeſetzter Bewegung nicht im Kreiſe mg, deſſen Halbmeſſer mc iſt, erhalten.

Iſt dabei N ſelbſt veränderlich, ſo kann nach dem beſonderen Geſetze dieſer Veränderlichkeit die Bahn des bewegten Schwerpunkts von einer Kreisbahn ſehr verſchieden ausfallen, ſie kann z. B. elliptiſch, ſpiralförmig u. ſ. w. werden.

Würde

Würde die Normalkraft N in m plötzlich vernichtet, ſo würde der Körper durch nichts verhindert, der Richtung des Kreiselements mn nach o zu folgen. Er würde alſo ſeine Bewegung nach der Richtung der Tangente in o geradlinigt fortſetzen.

Anm. Im Ausdruck $p = \frac{2v}{r}$ iſt r eigentlich nicht die Entfernung vom anziehenden Punkte, ſondern von dem Mittelpunkte des Kreiſes, in deſſen Elemente ſich des Körpers Schwerpunkt iedesmal bewegt, die dann von iener ſehr verſchieden ſeyn kann. Für N = o wird daher $r = \infty$ und $p = \frac{2v}{\infty} = o$.

Uebrigens behält die Beſtimmung von p ihre Richtigkeit, d. h. ſie bleibt allemal $= \frac{2v}{r}$, es mag der iedesmalige Werth von v wie man will beſchaffen, veränderlich oder unveränderlich ſeyn. Im letzteren Falle ſetzt der Schwerpunkt des Körpers ſeinen Weg bloß vermöge der Trägheit der Maſſe fort. Im erſteren müßte noch eine beſondere Kraft nach der Richtung der iedesmaligen Tangente in den Körper wirken, die dann ganz richtig Tangentialkraft genennt wird. Da dieſe zum Daſeyn der Schwungkraft oder Centrifugalkraft gar nicht nöthig iſt, ſo iſt es unrichtig, die Centrifugalkraft mit der Tangentialkraft zu verwechslen.

Sobald der Schwerpunkt des Körpers die Kreisbahn verläßt (wenn z. B. die Bahn elliptiſch wird), ſo hört auch, die Endpunkte der Hauptaxen ausgenommen, die Kraft, mit welcher der feſte Punkt c den Körper anzieht, auf, eine Normalkraft zu ſeyn, weil ſie ietzt nicht mehr ſenkrecht auf das Element der Bewegungsbahn wirkt. Daher heißt die Anziehungskraft des feſten Punktes c im Allgemeinen richtiger die Centripetalkraft, die man alſo wiederum nicht mit der Normalkraft verwechſeln darf. Bewegt ſich daher der Schwerpunkt nicht im Kreiſe, ſo iſt (die Endpunkte der Axen ausgenommen) die Centripetalkraft niemals der Centrifugalkraft gerade entgegengeſetzt.

Hydroſtatik.

Hydroſtatik.

Erſtes Kapitel.

Vom Druck des Waſſers unter ſich und an die Wände von Gefäſſen und Röhren.

Vorerinnerung.

§. 1. Die berühmteſten Schriftſteller, wie Käſtner, Karſten u. a. ſind in der Feſtſetzung der erſten Hydroſtatiſchen Grundlehren der von Dan. Bernoulli gebrauchten Methode gefolgt, und haben auf dieſe Weiſe für den Satz „daß der Druck einer von Wänden eingeſchloſſenen Waſſermaſſe auf irgend ein von ihr berührtes Element einer Wandfläche dem Gewicht eines Waſſerprismas gleich ſey, welches die lothrechte Höhe des Waſſerſpiegels über dem Element zur Höhe und das Element ſelbſt zur Grundfläche habe" einen ſcharfen Beweiß zu geben geglaubt.

Nach vielfältiger Prüfung dieſer Beweißart halte ich mich überzeugt, daß damit eigentlich gar nichts bewieſen wird.

Wenn nämlich unter der wagrechten Oberfläche AB (fig. 1) der in einem Behältniſſe befindlichen Waſſermaſſe das zwiſchen gewiſſen Gränzen mnopqrstm liegende Waſſer, das man ſich als ein irreguläres mit Waſſer angefülltes Gefäß denken kann, welches unten einen wagrechten Querſchnitt mn hätte, mit der lothrecht über mn ſtehenden Waſſerſäule in gemeinſchaftlicher Ruhe beharrt, ſo folgt hieraus weiter nichts, als daß der Widerſtand, welchen die Waſſermaſſe mnpqsm dem Druck der lothrechten Waſſerſäule mnvw entgegenſetzt, dem Gewicht dieſer Waſſerſäule gleich seyn müſſe, nicht aber, daß der Druck des in dem Raume mnpqsm befindlichen Waſſers gegen mn demſelben Gewicht gleich ſey, ſo wenig der Widerſtand einer feſten Tafel, auf der ein Zentner ruht, die Kraft ausdruckt, mit welcher die Tafel ſich aufwärts zu bewegen ſtrebt.

Wenn man alſo, wie es bei iener Darſtellung geſchieht, den Schluß machen will, daß der Druck der ſo begränzten Waſſermaſſe auf den Querſchnitt mn dem Gewicht der über mn ſtehenden lothrechten Waſſerſäule gleich ſey, ſo muß man zuvor noch beweißen, daß auſſer den von pq bis in mn herab durch die ganze begränzte Waſſermaſſe wirkenden Preſſungen ſonſt nichts vorhanden ſey, was dem Beſtreben der Waſſerſäule mnvw, die begränzte Waſſermaſſe unter mn zurückzutreiben, entgegenwirken könnte; ob nicht etwa die mannigfaltige Geſtalt der begränzten Maſſe ſelbſt Hinderniſſe bewirken könne?

Ebenſo wenig folgt aus dem ruhigen Zuſtand der Waſſerſäulen mnvw, stqp (fig. 2), welche bis zur gemeinſchaftlichen durch wq durchgehenden horizontalen Ebene reichen und mit der Waſſermaſſe in ABCD Gemeinſchaft haben, daß, wenn die Oeffnung st verwahrt wird, alsdann das Wandſtück st von unten hin-

hinauf durch die Waſſerſäule mnvw einen Druck erhalte, welcher dem Gewicht einer Waſſerſäule über st von der Höhe nv oder sp gleich ſey. Es iſt unrichtig zu ſagen, das Flächenſtückchen st müſſe iezt die Bewegung nach oben ebenſo verhindern, wie es vorhin die Waſſerſäule spqt that, folglich denſelben Druck nach oben aushalten, den vorhin dieſe Waſſerſäule nach unten ausübte. So könnte man nur dann ſchlieſſen, wann vorausgeſezt würde, daß die Preſſungen ſich von Theilchen zu Theilchen von mn bis st fortpflanzten und wiederum rückwärts von st bis mn.

In der That liegt dieſe lezte Vorausſezung bei der oben erwähnten Beweißart überall ſtillſchweigend zum Grunde. Aber ebendieſer ſtillſchweigend als ausgemacht angenommene Saz war im Grunde von dem gar nicht verſchieden, den man erſt noch beweiſen wollte, und ſo hatte man alſo eigentlich nichts bewieſen, ſondern ſich nur mit einem Beweiße getäuſcht, dem wiſſenſchaftlichen Vortrage aber noch dadurch geſchadet, daß man das Theoretiſche mit dem Empiriſchen vermengt und ſich den eigentlichen Erfahrungsſaz, worauf die ganze Hydroſtatik beruht, verſchwiegen hatte. Soviel zum voraus zur Rechtfertigung des folgenden Vortrags. Auch erinnere ich hier noch, daß ich im Folgenden lothrechte Querſchnitte von Gefäſſen überall ſtatt der Gefäſſe ſelbſt gebrauche, da dann z. B. durchgezogene horizontale Linien für horizontale Flächen gelten.

Erklärung I.

§. 2. Materien, deren Theile einen ſo geringen Zuſammenhang unter einander haben, daß ſie im Stande der Ruhe keine ſchiefe Oberfläche zu bilden und auſſerdem überhaupt keine beſtimmte Form anzu-

nehmen vermögen, als nur inſoferne ſie von feſten Wänden, die ihre Form beſtimmen, begränzt werden, heiſſen hier flüſſig.

Erfahrung 1.

§. 3. Wir haben in der Natur Materien, welchen die (§. 2) erwähnten Eigenſchaften zukommen, z. B. Waſſer, mancherlei geiſtige Getränke, geſchmolzene Metallen, Queckſilber, die Luft u. d. g. Wir bemerken bei ihnen noch zwei Haupteigenſchaften 1) daß ſie alle, die Luft ausgenommen, nur über einer beſtimmten Temperatur als flüſſig erſcheinen; 2) daß einige bei ieder merklichen Aenderung des Drucks, dem ſie ausgeſetzt werden, eine merkliche Aenderung ihrer Dichtigkeit leiden, andere aber bei merklicher Aenderung des Drucks ihre Dichtigkeit nicht merklich ändern. Zu erſteren gehören z. B. unſere atmoſphäriſche Luft, Waſſerdämpfe u. d. g. Zu letzteren gehören Waſſer, Queckſilber, geſchmolzene Metalle u. d. g. Erſtere, die luftförmige Stoffe, gehören zur Aerometrie; letztere, die tropfbarflüſſigen Materien, gehören hierher.

Erklärung 2.

§. 4. Die Hydroſtatik enthält die Lehre vom Gleichgewicht tropfbarflüſſiger Maſſen unter ſich und mit feſten Körpern. Hier iſt hauptſächlich vom Waſſer die Rede.

Anm. Flüſſig ſeyn ſetzt allemal eine Mehrheit von Theilchen voraus, die eben durch den Mangel des Zuſammenhangs unter einander den Charakter der Flüſſigkeit erhalten. Wenn alſo von einem flüſſigen Theilchen die Rede iſt, ſo iſt darunter allemal ſchon eine Mehrheit von Atomen begriffen.

Erfah-

Erfahrung 2.

§. 5. ABCD (fig. 3) ſey ein mit Waſſer angefülltes Behältniß mit einem horizontalen Deckel BC, in welchen prismatiſche Röhren I, II lothrecht eingeſetzt ſind; füllt man nun die I bis n mit Waſſer, ſo ſteigt das Waſſer zugleich in II in die Höhe und das in I bleibt nicht eher ruhig, bis auch das Waſſer in II die Höhe rq erreicht hat, ſo daß nrq in eine einzige Horizontalfläche fällt; die Weiten w, W beider Röhren mögen wie man will verſchieden ſeyn.

Zuſ. 1.

§ 6. Weil auf op im Fall des Gleichgewichts die ganze Waſſerſäule oq drückt, die ſo hoch als die mn iſt, ſo muß nothwendig iedes Waſſertheilchen in op denſelben Druck leiden, den iedes Theilchen in m von dem darüber ſtehenden Waſſer leidet. Dieſes berichtiget anzunehmen, daß iedes Waſſertheilchen den Druck, welchen es von irgend einer Seite leidet, wie hier von mn herab, nach allen Seiten fortſetzt oder daß es ebenſo ſtark nach allen Seiten ringsumher druckt, als es ſelbſt von irgend einer Seite gedruckt wird.

Dieſe Eigenſchaft iſt für die flüſſigen Materien aller Art charakteriſtiſch, ſo daß ſie ſich dadurch weſentlich von feſten Körpern unterſcheiden. Wir müſſen ebendarum auch den tropfbar-flüſſigen Materien Elaſticität zugeſtehen, wenn gleich ihre Zuſammenpreſſung auch bei einer angewendeten ſehr groſſen Gewalt unmerklich bleiben ſollte. Inzwiſchen iſt auch ihre wirkliche Kompreſſibilität für die Sinnen erwieſen (ſ. unten Aerom), und der geringſte Grad von Kompreſſibilität beweißt hier ſchon genug, wenn mit Weg-

nahme des Drucks das erſte Volumen wieder hergeſtellt wird, wie das bei tropfbarflüſſigen Körpern der Fall iſt. Auch wird die wirkliche Kompreſſion durch Springwerke im Augenblick der Eröffnung des Sprungſtocks hinlänglich erwieſen, indem die der Sprungöffnung nahe liegenden Theilchen plötzlich in die Höhe geſchleudert werden, dann aber, bei einer etwas langen Röhrenleitung der Strahl wieder fällt, bevor er ſeine nachher bleibende Höhe erreicht.

Zuſ. 2.

§. 7. Aus dem lothrechten Druck nm könnte nach der Zerlegung der Kräfte keine wagrechte nach mo entſtehen, woferne die einzelen Waſſeratomen wie Punkte einer geraden Linie zuſammengereihet wären. Wenn man aber erwägt, daß ein mit Queckſilber angefüllter Raum 14 mal ſoviel Maſſe enthält als ein gleicher Raum mit Waſſer, ſo iſt ſchon daraus klar, daß nur ein kleiner Theil des mit Waſſer gefüllten Raums wirklich mit Waſſeratomen beſetzt iſt, und daß die Zwiſchenräumchen bei weitem den gröſten Theil ausmachen. Ebendieſes gilt nun auch von feſten Körpern. Aber die gleiche Bewegbarkeit und völlig gleichleichte Trennbarkeit flüſſiger Maſſen nach allen Seiten beweißt uns zugleich die gleiche Lage und Zuſammenſtellung aller Theile gegen einander, dahingegen die Theilchen feſter Körper bei ihrer groſſen Menge von Zwiſchenräumchen doch auch in unzählich vielen Punkten wirklich zuſammenhängen müſſen. Es muß alſo bei den flüſſigen Körpern, deren Theilchen gleichförmig neben einander liegen, eine Kraft vorhanden ſeyn, die ihrer Anziehung Gränzen ſetzt, vermög der ſie ſich daher nur bis auf eine gewiſſe Entfernung einander nähern können, ſo daß ſie ſich in ihrem jedesmaligen Zuſtande nach allen Seiten von einander zu entfernen ſuchen.

ſuchen. Daraus wird begreiflich, daß wenn eine Kraft einige Theilchen in irgend einem beſtimmten Zuſtande einander näher zu bringen ſtrebt, für die geſammte Maſſe dieſes Streben zur Verdichtung merklich werden müſſe, ſo daß alle Theilchen ſich in ſolchen Entfernungen von einander zu halten ſtreben, in welchen ſie ſich gegenſeitig in Ruhe erhalten können, und wobei ſie alſo gleiche Preſſungen auf einander ausüben. Hier ſind daher die an ieder Stelle entſtehenden wagrechten Seitenpreſſungen (wie überhaupt die an einer Stelle entſtehenden Preſſungen nach welcher Richtung man will genommen) der an dieſer Stelle vorhandenen lothrechten Preſſung gleich.

Zuſ. 3.

§. 8. μ (fig. 4) ſey ein Element in der lothrechten Wandfläche, μu ein Röhrchen, das bis zur Ebene des Waſſerſpiegels sr mit Waſſer gefüllt iſt und deſſen Axe mit der Horizontallinie den ſchiefen Winkel α macht, ſo iſt des Waſſerſäulchens μtu kub. Inhalt $= \mu . \mathrm{Coſ}\,\alpha . \frac{tz}{\sin\alpha}$ alſo, wenn k das Gewicht von einem Waſſerwürfel bedeutet, wovon iede Seite in dem angenommenen Maaße ausgedruckt wird, das Gewicht des Waſſerſäulchens $= \frac{\mu . \mathrm{Coſ}\,\alpha . tz . k}{\sin\alpha}$, wofür ich Q ſetzen will.

Der Druck nach ſchiefer Richtung uμ herab wäre alſo $= Q . \sin\alpha$.

Um nun dieſe Waſſerſäule zu verhindern, daß ſie nicht durch die Oeffnung μ herabſinken könnte, müßte eine feſte Fläche (etwa ein Brettchen) bei μ an die innere Wandfläche mit einer Kraft S ſenkrecht ange-

druckt werden, ſo daß $S . \text{Coſ}\,\alpha = Q . \text{ſin}\,\alpha$ oder

$S = Q . \frac{\text{ſin}\,\alpha}{\text{Coſ}\,\alpha}$ (Dyn. §. 52) $= \mu . tz . k$ wäre.

Oder allgemeiner: (fig. 5)

Das Element vw mache welchen Winkel man will mit der horizontalen μz, der $= \beta$ seyn mag; $b\mu$ ſey auf vw ſenkrecht, der Winkel $t\mu z$, welchen die Röhrenaxe mit der wz macht, ſey $= \alpha$, ſo iſt das Gewicht Q des Waſſerfadens in dem engen Röhrchen, wenn des Elements vw Fläche $= \mu$ geſetzt wird, $= \mu . \text{Coſ}\, b\mu t . \frac{tz}{\text{ſin}\,\alpha} . k$; alſo der Druck längſt $t\mu$ herab $= Q . \text{ſin}\,\alpha = \mu . \text{Coſ}\, b\mu t . tz . k$.

Demnach muß an die Oeffnung vw eine feſte Fläche nach μb, ſenkrecht auf dieſe Stelle der Wand, mit einer Kraft S angedruckt werden, ſo daß $S . \text{Coſ}\, b\mu t = \mu . \text{Coſ}.\, b\mu t . tz . k$ wird, oder

$S = \mu . tz . k$ wie vorhin.

Da nun das Waſſer in der Röhre μt nur dann erſt mit dem im Behältniß ins Gleichgewicht kommt, wann es darin bis zu der horizontalen Ebene geſtiegen iſt, in welcher die Oberfläche x liegt, ſo daß $tz = xy$ werden muß, ſo folgt, daß in dieſem Zuſtand des Gleichgewichts der ſenkrechte Druck des Waſſers im Behältniß auf das Element μ allemal $= \mu . h\ k$ ſeyn müſſe, wenn h die lothrechte Tiefe des Elements μ unter dem Waſſerſpiegel x bedeutet; das Element mag welche Lage man will, und das Behältniß welche Geſtalt man will haben.

Die Möglichkeit dieſes Seitendrucks auf das Element μ wird übrigens aus (§. 7) begreiflich.

Zuſ-

Zuſ. 4.

§ 9. Wäre das Gefäß wie (fig. 6) geformt, das auf der einen Seite bis zur horizontalen Ebene vz mit Waſſer gefüllt, auf der andern aber mit einem Deckel ab verſehen wäre, ſo wäre nach (vor. §.) der Druck auf ein Element $\mu = \mu.h.k$, wenn die lothrechte Höhe xy = h geſetzt wird. Denn man darf ſich nur bei μ eine Röhre $v\mu$ unter einem willkührlichen Winkel angebracht denken, ſo findet der vorige Beweiß auch hier ſtatt.

Demnach leiden alle Theilchen der horizontalen Waſſerſchichte y dieſelbe Preſſung, und der Druck auf die ganze Waſſerſchichte y iſt, wenn y ihre Fläche bedeutet, $= y.h.k$; ebenſo iſt der Druck auf den Deckel ab, wenn ſeine vom Waſſer berührte Fläche $= A$, die Höhe mx = H geſetzt wird, $= A.H.k$.

Iſt nun die vom Waſſer berührte Fläche des Deckels (fig. 7) $= A$, die Waſſerhöhe xy = H, ſo iſt der Druck, welchen der Deckel vom Waſſer oberwärts leidet, auf gleiche Weiſe $= A.H.k$, wenn gleich die Röhre xy einen Querſchnitt hätte, der ſehr vielmal kleiner als A wäre.

Zuſ. 5.

§. 10. Alſo iſt der Druck des Waſſers ABDC (fig. 9) auf den horizontalen Boden AB, wenn dieſe Bodenfläche $= A$, die lothrechte Waſſerhöhe mn $=$ H iſt, $= A.H.k$.

Aber der lothrechte Druck, welchen das ganze Gefäß vom Waſſer leidet, bleibt dennoch nur dem Gewicht des Waſſers gleich, womit das Gefäß wirklich angefüllt iſt. Denn es ſey qr ein dünner loth-

rech-

rechter Waſſerfaden, der die Wand BC da berührt, wo die horizontale Schichte vq die Wand trifft, ſo übt die Schichte vq ihre Preſſung, die der Höhe ms = pq zugehört, auf das Wandelement bey q aus, woraus lothrecht nach qp ein Druck entſteht, vermöge deſſen, wenn die Wand hier eine lothrechte Oeffnung hätte, das Waſſer bis p hinaufſteigen würde. Das Element q hat alſo nach oben einen Druck auszuhalten, der dem Gewicht des Waſſerfadens ms gleich iſt. Daher iſt der Druck, den das Gefäß nach pr leidet, noch = dem Gewicht des Waſſerfadens pr — pq = qr. Da dieſes von ieder Stelle q gilt, ſo erhellet daraus die Wahrheit des behaupteten Satzes.

Zuſ. 6.

§. 11. Würde das mit Waſſer gefüllte Gefäß ABCDEFGHIA (fig. 8) durch einen Kolben v nach wv mit einer Kraft gepreßt, die = P wäre, ſo daß P durch ein Gewicht ausgedruckt würde, ſo würde der Erfolg derſelbe ſeyn, wenn ſtatt des Kolbens v eine Waſſerſäule EKLF an den horizontalen Querſchnitt EF andruckte, wofern nur, die lothrechte Höhe EK = H und den Querſchnitt EF oder des Kolbens Grundfläche = A geſetzt, $H.A.k = P$ oder $H = \frac{P}{A.k}$ wäre.

Demnach iſt in dieſem Falle die Preſſung in irgend einer Schichte μt, die in der horizontalen μs liegt, und deren Fläche ich a nennen will, = $Ks.a.k$, oder, wenn $Es = h$ iſt, = $(H-h).a.k$ $= (\frac{P}{A.k} - h).a.k = \frac{a}{A}.P - h.a.k$, oder

wenn

wenn die Preſſung in μt durch ein Gewicht p ausgedruckt wird.

$$p = \left(\frac{P}{A} - hk\right) . a$$

Daher der Druck auf das Element μ

$$= \left(\frac{P}{A} - hk\right) . \mu$$

Aufg. 1.

§. 11. ABCD (fig. 10) ſey eine lothrechte Wand eines bis mn mit Waſſer angefüllten Gefäſſes; edcf ſey ein auf dieſer Wandfläche genommenes Rektangel; man ſoll den Druck des Waſſers auf dieſes Rektangel beſtimmen.

Aufl. vw ſey gleichfalls horizontal, und ve = vd; pq ſey eine willkührlich genommene horizontale Raumlinie und va = vp; ed ſey = h, alſo ev = $\frac{1}{2}$h; vp = x, ſo iſt

$$ea = \tfrac{1}{2}h + x \text{ und } ep = \tfrac{1}{2}h - x$$

alſo die Preſſungen aller Theilchen in pq und ab zuſammengenommen, wenn der ſchmale Streifen pq = μ geſetzt wird,

$$= (\tfrac{1}{2}h + x) . \mu . k + (\tfrac{1}{2}h - x) . \mu . k$$
$$= h . \mu . k$$

Dieſes gilt für ieden Werth von x, alſo für iedes Paar Streifen. Das ganze Rektangel beſtehe aus n ſolchen Streifen, ſo iſt die Summe aller Preſſungen

$$= \tfrac{1}{2} n . h . \mu . k$$

Es iſt aber n . μ = der Fläche des ganzen Rektangels efcd = h . b, wenn ſeine Grundlinie dc = b geſetzt wird, alſo

der geſammte Druck = $\frac{1}{2}h^2 . b . k$.

Zuſ.

Zuſ.

§. 12. Läge ab in einer willkührlichen Tiefe ea = v unter dem Waſſerſpiegel, und wäre wie vorhin ed = h, ſo hätte man

Druck auf das Rektangel edcf $= \frac{1}{2} h^2 . b . k$

Druck auf das Rekt. eabf $= \frac{1}{2} v^2 b . k$

alſo

Druck auf das Rekt. abcd $= \frac{1}{2} (h^2 - v^2) . bk$

Anm. Die Berechnung des Drucks auf andere Flächen iſt für dieſe Anfangsgründe entbehrlich, da ſolche Formeln bei Maſchinen, und überhaupt wo von Bewegung die Rede iſt, doch keinen Nutzen haben.

ſ. mein Handb. der Maſchinenl. S. 86.

Zweites Kapitel.

Vom Druck des Waſſers auf ſchwimmende oder untergetaugte Körper, und der daraus flieſſenden Beſtimmung der ſpecifiſchen Schwere feſter Körper.

Aufg. 2.

§. 13. An dem feſten Balken DE oder ſonſt an einem feſten Punkt iſt ein Faden mit einem feſten Körper A angebracht, der ganz ins Waſ-

Waſſer eingetaugt iſt; man ſoll den lothrechten Druck beſtimmen, den das Waſſer auf dieſen Körper von unten hinauf ausübt.

Aufl. Eine Waſſermaſſe, die denſelben Raum A ausfüllte, würde ſich an dieſer Stelle ruhig verhalten; dieſe Waſſermaſſe ſucht aber mit ihrem ganzen Gewicht niederzuſinken, alſo muß das umſtehende Waſſer einen Druck auf die Auſſenfläche von A nach oben ausüben, der dem Gewicht der Waſſermaſſe gleich iſt, die den Raum A ausfüllen könnte.

Denſelben Druck hat alſo auch ieder anderer Körper in A auszuhalten.

Zuſ. 1.

§. 14. Wiegt alſo der feſte Körper A mehr als eine Waſſermaſſe von demſelben kubiſchen Inhalt, ſo muß er im Waſſer niederſinken, und ihn zu erhalten, daß er nicht ſinke, iſt eine Kraft nach oben nöthig, die dem Unterſchiede beider Gewichte gleich iſt.

Iſt das Gewicht des Körpers z. B. von B kleiner als das eines gleichen Volumens von Waſſer, ſo muß der Körper B unter dem Waſſer, damit er nicht aufwärts ſteige, von einer Kraft gegen den Boden gehalten oder angezogen werden, die dem Unterſchiede beider Gewichte gleich iſt.

Wird der ſpecifiſch leichtere Körper nicht gegen den Boden gehalten, ſo muß er ſolange ſteigen, bis das Gewicht der Waſſermaſſe, deren Stelle der eingetaugte Theil einnimmt, dem Gewicht des ganzen Körpers gleich iſt, wie der Körper C. In dieſem Falle ſchwimmt der Körper auf dem Waſſer.

Zuſ.

Zuſ. 2.

§. 15. In iedem der drei vorſtehenden Fälle, die nämlich durch die drei Körper A, B, C (fig. 11) ausgedruckt werden, ſteigt das Waſſer über den vor Eintaugung des Körpers vorhandenen Waſſerſpiegel ſo hoch, daß das zwiſchen dem vorigen und ietzigen Waſſerſpiegel befindliche Waſſer ſoviel beträgt, als das Waſſer, welches der eingetaugte Körper aus ſeinem Raume verdrängt oder ſoviel als der Raum, welchen der Körper im Waſſer einnimmt. Und da der Raum, welchen der Körper ſelbſt im Waſſer einnimmt, völlig ſo anzuſehen iſt, als wäre er mit Waſſer ausgefüllt, ſo iſt die Wirkung in Rückſicht auf das ganze Gefäß, die aus dem Eintaugen des Körpers in iedem der drei Fälle erfolgt, ganz dieſelbe, als würde der Körper nicht eingetaugt, und dagegen ſoviel Waſſer zugegoſſen, als den Raum ausfüllt, welchen der Körper im Waſſer einnimmt.

Das Gewicht des ganzen Gefäſſes wird alſo durch ieden der drei Körper A, B, C um ſo viel vergröſſert, als das Gewicht des Waſſers ausmacht, deſſen Raum der eingetaugte Körper oder ſein eingetaugter Theil einnimmt.

Zuſ. 3.

§. 16. Wenn die ſpec. Schwere des auf dem Waſſer ſchwimmenden feſten Körpers durch ψ, ſein kubiſcher Inhalt durch K, die ſpec. Schwere des Waſſers, worauf er ſchwimmt, durch ϕ, der kub. Inhalt vom eingetaugten Theil des Körpers durch $\mathfrak{X}$ ausgedruckt wird, überdas das Gewicht des feſten Körpers = P, das Gewicht des durch ihn verdrängten Waſſers = p iſt; ſo hat man

$$P : p = K . \psi : \mathfrak{X} . \phi$$

aber

aber $P = p$ (§. 13) alſo auch

$$K . \psi = \mathfrak{X} . \phi$$

oder $$\mathfrak{X} : K = \psi : \phi.$$

Lehrſ. 1.

§. 17. Ein ſchwimmender Körper C (fig. 11) kann nur in einer ſolchen Lage in Ruhe beharren, bei welcher ſein Schwerpunkt o mit dem Schwerpunkt v der von dem ſchwimmenden Körper verdrängten Waſſermaſſe in eine einzige lothrechte Linie fällt.

Bew. Wäre C nicht vorhanden und dagegen der Raum, welchen dieſer Körper unter dem Waſſerſpiegel einnimmt, mit Waſſer ausgefüllt, ſo wäre alles im Stande der Ruhe. Es muß aber die Richtungslinie des mittleren Drucks, den alle um die erwähnte Waſſermaſſe oder um den ſchwimmenden Körper ringsherum liegenden Waſſertheilchen nach oben ausüben, der Linie des mittleren Drucks, den die erwähnte Waſſermaſſe vermöge der Schwerkraft ausübt, gerade entgegengeſetzt ſeyn, woferne Gleichgewicht erfolgen ſoll. Demnach geht die Linie des mittleren Drucks, welchen das Waſſer im Gefäſſe rings um den Raum herum, den der Körper C unter dem Spiegel einnimmt, nach oben ausübt, durch den Schwerpunkt der aus dieſem Raum verdrängten Waſſermaſſe, und die Linie des mittleren Drucks, welchen der Kö per C vermöge der Schwere ausübt, muß alſo, woferne er mit den Preſſungen des Waſſers im Gleichgewicht ſeyn ſoll, jener gerade entgegengeſetzt ſeyn, d. i. ſein Schwerpunkt muß mit dem Schwerpunkt der von ihm verdrängten Waſſermaſſe in einerlei Vertikallinie liegen.

Anm. Dieſe Foderung verbunden mit der, daß der ſchwimmende Körper ſich ſo tief eintaugen muß, bis das Waſſer, deſſen Raum er unter dem Spiegel einnimmt, ſoviel als der ſchwimmende Körper wiegt, beſtimmt die möglichen Lagen für den ſichern oder feſten Stand eines auf dem Waſſer ſchwimmenden Körpers. Nähere Unterſuchungen hierüber ſind für dieſe Anfangsgründe theils zu ſchwer, theils ohne erheblichen Nutzen für die Ausübung, wo man immer geradezu die Erfahrung zu Rathe zieht. Ich belaſſe es daher hier nur bei der allgemeinen Bemerkung, daß der feſte Stand eines ſchwimmenden Körpers deſto mehr geſichert iſt, ie tiefer der Schwerpunkt deſſelben unter dem Mittelpunkt der Gröſſe ſeines eingetaugten Theils liegt.

Aufg. 3.

§. 18. Ein ſenkrechter Kegel abc (fig. 12) wird mit der Spitze unter Waſſer geſetzt, ſo daß ſeine Axe dc in eine lothrechte Lage kommt, das Verhältniß ſeiner ſpecifiſchen Schwere zu der des Waſſers iſt gegeben z. B. $= \psi : 1$; der Durchmeſſer ſeiner Grundfläche ab ſey $= D$, ſeine Höhe cd $= h$; man ſoll die Tiefe beſtimmen, in der er ſich ruhig erhält.

Aufl. Man nehme auf des Kegels Axe cd die $co = \frac{3}{4} cd$, ſo iſt o ſein Schwerpunkt (Dyn. §. 72). Taugt er ſich bis zur Tiefe cv ein, und nimmt man nun $cr = \frac{3}{4} cv$, ſo iſt r der Schwerpunkt der aus pcq verdrängten Waſſermaſſe (Dyn. a. a. O.), alſo liegen r und v in einer lothrechten Linie, wie für den Stand des Gleichgewichts erfodert wird (§. 16).

Jetzt muß nur noch cv beſtimmt werden.

Es ſey $cv = x$, des Kegelſtücks cpq kubiſcher Inhalt $\mathfrak{X}$, der Inhalt des ganzen Kegels $= K$, ſo hat man

$$\mathfrak{X} : K = x^3 : h^3$$

oder

oder $\mathfrak{X} = \frac{x^3}{h^3} . K$; es iſt aber auch (§. 16)

$$\mathfrak{X} : K = \psi : 1 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{X} = \psi . K$$

alſo $\frac{x^3}{h^3} = \psi$ und $x = h . \sqrt[3]{\psi}$

Aufg. 4.

§. 19. Vorausgeſetzt, daß man ein Werkzeug habe, wodurch ſich genaue Vergleichungen zwiſchen den Gewichten verſchiedener Materien anſtellen laſſen, die ſpecifiſchen Schweren verſchiedener Materien, die gröſſer als die des Waſſers ſind, durch ihr Verhalten im Waſſer zu beſtimmen.

Aufl. 1. Das Gewicht eines feſten Körpers A in freier Luft heiſſe $\mathfrak{A}$, im Waſſer ſey es noch $= \mathfrak{a}$, ſeine ſpec. Schwere heiſſe $\mathfrak{G}$, die ſpec. Schwere des Waſſers heiſſe $\mathfrak{g}$, das Gewicht einer Waſſermaſſe, die mit dem feſten Körper gleichen kubiſchen Inhalt hat, $\mathfrak{W}$; ſo iſt

$$\mathfrak{G} : \mathfrak{g} = \mathfrak{A} : \mathfrak{W} = \mathfrak{A} : (\mathfrak{A} - \mathfrak{a})$$

alſo $$\mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{A} . \mathfrak{g}}{\mathfrak{A} - \mathfrak{a}}$$

2. Für einen anderen Körper A′ ſollen $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{a}'$ dieſelbe Bedeutung haben, wie $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{a}$ für den Körper A, ſo iſt ebenſo

$$\mathfrak{G}' = \frac{\mathfrak{A}' . \mathfrak{g}}{\mathfrak{A}' - \mathfrak{a}'}$$

alſo

$$\mathfrak{G} : \mathfrak{G}' = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A} - \mathfrak{a}} : \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}' - \mathfrak{a}'}$$

oder $\mathfrak{G} : \mathfrak{G}' = \mathfrak{A} . (\mathfrak{A}' - \mathfrak{a}') : \mathfrak{A}' . (\mathfrak{A} - \mathfrak{a})$

Hiernach laſſen ſich für feſte Körper, die ſpec. ſchwerer als Waſſer ſind, ſolche Tafeln verfertigen wie (Dyn. §. 20.) Für Salze muß man Flüſſigkeiten gebrauchen, worin ſich ſolche nicht auflöſen. So dient z. B. für das Kochſalz, für den vitriolisirten Weinſtein, für das Glauberſalz u. a. m. der Weingeiſt ſtatt des Waſſers.

Zuſ. 1.

§. 20. Um die ſpec. Schwere eines feſten Körpers zu finden, der leichter als Waſſer iſt, darf man ihn nur mit einem ſpecifiſch ſchwereren verbinden, deſſen Gewichtsverluſt unter dem Waſſer man zuvor unterſucht hat. Iſt das Gewicht des ſpec. leichteren in der Luft = $\mathfrak{A}$, des ſpec. ſchwereren Gewicht im Waſſer = c, und das vereinte Gewicht von beiden zuſammen im Waſſer = $\mathfrak{E}$, ſo iſt das Gewicht des ſpec. leichteren im Waſſer noch = $\mathfrak{E} - c$, da man dann im vor. §. $\mathfrak{E} - c$ für a ſchreibt.

Um bei poröſen Körpern das Eindringen des Waſſers zu verhindern, kann man die äuſſeren Poren des ſchon abgewogenen Körpers vor dem Eintaugen mit Unſchlitt verſtopfen. Wenn nun des Körpers Gewicht unter dem Waſſer noch = f befunden wird, ſo muß das Gewicht des Unſchlitts von f abgezogen werden; heißt dieſes l, ſo ſetzt man im vor. §. f — l ſtatt a, und es wird

$$\mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{A} \cdot g}{\mathfrak{A} - (f - l)} = \frac{\mathfrak{A} \cdot g}{\mathfrak{A} + l - f},$$

wo $\mathfrak{A}$ das Gewicht des trocknen, $\mathfrak{A} + l$ das Gewicht des mit Unſchlitt beſchmierten Körpers iſt.

Zuſ. 2.

§. 21. Man druckt die ſpecifiſchen Schweren der Körper gewöhnlich für g = 1 oder für eine 1 mit

mit Nullen aus, z. B. für $g = 1000$ oder $= 10000$. Im erſten Fall hat man alſo im vor. §.

$$\mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A} - a}$$

im andern Falle

$$\mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A} - a} \cdot 1000 \text{ oder } = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A} - a} \cdot 10000.$$

Zuſ. 3.

§. 22. Auf die verſchiedene Wärme muß hierbei Rückſicht genommen werden, weil dieſe die Körper ausdehnt oder die Menge der in einem beſtimmten Raume enthaltenen Atomen eines Körpers vermindert, wovon die Aerometrie näheren Unterricht geben wird. Daher müſſen vergleichen Verſuche zur Beſtimmung der Verhältniſſe der Dichtigkeiten oder der ſpec. Schweren bei einerlei Temperatur der verſchiedenen Körper angeſtellt und die gefundenen Verhältnißzahlen auch nur auf Körper derſelben Temperatur angewendet werden.

Aufg. 5.

§. 23. Ein Körper, deſſen Gewicht P gegeben iſt, ſey aus zwei verſchiedenen Materien A, B zuſammengeſetzt, ſo daß ſein Volumen ſoviel beträgt, als die Volumina beider Materien vor der Zuſammenſetzung zuſammengenommen einnahmen; die ſpecifiſchen Schweren von A, B ſeyen α, β; die des Waſſers $= 1$ geſetzt; man ſoll die Gewichte von A und B beſonders beſtimmen.

Aufl. 1. Das Gewicht von A heiſſe $\mathfrak{A}$, das von B heiſſe $\mathfrak{B}$, ſo iſt

$$P = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}, \text{ alſo } \mathfrak{A} = P - \mathfrak{B}$$

2. Die Materie A verliehrt im Waſſer das Gewicht $\frac{\mathfrak{A}}{\alpha}$, die B das Gewicht $\frac{\mathfrak{B}}{\beta}$; das Gewicht, welches der zuſammengeſetzte Körper im Waſſer vermöge eines angeſtellten Verſuches verliehrt, heiſſe V, ſo hat man

$$V = \frac{\mathfrak{A}}{\alpha} + \frac{\mathfrak{B}}{\beta}$$

$$= \frac{P - \mathfrak{B}}{\alpha} + \frac{\mathfrak{B}}{\beta} \text{ (no. 1)}$$

3. Demnach

$$\alpha . \beta . V = \beta . P - \beta . \mathfrak{B} + \alpha . \mathfrak{B}$$
$$= \beta . P + (\alpha - \beta) . \mathfrak{B}$$

Daher

$$\mathfrak{B} = \frac{\alpha\beta . V - \beta . P}{\alpha - \beta}$$

und nnn (no. 1)

$$\mathfrak{A} = P - \frac{\alpha\beta . V - \beta . P}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{\alpha P - \beta P - \alpha\beta . V + \beta P}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{\alpha P - \alpha\beta . V}{\alpha - \beta}$$

Oder auch

$$\mathfrak{A} = \frac{P - \beta . V}{\alpha - \beta} . \alpha$$

$$\mathfrak{B} = \frac{\alpha V - P}{\alpha - \beta} . \beta$$

Ex. Eine aus Blei A und Zinn B vermiſchte Maſſe wiege 120 ℔ = P, ſie verliehre im Waſſer 14 ℔ = V; iſt nun die ſpec. Schw. des Bleies $\alpha = 11,35$; die des Zinns $\beta = 7,29$; ſo erhält man

$$\mathfrak{A} = \frac{120 - 7,29 \cdot 14}{11,35 - 7,29} \cdot 11,35$$

$$= 50,15$$

alſo $\mathfrak{B} = 120 - 50,15 = 69,85$

Setzt man $\alpha = 11,5$ und $\beta = 7,4$; ſo findet man

$$\mathfrak{A} = \frac{120 - 7,4 \cdot 14}{11,5 - 7,4} \cdot 11,5 = 46$$

alſo $\mathfrak{B} = 120 - 46 = 74.$

Anm. Die Erfahrung hat gelehrt, daß Materien verſchiedener Art, die ſich mit einander vermiſchen laſſen, nach ihrer Vermiſchung nicht die Summe der Räume einnehmen, welche ſie vor der Vermiſchung einzelen einnahmen, daher auch das vorſtehende Verfahren die Werthe von 𝔄 und 𝔅 nicht ganz genau giebt.

f. Gellert in Comment. Ac. Petrop. T. XIII. Kraft ib. T. XIV. Zeiher, mixtionum metallicarum examen hydroſtaticum, Wittenb. 1764. Kaeſtner de mixtor. examine hydroſt. in Comment. nou. Soc. Sc. Gott. ad ann. 1775. Bergenſtierna, Anmerkungen über die Gußprobe auf Zinn und Bley, in den Neuen Schwed. Abhandl. I. B. 1780, und in Crells neueſten Entd. VIII. Th. Die hierher gehörige Tafel findet man unter denen am Ende dieſes Buchs angehängten Tabellen.

Drittes Kapitel.

Vom Druck verſchiedener flüſſiger Maſſen, beſonders inſoferne ſie vermiſcht ſind, und von Aräometern.

Aufg. 6.

§. 24. Verhältnißzahlen für die ſpecifiſchen Schweren verſchiedener flüſſiger Materien mittelſt untergetaugter feſter Körper zu finden, die von den gegebenen flüſſigen Materien keine Aenderung ihrer Geſtalt leiden, auch von ſolchen nicht durchdrungen werden.

Aufl. Mittelſt eines zum genauen Abwägen bequemen Werkzeuges (einer Waage) unterſuche man, wieviel irgend ein angenommener Körper (z. B. eine gläſerne oder elfenbeinene Kugel) in den verſchiedenen Flüſſigkeiten am Gewicht verliehre. Da der iedesmalige Verluſt dem Gewicht der flüſſigen Materie gleich iſt, die der untergetaugte Körper aus ihrer Stelle verdrängt (§. 15), ſo erhält man hierdurch Verhältnißzahlen für die Gewichte flüſſiger Maſſen, welche gleiche Räume ausfüllen, alſo zugleich Verhältnißzahlen für die ſpec. Schweren dieſer verſchiedenen Flüſſigkeiten.

Zuſ.

§. 25. Bedient man ſich eines genauen Kubzolles z. B. von Eiſen zum Untertaugen, ſo giebt deſſen Gewichtsverluſt im Waſſer geradezu das Gewicht von einem Kub. Zoll Waſſer. So hat Hr. Prof. Schmidt

(phyſ.

(phyſ. math. Abh. S. 96) das Gewicht eines Pariſer Kubikzolles deſtillirtes Regenwaſſer bei 16 Gr. Re'aum. zu 323 Gran Cölln. befunden. Dieſes giebt

den Pariſ. Kub. Fuß = 72,675 Cölln. ℔
den Rhl. — — = 64,963 — —

Erklärung 3.

§. 26. Eine **Senkwage** oder ein **Aräometer** heißt ein ſchicklich geformter Körper, welcher **entweder** durch die verſchiedenen Tiefen, zu denen er ſich in verſchiedenen Flüſſigkeiten eintaugt, **oder** durch die verſchiedenen Gewichte, mit welchen er noch beſonders beſchwert werden muß, um ſich in den verſchiedenen Flüſſigkeiten bis zu einer gemeinſchaftlichen fixirten Stelle einzutaugen, die Verhältniſſe ihrer verſchiedenen ſpec. Schweren zu erkennen giebt. Die der erſteren Art heiſſen auch **Aräometer mit einer Skale**, die der letzteren Art **Aräometer ohne Skale**.

Zuſ. 1.

§. 27. Beide Arten von Aräometern (§. 26) müſſen auf den Flüſſigkeiten, deren ſpec. Schwere damit unterſucht werden ſoll, ſchwimmen, alſo ſpecifiſch leichter ſeyn, als dieſe Flüſſigkeiten, aber auch aus einer Materie verfertiget werden, die von den Flüſſigkeiten nicht angegriffen werden, auch keine flüſſige Theilchen in ihre Poren eindringen laſſen. Man macht ſie daher von Glas oder auch von einem Metall, z. B. von Kupfer, beſſer von Silber. Um ihnen eine geringere ſpec. Schwere zu verſchaffen, macht man ſie hohl, und beſchwert ſie zu unterſt mit Schrot oder Queckſilber, ſo daß ihre Axe in den verſchiedenen Flüſſigkeiten eine lothrechte Stellung annimmt. Daher erhält

hält ein ſolches Werkzeug eine ſchickliche Geſtalt, wenn ſich eine beiläufig cylindriſche Röhre unten in einem Bauch erweitert, der ſich unterwärts wieder in einen engen Hals verengt, mit welchem zu unterſt wieder ein hohler Knopf verbunden iſt, welcher zum Einfüllen des Queckſilbers oder des Schrots dient.

Zuſ. 2.

§. 28. Sollte z. B. ein Aräometer mit einer Skale verfertiget werden, welcher zur Unterſuchung der ſpec. Schweren von Flüſſigkeiten dienen ſollte, deren ſpec. Schwere zwiſchen 1 und 2 fällt, ſo könnte man den unteren Knopf D einer ſolchen Glasſpindel wie (fig. 13) zuerſt mit ſoviel Queckſilber anfüllen, daß das Werkzeug ſich bis nahe ans obere Ende a in reinem Waſſer untertaugte. Dieſe Stelle bezeichnet man mit 1,00. So gefüllt ſey das Gewicht des ganzen Werkzeugs = P, ſo iſt dieſes zugleich das Gewicht von reinem Waſſer, welches das Aräometer von A bis a hinauf aus ſeiner Stelle verdrängt. Will man nun den Punkt b beſtimmen, bis zu welchem ſich das ſo gefüllte Aräometer in einer Flüſſigkeit, deren ſpec. Schwere = 1,05 wäre, eintaugen würde, ſo weiß man, daß das in eine ſolche Flüſſigkeit eingeſetzte Werkzeug, eine Menge von dieſer Flüſſigkeit aus ihrem Raume verdrängen müſſe, deren Gewicht wiederum dem des ganzen Aräometers gleich oder = P wäre.

Wenn alſo der kubiſche Raum Ab = k und der Aa = K iſt, ſo muß

$$1{,}05 \,.\, k = K$$

ſeyn, oder

$$k = \frac{K}{1{,}05}.$$

Soll

Soll aber das Aräometer im reinen Waſſer gleichfalls bis b niederſinken, ſo muß ſoviel Waſſer, als den Raum k $= \frac{K}{1,05}$ ausfüllt, dem Gewicht des ganzen Aräometers gleich ſeyn. Da nun ſoviel Waſſer, als den Raum K ausfüllt, das Gewicht P hat, ſo muß ſoviel Waſſer, als den Raum $\frac{K}{1,05}$ ausfüllt, das Gewicht $\frac{P}{1,05}$ haben. Ebenſoviel muß alſo auch das ganze Aräometer wiegen, wenn es in reinem Waſſer bis b ſinken ſoll.

Daher darf man nur ſoviel von dem anfänglichen Queckſilber aus D wegnehmen, daß das ganze Gewicht des Aräometers noch $= \frac{P}{1,05}$ bleibt, dann das Werkzeug in reines Waſſer einſetzen, und nun die Stelle b, zu der es ſich darin eintaugt, mit 1,05 bezeichnen, ſo iſt dieſes dieſelbe Stelle, bis zu der ſich das Werkzeug mit der anfänglichen Füllung in einer Flüſſigkeit eintaugen muß, deren ſpec. Schwere = 1,05 wäre, die des reinen Waſſers = 1 geſetzt. Ebenſo findet man die mit 1,10 zu bezeichnende Stelle c, wenn man ſoviel Queckſilber aus D wegnimmt, daß das Gewicht des ganzen Werkzeugs noch $= \frac{P}{1,10}$ bleibt, und dann an demſelben die Stelle bemerkt, bis zu der es in reinem Waſſer ſinkt; und nun iſt c wiederum dieſelbe Stelle, bis zu der das Aräometer mit ſeiner anfänglichen Füllung, die ihm das Gewicht P gab, in einer Flüſſigkeit ſich eintaugt, deren ſpecifiſche Schwere = 1,10 iſt. u. ſ. w.

Vor-

Vortheile, die man ſich hierbei machen kann, werden ſich Jedem, der ſich damit abgiebt, von ſelbſten anbiethen.

Anm. Wenn ein ſolches Aräometer die Unterſchiede der ſpeciſiſchen Schweren in Hunderttheilen anzeigen ſoll, ſo dürfen die ſpec. Schweren der verſchiedenen Flüſſigkeiten nicht ſehr, z. B. in nicht ſtärkerem Verhältniſſe als von 2 zu 3 verſchieden ſeyn, daher man zu allgemeinerem Gebrauche mehrere ſolche Skalenaräometer bei der Hand haben müßte. Um die ſpec. Schweren in Tauſendtheilen auszudrücken, müßte man für die mannigfaltigen Flüſſigkeiten eine zehenmal ſo groſſe Anzahl ſolcher Aräometer haben. Daher ſind zu einem allgemeinen Gebrauche, und wo zugleich groſſe Schärfe verlangt wird, die ohne Skalen vorzüglicher. Iſt aber der Gebrauch eines Aräometers nur auf Flüſſigkeiten eingeſchränkt, deren ſpec. Schweren höchſtens im Verhältniſſe 2 : 3 verſchieden ſind und die man überdas nicht in ſehr groſſer Schärfe verlangt, ſo hat man die Skalenaräometer vorzuziehen (ſ. unten.)

Zuſ. 3.

§. 29. Ein Aräometer ohne Skale kann wie (fig. 14) geſtaltet ſeyn, wie ſolche ietzt von Ciarcy mit vorzüglicher Genauigkeit von Glas verfertiget werden. Oben befindet ſich ein gläſernes Schüſſelchen B zum Einlegen kleiner Gewichte; an dem dünnen gläſernenn Stängelchen cd, das kaum ½ Par. Linie im Durchmeſſer hat, befindet ſich etwa in b ein Glaspunkt als Normalpunkt, bis zu dem ſich das Aräometer in deſtillirtem Regenwaſſer eintaugt, wenn es im Schüſſelchen B mit einem beſtimmten Gewicht beſchwert wird. Zwei ſolche von Ciarcy verfertigte Aräometer ſind hinlänglich, um ſie bei allen Flüſſigkeiten, deren ſpec. Schweren nicht unter 0,7 fallen

und

und nicht über 2,000 hinausgehen, anzuwenden, ſo daß ſich dabei alle Beſtimmungen in Tauſendtheilchen durch aufgelegte Gewichte geradezu ergeben.

Das für die leichteren Flüſſigkeiten beſtimmte Aräometer taugt ſich, mit 300 Gewichttheilen (die ſich auf halbe Grane beziehen) beſchwert, im deſtill. Regenwaſſer bei 15° Réaum. bis zum Normalpunkt ein; das Aräometer für ſich wiegt 700, alſo ſamt dem erwähnten Auflegegewicht 1000 ſolcher Theile. Das größte Auflegegewicht für dieſes Aräometer beträgt 500 ſolcher Gewichttheile, die alſo mit dem Gewicht des Aräom. ſelbſt 1200 Theile ausmachen.

Senkt man alſo dieſes Aräom. in eine Flüſſigkeit, ſo daß man $\pm$ n Gewichttheile ins Schüſſelchen legen muß, um es bis zum Normalpunkt niederzutreiben, ſo iſt das Gewicht der verdrängten flüſſigen Maſſe

$$= 709 + 300 \pm n = 1000 \pm n$$

Hingegen das Gewicht einer aus demſelben Raume verdrängten Maſſe von deſtill. Regenwaſſer wäre

$$= 700 + 300 = 1000$$

alſo die ſpec. Schwere der flüſſigen Maſſe, die des Waſſers = 1 geſetzt,

$$= \frac{1000 \pm n}{1000}$$

da dann für dieſes Aräom. die Gränze der größten ſpec. Schwere

$$= \frac{1000 + 200}{1000} = 1{,}2$$

iſt; für die geringſte

$$= \frac{1000 - 300}{1000} = 0{,}7$$

Der

Das Aräom. für die ſchwereren Flüſſigkeiten wiegt für ſich ſchon $1000 + 200 = 1200$ halbe Granen; ohne Auflegegewicht taugt es ſich in einer Flüſſigkeit, deren ſpec. Schwere $= 1{,}2$ iſt, bis zum Normalpunkt ein. Waſſer, das bis zu dieſem Punkt verdrängt würde, wöge 1000 ſolche Theile; beſchwert man es alſo mit n ſolchen Theilen, um es in einer Flüſſigkeit beim Normalpunkt zu erhalten, ſo iſt dieſer Flüſſigkeit ſpecifiſche Schwere

$$= \frac{1200 + n}{1000}.$$

Bei dieſem reichen die Auflegegewichte bis zu $n = 800$, daher der Gebrauch dieſes letzteren Aräom. ſich bis zu Flüſſigkeiten erſtreckt, deren ſpec. Schwere $= \frac{1200 + 800}{1000} = 2$ wäre.

Anm. Die Kohäſion des Waſſers mit dem Werkzeuge ſteht doch der groſſen Genauigkeit, die ein ſolches Werkzeug verſpricht, ſehr im Wege.

Aufg. 7.

§. 30. In einer beſtimmten Flüſſigkeit, deren ſpec. Schwere $= \lambda$ iſt, ſey irgend ein Körper, deſſen Gewicht x noch unbekannt, deſſen ſpec. Schwere Φ aber gegeben iſt, aufgelößt, das Gewicht der Auflöſung heiſſe M, ihre ſpec. Schwere μ; es wird vorausgeſetzt, daß die Summe der Räume, welche der aufgelößte Körper x und die Flüſſigkeit vor ihrer Vermiſchung einnahmen, auch noch nach der Vermiſchung dieſelbe bleibe; man ſoll x beſtimmen.

Aufl.

Aufl. Aus (§. 23) hat man, (M ſtatt P, λ ſtatt β, x ſtatt A, ϕ ſtatt α, $\frac{M}{\mu}$ ſtatt V geſchrieben)

$$x = \frac{M - \lambda . \frac{M}{\mu}}{\phi - \lambda} . \phi$$

$$= \frac{M\phi . (\mu - \lambda)}{\mu . (\phi - \lambda)}$$

Erfahrung 3.

§. 31. Die Vorausſetzung der vorſtehenden Aufgabe findet in der Natur nicht ſtatt. Der Raum, den Materien nach ihrer Vermiſchung einnehmen, iſt von der Summe der Räume verſchieden, welche die Materien vor der Vermiſchung einnahmen, und gewöhnlich im erſten Falle kleiner als im letzteren. Daher kann die vorſtehende Gleichung nicht geradezu bei Solutionen gebraucht werden.

Hypotheſe.

§. 32. Man ſetze, eine beſtimmte Menge einer Flüſſigkeit, die in Vermiſchung mit einer andern Materie einen kleineren Raum einnimmt, als beide zuſammen vor der Vermiſchung einnahmen, ſey dieſer Raumverminderung nur bis zu einem beſtimmten Verhältniß der aufgelößten Materie zur Menge der Flüſſigkeit unterworfen, ſo daß keine fernere Verminderung des Raums erfolge, wenn über dieſes Verhältniß hinaus noch mehr von der Flüſſigkeit zugegoſſen werde, und nenne die ſpecifiſche Schwere einer Auflöſung in dieſem Zuſtande ihre mittlere Schwere.

Jede

Jede ſolche Solution von mittlerer Schwere kann man nun als eine Miſchung von verdichtetem Waſſer (deſſen Theilchen für ſich näher zuſammengetrieben worden wären) und der darin aufgelößten Materie betrachten.

Jede andere Solution, die nicht von mittlerer Schwere wäre, müßte nun als eine zweite Miſchung angeſehen werden, die aus einer Solution von mittlerer Schwere und reinem Waſſer zuſammengeſezt wäre.

Die Folgen aus dieſer Hypotheſe ſtimmen mit der Erfahrung ſehr genau zuſammen, wenn man die ſpecifiſche Schwere der in der Flüſſigkeit aufgelößten Materie ſo in Rechnung bringt, wie ſie ihr in der Auflöſung wirklich zukommt, die dann gewöhnlich merklich gröſſer als im ordentlichen Zuſtande iſt, und mit dem Namen der reinen Schwere belegt werden kann.

Aufg. 8.

§. 33. Die reine Schwere eines Salzes ſey $= \Phi$, das Gewicht einer aus verdichtetem Waſſer und Salz beſtehenden Solution von mittlerer Schwere $= M$, ihre ſpec. Schwere $= \mu$, die ſpec. Schwere des verdichteten Waſſers für ſich genommen $= \lambda$; man ſoll das Gewicht des aufgelößten Salzes beſtimmen.

Aufl. Es heiſſe x. ſo iſt (§. 30)

$$x = \frac{M . \Phi . (\mu - \lambda)}{\mu . (\Phi - \lambda)}$$

Bew. Vermöge des (§. 32) feſtgeſezten Begriffs verhält ſich die Sache ſo, als wäre eine Salzmenge x in verdichtetem Waſſer aufgelößt, das nun

keine

keine Salztheilchen weiter in ſeine Zwiſchenräumchen aufnähme. Auch werden die Salztheilchen in Rückſicht auf ihre ſpec. Schwere ſo in Rechnung gebracht, wie es ihrem Zuſtande in der Auflöſung angemeſſen iſt. Alſo findet hier die Vorausſetzung ſtatt, für welche die Formel (§. 30) ihre Gültigkeit hat.

Aufg. 9.

§. 34. Es ſey das Gewicht irgend einer Salzauflößung = A, ihre ſpecifiſche Schwere = α; man ſoll die Menge oder das Gewicht x des darin enthaltenen waſſerfreien Salzes beſtimmen.

Aufl. Vermöge (§. 32) iſt die gegebene Salzauflöſug A ſo anzuſehen, als wäre ſie aus einer Solution M von mittlerer Schwere (§. 33) und zugegoſſenem reinem Waſſer W zuſammengeſetzt, ſo daß der Raum, den die gegebene Auflöſung einnimmt, der Summe von Räumen gleich iſt, welche M und W vor dem Zuſammengieſſen zuſammen einnehmen.

Alſo hat man

$$\frac{A}{\alpha} = W + \frac{M}{\mu} = A - M + \frac{M}{\mu}$$

Demnach

$$\frac{A\alpha - A}{\alpha} = \frac{M\mu - M}{\mu}$$

und

$$M = \frac{\mu . (\alpha - 1) . A}{\alpha . (\mu - 1)}$$

Folglich (§. 33)

$$x = \frac{\mu.(\alpha - 1).A.\Phi.(\mu - \lambda)}{\alpha.(\mu - 1).\mu.(\Phi - \lambda)}$$

$$= \frac{(\alpha - 1).A.\Phi.(\mu - \lambda)}{\alpha.(\mu - 1).(\Phi - \lambda)}$$

Zuſ.

§. 35. Wenn für daſſelbe Salz, welches man im vor. §. gehabt hat, die Gröſſen A', α', x' und A'', α'', x'' in ebender Bedeutung zuſammengehören, wie A, α, x, ſo hätte man ebenſo

$$x' = \frac{(\alpha' - 1).A'.\Phi.(\mu - \lambda)}{\alpha'.(\mu - 1).(\Phi - \lambda)}$$

und

$$x'' = \frac{(\alpha'' - 1).A''.\Phi.(\mu - \lambda)}{\alpha''.(\mu - 1).(\Phi - \lambda)}$$

Man könnte nun bei drei verſchiedenen Verſuchen gleiche Salzmengen $x = x' = x''$ (welche man vom Waſſer befreit haben muß) aber verſchiedene Werthe von A, A', A'' und von α, α', α'' gebrauchen, da dann die drei Gleichungen für x nach gehöriger Rechnung die Werthe von Φ, μ und λ geben.

Sind dieſe einmal beſtimmt, ſo dient die Gleichung (§. 34)

$$x = \frac{(\alpha - 1).A.\Phi.(\mu - \lambda)}{\alpha.(\mu - 1).(\Phi - \lambda)}$$

in allen Fällen aus A und α die in der Auflöſung enthaltene waſſerfreie Salzmenge x zu beſtimmen; da dann die Menge des mit Kriſtalliſationswaſſer verſehenen Salzes aus andern chemiſchen Erfahrungen iedesmal leicht beſtimmt werden kann.

Anm.

Anm. 1. Die erſten Betrachtungen dieſer Art, die ſich auf (§. 32) gründen, verdanken wir Herrn Richter, der auch die ausführlichſten Anwendungen davon gemacht hat. Seine Methode, die Werthe von ϕ, μ und λ zu beſtimmen und viele hiernach berechnete Tafeln findet man in den unten unter ſeinem Namen angeführten Schriften. Für Küchenſalz findet er

$$\phi = 2,3; \ \mu = 1,661; \ \lambda = 1,138$$

Alſo für dieſes Salz

$$x = \frac{(\alpha - 1) . A . 2,3 . (1,661 - 1,138)}{\alpha . 0,661 . (2,3 - 1,138)}$$

$$= \frac{1,5662 . (\alpha - 1) . A}{\alpha}$$

wo waſſerfreies Küchenſalz zu verſtehen iſt; da man dann mit Rückſicht auf das hinzukommende Kriſtalliſationswaſſer

$$x = \frac{1,5662 . (\alpha - 1) . A}{\alpha} . 1,028$$

oder

$$x = \frac{1,61 . (\alpha - 1) . A}{\alpha}$$

ſetzen kann, übrigens vollkommen trockenes Salz vorausgeſetzt.

Uebrigens wird bei dieſen Angaben mittlere Temperatur vorausgeſetzt.

Anm. 2. Die häufigſten Anwendungen dieſer Lehren kommen auf Salzwerken vor. Nur ſind da ſolche Formeln freilich noch ſehr weit von unmittelbarer Anwendbarkeit entfernt, und in Bezug auf dieſe weiß ich den Urtheilen der Herrn Beckmann und Gren, welche die groſſe Mühe, die man auf Berechnungen von Tafeln dieſer Art verwendet hat, keines groſſen Dankes werth achten, gar nichts entgegen zu ſetzen. Auch der Gebrauch der Aräometer iſt zur täglichen Unterſuchung der Soolen auf Salzwerken

höchſt wichtig und ſchon ſehr alt. Zu dieſem Gebrauch verdienen auch die dabei üblichen Skalenaräometer den Vorzug, welche unter dem Namen der Salzſpindeln, Salzwagen längſt bekannt ſind.

Anm. 3. Die Kunſt zu ſchwimmen lernt man am beſten von Schwimmern; wenigſtens wird ſie Niemand aus einem Kompendium der angew. Mathem. erlernen wollen, wo es Niemanden einfällt, Unterricht vom Laufen, Tanzen, Springen, Reuten, Fechten zu ſuchen. Alle künſtliche zu einem gewiſſen Zwecke erfoderliche Stellungen und Bewegungen des menſchlichen Körpers beruhen auf mathematiſchen Gründen, wie das Schwimmen.

Einige hierher gehörige Schriften.

Gren's Journal d. Phyſ. 5 u. 7 B.

Die Kunſt zu ſchwimmen, von Joh. Fr. Bachſtrom, Berlin 1742.

Neue Abh. der königl. Schwed. Akad. d. Wiſſ. 1781.

Beſchreibung einer neuen hydroſtatiſchen Wage von Ge. Friedr. Brander, Augsb. 1771.

Anfangsgründe der Stöchyometrie oder Meßkunſt chymiſcher Elemente 3 Theile. von J. B. Richter.

Deſſ. Abhandl. über die neuern Gegenſtände der Chymie 5tes St.

K. Chr. Langsdorf, vollſtändige Anleit. zur Salzwerksk. 5ter Th.

Euler Scientia naualis Petrop. 1749.

Anfangsgründe der Schiffbaukunſt a. d. Franz. des Hn. du Hamel de Monceau überſetzt v. C. G. D. Müller, Berl. 1791.

La Chapelle, Beſchreibung eines Schwimmkleids a. d. Franz. Warſchau 1776.

Aero-

Aerometrie

oder

Pneumatik.

Aerometrie
oder
Pneumatik.

Erſtes Kapitel.
Allgemeine Eigenſchaften der Luft, beſonders ihre Expanſivkraft und das Barometer.

Erklärung I.

§. 1. Den tropfbar-flüſſigen Materien werden die luftförmigen entgegengeſetzt, unter welchen hier diejenigen flüſſigen Materien verſtanden werden, deren Volumen ſich bei einerlei Wärme merklich ändert, ſobald der äuſſere Druck, dem ſie ausgeſetzt ſind, eine merkliche Aenderung leidet.

Erfahrung I.

§. 2. Ueberall wo wir uns befinden, können wir leichte Körperchen, wie Papierſtücke, Federn u. d. g. ohne unmittelbar an ſie zu ſtoſſen, ſchon dadurch in Bewe-

Bewegung ſetzen, daß wir nur eine etwas breite Fläche mit einiger Schnelligkeit an ihnen vorbei bewegen; und wir ſelbſt empfinden eine Berührung unſichtbarer Theilchen, wenn wir eine ſolche Fläche z. B. nahe bei unſerem Geſichte vorbei bewegen. Taugen wir, wo wir uns auch befinden mögen, ein übrigens leeres Gefäß mit einem Loch im Boden unter Waſſer, ſo daß ſich der Boden oben befindet, indeß wir das Loch im Boden etwa mit dem Daumen zuhalten, ſo empfinden wir einen Druck gegen den Daumen, und wir haben deſtomehr Kraft nöthig, den angelegten Daumen in ſeiner Lage zu erhalten, ie tiefer wir die untere Mündung des Gefäſſes unter das Waſſer taugen, ohne daß das Waſſer dabei den Daumen ſelbſt berührt. Nimmt man hierzu ein Gefäß von Glas, in deſſen Boden ſich kein Loch befindet, ſo ſieht man darin das Waſſer deſto höher ſteigen, ie tiefer es eingetaugt wird; es kommt bei tieferem Eintaugen dem Boden immer näher, aber es erreicht ſolchen nie, ſo tief man ihn auch unter den Waſſerſpiegel eintaugen mag; auch ſteigt das Waſſer darin, ſolange der Boden ſich noch über dem Waſſerſpiegel befindet, nie bis zur Höhe des äuſſeren Waſſerſpiegels.

Zuſ.

§. 3. Es muß uns alſo überall wo wir uns befinden, auf den hohen Bergen wie in den tiefſten Thälern, eine feine flüſſige Maſſe umgeben, die ſich in luftförmigem Zuſtande befindet, aus deren Daſeyn ſich die Erſcheinungen (§. 2) erklären laſſen.

Erklärung 2.

§. 4. Dieſe luftförmige Flüſſigkeit, welche unſere ganze Erde umgiebt, heißt insbeſondere **atmoſphäriſche Luft**, oder auch ſchlechtweg **Luft**.

Erklä-

Erklärung 3.

§. 5. Die Aerometrie enthält die mathematiſchen Lehren von der atmoſphäriſchen Luft; die Pneumatik hat die luftförmigen Flüſſigkeiten überhaupt zum Gegenſtande, und faßt alſo die Aerometrie mit unter ſich.

Anm. Die Aerometrie iſt unter dieſem Namen zuerſt von Wolf abgehandelt worden. Seine 1709 zu Leipzig unter dem Titel Elementa aërometriae erſchienene Schrift enthält, was damals davon geſagt werden konnte. Erſt ſpätere Fortſchritte der Wiſſenſchaften konnten auch zur Erweiterung der Aerometrie beitragen. Inſoferne man nämlich die verſchiedenen in ſpätern Zeiten entdeckten Luftarten, und ſelbſt den Wärmeſtoff in ſeinen mannigfaltigen Verbindungen mit andern Materien ietzt mit zu den Gegenſtänden zählt, die mathematiſcher Beſtimmungen fähig ſind, iſt dieſer Theil der angewandten Mathematik in neueren Zeiten allerdings bereichert worden. Nur mögte in dieſem Umfange genommen der Namen Pneumatik für ihn paſſender ſeyn als der eingeſchränktere der Aerometrie. Die Lehren, welche die Wärme betreffen, könnten zwar wiederum als ein beſonderer Theil der angew. Math. unter dem Namen der Pyrometrie abgehandelt werden, wie von Lambert geſchehen iſt; inzwiſchen werde ich das nothwendigſte davon hier als Lehren der Pneumatik mit einſchalten, theils wegen ihres genauen Zuſammenhanges mit der Aerom. theils um nicht zu beſonderen Erwartungen in einer Lehre zu veranlaſſen, die noch ſoweit von ihrer Vollkommenheit entfernt iſt.

Erfahrung 2.

§. 6. Die Eigenſchaft, vermöge der die äuſſere Form eines flüſſigen Körpers bei einerlei Wärme bloß durch die Geſtalt der feſten Wände beſtimmt wird, die ihn umgeben, kommt auch der Luft zu. Auſſerdem iſt

aber die Abhängigkeit des Volumens einer beſtimmten Menge Luft von der äuſſeren auf ſie wirkenden Preſſung bei der Luft ſehr viel merkbarer als bei tropfbar flüſſigen Materien. Bei dieſen iſt, einerlei Wärme vorausgeſetzt, die Veränderlichkeit des Volumens bei verändertem äuſſeren Druck überhaupt kaum merkbar, und das Volumen auch bei völliger Aufhebung des äuſſeren Drucks (ſoweit wir ihn aufheben können) immer noch kaum merkbar von dem Volumen unter einem ſehr groſſen Druck verſchieden. Hingegen erfolgt Ausbreitung der Luft in einen gröſſeren Raum, ſoweit unſere Beobachtungen reichen, immer fort, ſolange wir mit Verminderung des äuſſeren Drucks fortfahren, und ihr Volumen wird bei ieder Wärme bloß durch die feſten Wände des Gefäſſes beſtimmt, in dem wir ſie verſperren, wenn ſolches von allen Seiten verſperrt iſt. Dieſes beweißt ſchon der ganz einfache Verſuch mit dem eingetaugten Gefäſſe (§ 2), wo die verſperrte Luft bei gröſſerer Preſſung (nämlich beim Druck einer höheren Waſſerſäule) in einen engeren Raum zuſammengepreßt wird, dann aber ſich wieder ausdehnt, ſobald die äuſſere Preſſung wieder geringer oder die Höhe der druckenden Waſſerſäule wieder vermindert wird. abcd (fig. 1.) ſey ein Cylinder, in welchen der Kolben kλ genau paßt; unten bei m ſey ein kleines Gefäß m daran befeſtigt, mit einer kleinen Seitenöffnung, die ſich, nachdem man den Kolben bis auf den Boden ab niedergedruckt hat, durch einen Steft n luftdicht verſtopfen läßt, ſo daß dann das kleine Gefäßchen m mit atmoſphäriſcher Luft angefüllt iſt. Dieſes Gefäßchen könnte z. B. nur $\frac{1}{100}$ Kub. Zoll Luft enthalten. Wird nun der Kolben in die Höhe gezogen, ſo verbreitet ſich die Luft aus dem Gefäßchen

in

in dem ganzen cylindriſchen Raum unter dem Kolben, man mag den Kolben ſo hoch man will ziehen. Beträgt dieſer Raum z. B 100 Kub. Zolle, ſo verbreitet ſich die Luft in dem ganzen Raum von 100,01 Kub. Zollen, der doch 10000 mal gröſſer als der anfängliche iſt.

Man kann dieſe Eigenſchaft luftförmiger Materien, vermöge der das Volumen einer beſtimmten Menge bloß durch den Widerſtand beſtimmt wird, den man ihr von allen Seiten entgegengeſetzt, als den Hauptkarakter betrachten, wodurch ſie ſich von tropfbar-flüſſigen Materien unterſcheiden. Sie erfodern, um ein beſtimmtes Volumen auszumachen, allemal äuſſeren Druck von allen Seiten.

Anm. Wenigſtens iſt bis iezt Luft aus der Atmoſphäre noch durch keinen Verſuch ſoweit verdünnt worden, daß ſie aufgehört hätte, ſich durch den ganzen Raum, in dem ſie verſperrt wurde, auszudehnen. Wir haben alſo die Luft als eine flüſſige Materie zu betrachten, die überall, wo wir ſie finden, ſchon aus einem ſehr viel gröſſeren Raum, den ſie ohne äuſſeren Druck einnehmen würde, in einen ſehr vielmal engeren Raum zuſammengepreßt iſt. (ſ. unten)

Erklärung 4.

§. 7. Das Beſtreben der Luft, das ſie, wo ſie ſich auch befindet, äuſſert, ſich in einen gröſſern Raum zu verbreiten, heißt ihre Expanſivkraft, Dehnkraft, Federkraft. Unter der Elaſticität wird nicht nur dieſe Eigenſchaft, ſondern auch zugleich die Fähigkeit der Luft verſtanden, ſich aus iedem Raum, worin ſie ſich befindet, in einen noch kleineren zuſammenpreſſen zu laſſen.

Zuſ.

Zuſ.

§. 8. Vermöge dieſer Elaſticität gilt von der Luft, was (§. 6. Hydroſt.) ſchon vom Waſſer geſagt worden iſt. Jedes Lufttheilchen druckt wiederum ebenſo ſtark nach allen Seiten ringsumher, als es ſelbſt von irgend einer Seite gedruckt wird.

Erfahrung 3.

§. 9. Man ſetze eine Röhre, die an beiden Enden offen und zur Bequemlichkeit des Verſuchs nur ſo weit iſt, daß ſie ſich am einen Ende bequem mit dem Daumen verſchlieſſen läßt, mit offenen Enden ins Waſſer, ſo daß ſie z. B. zur Hälfte mit Waſſer angefüllt wird. So angefüllt nehme man ſie, am oberen Ende mit dem Daumen verſchloſſen, aus dem Waſſer, ſo wird nicht alles Waſſer aus der Röhre herabfallen, ſondern ein beträchtlicher Theil in der unten offenen Röhre hängen bleiben, wenn die Röhre nur übrigens luftdicht iſt.

Erfahrung 4.

§. 10. Steigt man mit dieſer ſo gefüllten und oben verſchloſſenen Röhre auf einen hohen Thurm oder auf einen Berg, ſo läßt die Röhre auf dieſer Höhe mehr Waſſer fallen, und es bleibt deſto weniger in ihr zurück, ie höher man mit ihr ſteigt.

Lehrſ.

§. 11. **Die Luft iſt ſchwer.**

Bew. Aus der Erfahrung (§. 9) folgt, daß die äuſſere Luft nicht nur der Expanſivkraft der in der Röhre noch verſperrten Luft, ſondern auch dem Druck des darin noch zurückgebliebenen Waſſers das Gleichgewicht

gewicht zu halten vermag. Daraus allein würde nur folgen, daß die äuſſere Luft nach allen Seiten eine Preſſung ausübt, vermöge der ſie die in der Röhre noch vorhandene Waſſerſäule herabzufallen verhindert. Wirkte nun in die Lufttheilchen auſſer der Elaſticität ſonſt keine Kraft, ſo müßte die Expanſivkraft der atmoſphäriſchen Luft überall, in der Höhe wie in der Tiefe, gleich groß ſeyn. Da aber die Erfahrung (§. 10) beweißt, daß die atmoſphäriſche Luft in höheren Luftſchichten eine geringere Preſſung gegen die untere Röhrenöffnung ausübt, als in tiefer liegenden, ſo müſſen die oberen Luftſchichten auf die unteren noch einen beſondern Druck ausüben, der nicht von ihrer Expanſivkraft herrührt, der alſo von oben herab immer gröſſer wird und in ieder unteren Schichte vermöge der Expanſivkraft der Luft ſich nach allen Seiten fortpflanzt.

So bemerken wir alſo ein Beſtreben der Lufttheilchen gegen die Erde, auch ohne Bezug auf ihre Expanſivkraft, wie bei ieder andern Materie, und ſind daher berechtiget, dieſelbe Kraft, welche iede andere uns bekannte Materie gegen die Erde treibt, auch als die Urſache ienes Beſtrebens anzuſehen, d. i. anzunehmen, daß auch die Lufttheilchen den Eindrücken der Schwere unterworfen ſeyen.

Anm. Die Schwere der Luft iſt iezt eine ſo bekannte Sache, daß man den vorſtehenden Lehrſatz geradezu als einen Erfahrungsſatz aufſtellen könnte. Der Chemiker liefert beim Verkalken der Metalle auffallende Beweiſe von der Gewichtszunahme eines Körpers, ſobald er einen Beſtandtheil unſerer atmoſphär. Luft aufnimmt; und der Künſtler verfertiget Werkzeuge, welche ſelbſt zur genauen Erforſchung der ſpec. Schwere der Luft dienen, wovon weiter unten noch einiges vorkommen wird.

Erfah-

Erfahrung 4.

§. 12. Wenn man eine etwa 33 Par. Fuß hohe oder noch höhere lothrecht ſtehende völlig luftdichte Röhre, die unten mit einem Hahn verſchloſſen iſt, ganz mit Waſſer anfüllt, dann ſie oben verſchließt und unten öffnet, ſo fällt vom Waſſer nicht mehr herab als über die Höhe von beiläufig $32\frac{1}{2}$ Fuß hinausgeht, ſo daß die Röhre noch etwa $32\frac{1}{2}$ Par. Fuß hoch mit Waſſer angefüllt bleibt, woferne die untere Röhrenöffnung nicht viel über die Meeresfläche erhaben iſt oder nicht viel unter dieſer liegt.

Stellt man denſelben Verſuch mit Queckſilber an, das 14 mal ſo ſchwer als Waſſer iſt, ſo findet man, daß das Queckſilber etwa 28 Zolle hoch darin ſtehen bleibt, daher ſich dieſer letztere Verſuch ſchon mit einer etwa 30 Zoll langen Röhre anſtellen läßt.

Je höher die Röhre über der Meeresfläche erhaben iſt, deſto niedriger iſt die darin hängenbleibende Waſſer- oder Queckſilberſäule (§. 11).

Zuſ.

§. 13. Jede Luftſchichte hat den Druck aller über ihr liegenden Luftſchichten auszuhalten, und im Falle des Gleichgewichts muß alſo die Expanſivkraft eines Lufttheilchens in ieder Luftſchichte dem geſammten Druck gleichſeyn, welchen die lothrecht darüber liegenden Lufttheilchen aller höheren Luftſchichten vermöge der Schwere zuſammengenommen ausüben. Und da iedes Lufttheilchen denſelben Druck, welchen es ſelbſt von irgend einer Seite leidet, auch ringsumher nach allen Seiten ausübt, ſo hat eine Queckſilberſäule, die in dem Zuſtande des vor. §. ruhig erhalten wird, gleichfalls den ganzen Druck einer Luftſäule auszuhal-

ten, deren Höhe die der ganzen Atmoſphäre, und deren Grundfläche die der atmoſphäriſchen Luft ausgeſetzte Fläche der Queckſilberſäule wäre. Daher iſt der Druck einer ſolchen Queckſilberſäule zugleich das Maaß des atmoſphäriſchen Drucks oder der Expanſivkraft der Luft an der Stelle, wo die Luft die Queckſilberſäule berührt.

Anm. Der Druck der Atmoſphäre iſt alſo auf die Gröſſe des Drucks einer Queckſilberſäule eingeſchränkt, die in den niedrigſten Stellen unſerer Erdfläche nicht leicht und dann nur ſehr wenig über 28 Par. Zolle hoch iſt. Auf die erſte Entdeckung dieſer Gränze wurde Galiläus durch einen Gärtner geleitet, der ſich vergeblich bemühte, das Waſſer im luftleeren Raume einer Pumpe auf eine Höhe ſteigen zu laſſen, die iene Gränze übertraf. Den Verſuch mit Queckſilber hat ſein Schüler, Evangeliſta Torricellius, im Jahr 1643 zuerſt angeſtellt, von dem auch der luftleere Raum in einer ſolchen Röhre über dem Queckſilber die Torricelliſche Leere (vacuum Torricellianum) genennt wird.

Erklärung 5.

§. 14. Ein Werkzeug, das die mit der iedesmaligen Expanſivkraft der freien atmoſphäriſchen Luft korreſpondirenden Queckſilberhöhen in einer über dem Queckſilber luftleeren Röhre zu bemerken dient, heißt ein Queckſilberbarometer oder ſchlechtweg ein Barometer (Barometrum, baroſcopium, tubus Torricellianus).

Anm. 1. Es verſteht ſich, daß das Werkzeug aus Glaſe gemacht ſeyn muß. Allemal muß die gläſerne Röhre unten ſo eingerichtet ſeyn, daß das tiefer ſinkende Queckſilber mit dem in der Röhre in Verbindung bleibe.

Hierzu könnte ein offenes zum Theil mit Queckſilber gefülltes Gefäßchen dienen, in das die mit Queckſilber gefüllte

füllte gläſerne Röhre eingeſetzt werden könnte. So verfuhr Torricelli.

Bequemer aber ſind ſolche Einrichtungen wie (fig. 3, 4, 5), da nämlich die Glasröhre unten umgebogen iſt und ſo dem in dem langen Röhrenſchenkel fallenden Queckſilber Gelegenheit verſchafft, in dem umgebogenen Schenkel ſelbſt oder in dem noch damit verbundenen kleinen Behältniſſe in die Höhe zu ſteigen. Uebrigens verſteht es ſich, daß die Röhre an ein Brett befeſtigt werde, auf welchem man den Maaßſtab verzeichnet.

Anm. 2. Es gehört zur gröſſeren Vollkommenheit des Werkzeugs, daß die Glasröhre bis zum Behältniß gleich weit ſey. Auch iſt es zu den Beobachtungen bequemer, wenn das kleine Behältniß durchaus einerlei Weite hat (wie fig. 3). Ueberdas muß das Werkzeug hinlänglich mit Queckſilber gefüllt ſeyn, daß es nie ganz aus dem Behältniß zurücktreten könne. Endlich gehört es zur Vollkommenheit des Werkzeugs, daß das Queckſilber im Barometer ausgekocht ſey.

Anm. 3. Solche Barometer wie (fig. 2 u. 3) heiſſen auch insbeſondere Behältnisbarometer oder Kapſelbarometer, hingegen ſolche wie (fig. 4) Heberbarometer. Letztere haben bei völlig gleicher Weite des langen und kurzen Schenkels den Vorzug, daß ſich das Queckſilber überall im ganzen Werkzeug unter völlig gleichen Umſtänden befindet, daher ſie auch De Lück für die beſten hält. Sie ſind überdas für den Beobachter auch ſehr bequem, wenn neben dem kleinern Schenkel auf dem Brett auch ein in kleine Theile eingetheilter Maaßſtab angebracht wird. De Lüc hat zuerſt bemerkt, daß dergleichen Heberbarometer wohl unter einander, aber nicht mit Kapſelbarometern übereinſtimmen, und daß letztere gewöhnlich eine geringere Barometerhöhe zeigen als erſtere. ſ. ſeine Unterſ. über die Atmoſphäre I Th. S. 329 u. ſ. w.

Anm. 4. Man ſieht von ſelbſt ein, daß die Druckhöhe des Queckſilbers, die zum Maaße der Expanſivkraft der äuſſeren

Luft

Luft dient, von der horizontalen Oberfläche des Queckſilbers im kleinen Schenkel zur höchſten Fläche deſſelben im langen Schenkel gemeſſen werden müſſe. Aus beiden Skalen der oben am langen und der unten am kurzen Schenkel des Heberbarometers (Anm. 3) ergiebt ſich iedesmal leicht ohne beſondere Meſſung die gedachte Höhe. Auch ohne die untere Skale ergiebt ſich bei völlig gleichen Weiten beider Schenkel die iedesmalige Aenderung der Barometerhöhe, wenn man die an der Skale des langen Schenkels bemerkte Gröſſe des Steigens oder Fallens verdoppelt.

Bei ſolchen Kapſelbarometern wie (fig. 3) kann die Höhenbeſtimmung, ohne ſie iedesmal unmittelbar zu meſſen, aus dem Verhältniß der Durchmeſſer der Röhre und des untern Behältniſſes leicht hergeleitet werden; heißt iener d, dieſer D, die Höhe der Queckſilberſäule über der Queckſilberfläche im Behältniß in irgend einem beſtimmten Zuſtande gemeſſen H; nennt man ferner die Punkte bis wohin das Queckſilber in dieſem Zuſtande ſowohl in der Röhre als in dem Behältniſſe reicht, obere und untere Normalpunkte, die zugehörige Höhe H die Normalhöhe, und iſt nun bei irgend einer Beobachtung die Höhe des Queckſilbers in der Röhre über dem oberen Normalpunkt = h, ſo iſt zugleich das Queckſilber im Behältniſſe um die Höhe $\frac{d^2}{D^2} . h$ unter den Normalpunkt gefallen, alſo die ietzige Barometerhöhe $= H + h + \frac{d^2}{D^2} . h = H + \frac{D^2 + d^2}{D^2} . h.$ Iſt das Queckſilber in der Röhre um die Höhe h gefallen, ſo iſt die ganze Barometerhöhe $= H - \frac{D^2 + d^2}{D^2} . h.$

Bei ſolchen Barometern wie (fig. 2) erfodern genaue Beſtimmungen immer unmittelbare Meſſungen. Daher iſt es beſonders bei dieſen ſehr bequem, wenn die Skale auf

eine am Brett verſchiebbare Leiſte oder auf ein verſchiebbares meſſingenes Linial verzeichnet iſt.

Anm. 5. Weil alle Materien durch gröſſere oder geringere Wärme mehr oder weniger ausgedehnt, alſo dadurch ſpecifiſch leichter oder ſchwerer gemacht werden, ſo erhellet, daß die Aenderungen der Barometerhöhen nicht bloß von der Expanſivkraft der Luft, ſondern auch von der verſchiedenen Wärme des davon mehr oder weniger ausgedehnten Queckſilbers abhängen. Daher muß bei Vergleichungen verſchiedener Barometerhöhen auf die von der Verſchiedenheit der Wärme herrührenden Höhenänderungen gehörige Rückſicht genommen werden, wovon in der Folge noch gehandelt werden wird.

Aufg. 1.

§. 15. **Mittelſt des Barometers den Druck der Atmoſphäre auf eine von ihr berührte Fläche zu beſtimmen, vorausgeſetzt, daß die Expanſivkraft der Luft in allen Stellen der ihr ausgeſetzten Fläche gleich groß angenommen werden könne.**

Aufl. Man beobachte in der Nähe der Fläche die Barometerhöhe; ſie ſey in Zollen $= H$, die dazu gehörige ſpec. Schwere ſey $= \phi$, wenn die des Waſſers $= 1$ geſetzt wird, und das Gewicht eines Kub. Zolles Waſſer $= k$, ſo iſt der Druck auf die Fläche, wenn dieſe in Quadratzollen durch A ausgedruckt wird, $= H . A . \phi . k$.

Die Beſtimmung von ϕ nach der Verſchiedenheit der Wärme des Queckſilbers wird in der Folge vorkommen. Der Werth von k muß gleichfalls für eine beſtimmte Wärme bekannt ſeyn.

Anm. Da der Druck einer Queckſilberſäule, ſo wie der einer Waſſerſäule, gar nicht von der Gröſſe der Querſchnitte des ſie umgebenden Gefäſſes abhängt, ſo hat der Umſtand,

daß

daß die Glasröhre ſelbſt von der Wärme mehr oder weniger ausgedehnt wird, auf die Barometerhöhen ſelbſt, alſo auch auf die daher genommenen Beſtimmungen gar keinen Einfluß. In ebendieſer Rückſicht iſt daher auch die Weite der Glasröhren, die man ihr bei einer beſtimmten Wärme geben will, gleichgültig. Um inzwiſchen die Hinderniß, welche die Röhrenwand dem Steigen oder Fallen des Queckſilbers entgegenſetzt, zu vermindern, giebt man der Röhre im Durchmeſſer nicht gerne unter 7/4 Par. Linien im Lichten. De Lüc verlangt 2 1/2 bis 3 Linien.

Zweites Kapitel.

Verſchiedenheit der Expanſivkraft der atmoſphäriſchen Luft in verſchiedenen Zeiten und in verſchiedenen Stellen der Atmoſphäre.

Erfahrung 5.

§. 16. Man weiß, daß das Barometer ſowohl in verſchiedenen Lufthöhen, als auch in einerlei Lufthöhen nur in verſchiedenen Gegenden, und ſelbſt an ebender Stelle nur in verſchiedenen Zeiten die Expanſivkraft der Luft verſchieden angiebt. Dieſe Beobachtungen verdienen hier, inſoweit ſie mit mathematiſchen Beſtimmungen zuſammenhängen, noch eine kurze Betrachtung.

Erklärung 6.

§. 17. Wenn man an einem beſtimmten Ort jeden Tag im Jahre mehrere Beobachtungen, am

beſten immer in einerlei feſtgeſetzten Stunden, über die Barometerhöhe anſtellt, und die Summe aller dieſer Höhen mit der Anzahl von Beobachtungen dividirt, ſo heißt die ſo herauskommende Höhe die **mittlere Barometerhöhe** deſſelben Orts.

Anm. Die mittlere Barometerhöhe iſt alſo bloß Reſultat der Beobachtung, weil wir das Geſetz nicht kennen, nach welchem dieſe Aenderungen erfolgen. Die Erklärung der Urſachen dieſer Aenderungen gehört in die Phyſik, wo man ſich mit mancherlei Hypotheſen behilft, die man in Gehlers phyſ. Wörterb. I. Th. S. 275—285 und V Th. S. 127—140 beiſammen findet. Begreiflich können mehrere Urſachen unter verſchiedenen Umſtänden theils einzelen theils vereint ſolche Aenderungen bewirken. An den Europäiſchen Meeresufern wird die mittlere Barometerhöhe durchgängig zu 28 Par. Zollen angenommen. Auch giebt ſie De Lüc ſo an.

Aufg. 2.

§. 18. Es ſey auf einem Berg (einem Thurm oder ſonſt wo) die Barometerhöhe p Par. Linien, am Meere H Linien (entweder unter gleichen Umſtänden beobachtet oder die mittlere Barometerhöhe genommen): man ſoll die Höhe des Bergs über der Meeresfläche beiläufig beſtimmen.

Aufl. 1. Man ſtelle ſich die ganze Höhe der Luftſäule, von der Meeresfläche bis zu der Luftſchichte auf dem Berge, in Schichten abgetheilt vor, iede Schichte zu 1 Toiſe oder 864 Par. Linien hoch, und nehme an, daß ohne merklichen Irrthum in ieder ſolcher einzelen Schichte die Luft als gleich dicht angenommen werden könne.

2. Erhebt man ſich nun mit dem Barometer nach und nach durch die verſchiedenen Schichten, ſo wird das

das Gewicht der Luftſäule über dem Barometer von Schichte zu Schichte immer geringer, das Barometer muß alſo fallen, und wenn die ſpec. Schwere des Queckſilbers m mal ſo groß als die der Luft am Meere iſt, ſo iſt

die Höhe, um welche das Queckſilber im Barometer fällt, in Par. Lin. an der obern Gränze

der 1ten Schichte $= \frac{864}{m}$, wofür ich α ſetzen will

— 2ten $= (1 - \frac{\alpha}{H}) . \alpha$ oder $= \beta$

— 3ten $= (1 - \frac{\alpha + \beta}{H}) . \alpha$

$= (1 - \frac{\alpha}{H}) . \beta$ oder $= \gamma$

— 4ten $= (1 - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{H}) . \alpha$

$= (1 - \frac{\alpha}{H}) . \gamma$

u. ſ. w.

3. Steigt man alſo durch n Luftſchichten, ſo iſt der Fall des Queckſilbers in allen Schichten zuſammengenommen =

$$\alpha + (1 - \frac{\alpha}{H}) . \alpha + (1 - \frac{\alpha}{H})^2 . \alpha + (1 - \frac{\alpha}{H})^3 . \alpha$$

$$\ldots\ldots + (1 - \frac{\alpha}{H})^{n-1} . \alpha$$

$$= \alpha . \left(1 + (1 - \frac{\alpha}{H}) + (1 - \frac{\alpha}{H})^2 \ldots + (1 - \frac{\alpha}{H})^{n-1}\right)$$

 alſo

alſo nach (Alg. §.   ), wenn dieſer Fall f heißt,

$$f = \frac{\alpha\left(1-\left(1-\frac{\alpha}{H}\right)^{n}\right)}{\frac{\alpha}{H}}$$

$$= H.\left(1-\left(1-\frac{\alpha}{H}\right)^{n}\right)$$

4. Daher

$$1-\frac{f}{H} = \left(1-\frac{\alpha}{H}\right)^{n}$$

oder

$$\log\left(1-\frac{f}{H}\right) = n.\log\left(1-\frac{\alpha}{H}\right)$$

und

$$n = \frac{\log\left(1-\frac{f}{H}\right)}{\log\left(1-\frac{\alpha}{H}\right)}$$

5. Es iſt aber $f = H - p$, alſo $1 - \frac{\;}{H} = \frac{p}{H}$, und $\log \frac{p}{H} = \log p - \log H$; alſo (no. 4)

$$n = \frac{\log p - \log H}{\log(H-\alpha) - \log H}$$

$$= \frac{\log H - \log p}{\log H - \log(H-\alpha)}$$

oder,

oder, $\frac{864}{m}$ ſtatt α geſetzt (no. 2),

$$n = \frac{\log H - \log p}{\log H - \log\left(H - \frac{864}{m}\right)}$$

6. Setzt man nach (Anm. §. 17) H = 336 Linien, ſo hat man

$$n = \frac{\log 336 - \log p}{\log 336 - \log\left(336 - \frac{864}{m}\right)}$$

7. Für die Barometerhöhe von 336 Lin. kann man der Erfahrung zufolge, wie man weiter unten ſehen wird, im Mittel genau genug

$$m = 11200$$

ſetzen; dieſes giebt

$$n = \frac{\log 336 - \log p}{\log 336 - \left(\log 336 - \frac{864}{11200}\right)}$$

Zuſ.

§. 19. Für eine andere Station unter iener, der die Barometerhöhe p zugehört, ſey die Barometerhöhe = q Par. Linien, ſo iſt für die Höhe dieſer Station über dem Meere nach (§. 18)

$$n = \frac{\log 336 - \log q}{\log 336 - \log\left(336 - \frac{864}{11200}\right)}$$

alſo die Höhe beider Stationen über einander =

$$\frac{l336 - lp}{l336 - l(336 - \frac{864}{11200})} - \frac{l336 - lq}{l336 - l(336 - \frac{864}{11200})}$$

$$= \frac{lq - lp}{l336 - l(336 - \frac{864}{11200})}$$

Wäre aber die Barometerhöhe auf der Meeresfläche nicht = 336, ſondern, allgemein ausgedruckt, = H, ſo müßte man zugleich $\frac{336}{H} . 11200$ für m oder ſtatt 11200. ſchreiben, und ſo wäre die Höhe beider Stationen über einander

$$= \frac{lq - lp}{l\left(\frac{H}{H - \frac{864 . H}{336.11200}}\right)} = \frac{lq - lp}{l\left(\frac{1}{1 - \frac{864}{336.11200}}\right)}$$

die alſo gar nicht von der Höhe des Barometerſtandes auf der Meeresfläche abhängt.

Ich finde den Briggiſchen Logarithmen im Nenner = 0,00010005

alſo

die Höhe beider Stationen über einander, in Toiſen $= 10000 . (lq - lp)$

wo q die der tieferen, p die der höheren Station zugehörige Barometerhöhe in Par. Linien bezeichnet und Briggiſche Logarithmen zu verſtehen ſind.

Ex.

Ex. Die Höhe der Stelle in der Atmoſphäre über der Meeresfläche zu beſtimmen, wo das Queckſilber im Barometer nur noch eine Linie hoch ſteht.

Hier iſt q = 336, p = 1 und lq — lp = 2,5263393 — 0, alſo

die geſuchte Höhe = 25263 Toiſen
= 151578 Par. Fuſſe.

Anm. Vorſtehende Berechnung ſetzt noch unveränderliche Schwere voraus, die aber bis zu ſo groſſen Höhen nicht angenommen werden kann. Auch ſetzt ſie die zunehmende Gröſſe der Schwungkraft bei Seite, welche ſich mit der abnehmenden Schwere vereinigt, um den Druck des Queckſilbers in ſehr beträchtlichen Entfernungen von der Erde zu vermindern, alſo die einem beſtimmten Druck korreſpondirende Barometerhöhe zu vergröſſern, ſo daß man ſolche in ſehr beträchtlichen Höhen wirklich gröſſer finden würde, als man ſie bei dieſen Berechnungen vorausſetzt, und daß in ſolchen Höhen ebendarum die beobachteten Barometerhöhen für die Anwendung vorſtehender Berechnungen um etwas vermindert werden müßten. Bis zu den Höhen, welche unſere Berge erreichen, bleibt indeſſen iene Vorausſetzung ohne merklichen Fehler. Wichtiger in Bezug auf die Reſultate in der Anwendung auf das Höhemeſſen iſt der Umſtand, daß bei Erfindung der obigen Formel auf den Einfluß, welchen die Wärme auf die ſpec. Schwere des Queckſilbers und der Luft hat, keine Rückſicht genommen worden iſt. Nimmt man noch hinzu, daß ſelbſt bei einerlei Wärme die ſpec. Schwere des Queckſilbers von verſchiedenen Naturforſchern verſchieden angegeben wird, daß die phyſiſche Beſchaffenheit der Luft (auch die Verſchiedenheit der Wärme ganz bei Seite geſetzt) doch in Rückſicht auf das Miſchungsverhältniß ihrer theils weſentlichen theils zufälligen Beſtandtheile in den verſchiedenen Schichten der Atmoſphäre nicht ganz einerlei iſt, und daß ſelbſt nicht alle Barometer gleiche Vollkommenheit haben,

ſo wird man gar nicht erwarten, daß die gefundene Formel die Höhen genau angeben ſollte.

Daher haben ſich mehrere Naturforſcher bemüht, der Formel eine gröſſere Genauigkeit zu verſchaffen. Bouger will, man ſolle die nach obiger Formel berechnete Höhe um $\frac{1}{30}$ vermindern, d. h. nur $\frac{29}{30}$ von ihr nehmen.

De Lüc korrigirt ebendieſe Formel ſo: der Wärmegrad ſey in Reaumürſchen Graden zur Zeit der Beobachtung in der unteren Station = k, in der oberen = k', ſo verwandle man den obigen Ausdruck in dieſen

$$10000 . (lq - lp) . \left(1 + \frac{32,5 - (k + k')}{2 . 215}\right)$$

Die Richtigkeit dieſer Formel hat er durch mehrere hundert Beobachtungen immer beſtättigt gefunden *).

Trembley ſetzt dagegen

$$10000 . (lq - lp) . \left(1 + \frac{23 - (k + k')}{2 . 192}\right)$$

Wer de Lüc's Verdienſte um unſere Kenntniſſe von der Atmoſphäre und den dabei dienlichen Werkzeugen kennt, wird das Reſultat ſeiner Unterſuchungen für das wichtigſte halten. Inzwiſchen kann man dennoch auch die de Lückſche Formel, wegen der mannigfaltigen Beſtimmungsſtücke, von denen ſie bei völliger Genauigkeit abhängen müßte, nicht als eine ſolche anſehen, die der Natur der Sache ſo ganz entſpräche. Aber es iſt genug, durch ſie Reſultate zu erhalten, deren Abweichung von der Wahrheit für die Ausübung unbedeutend bleibt.

Eini-

*) Von den Werkzeugen, welche Reaumürſche Grade beſtimmen, wird in der Folge das Nothwendigſte erklärt werden.

(Einige zu dieſem Kap. gehörige Schriften.)

De Lüc Unterſuchungen über die Atmoſphäre und die zu Abmeſſung ihrer Veränderungen dienlichen Werkzeuge. aus dem Franz. von Gehler, 2 Bände in 8. Leipz. 1776.

Käſtner Abhandl. vom Höhenmeſſen mit dem Barometer, in ſeinen Anmerk. über die Markſcheidekunſt. Gött. 1775. in 8.

Hennert Commentatio de altitudinum menſuratione ope barometri, Traj. ad Rhen. 1786.

Damen, de montium altitudina barometro menſuranda, acced. refract. aſtron. theoria, Hag. 1783.

Gehler Phyſ. Wörterbuch, Neue Aufl. 5 Bände in 8. Leipz. 1798—1799. Hierzu erſcheint nächſtens noch ein Supplementband.

Drittes Kapitel.

Wie unter ſonſt gleichen Umſtänden Dichtigkeit der Luft mit ihrer Expanſivkraft zuſammenhängt. Allgemeine Beſchaffenheit der Luftpumpen, und mancherlei Arten derſelben.

Aufg. 3.

§. 20. Zu finden, ob unter ſonſt gleichen Umſtänden die Expanſivkraft der Luft ihrer Dichtigkeit proportional ſey (fig. 5).

Aufl. I. In ein mit Queckſilber gefülltes Gefäß A ſetze man eine gläſerne cylindriſche Röhre, die entweder wie die a oben mit einem zum Aufſchrauben einer

einer metallenen Platte eingerichteten meſſingenen Kranz, oder wie die b mit einem Deckel verſehen iſt, woran ſich ein Cylinderchen oder koniſches Röhrchen befindet, das ſich mit einem Stöpſel genau verſchlieſſen läßt. Wenn der koniſche Stöpſel genau bis an der Röhre oberſten Querſchnitt o herabreicht, ſo wird bei ſeinem Einſtecken die Luft zwiſchen o und m durch ihn nicht verdichtet; ſie behält ihre natürliche Dichtigkeit, ſo wie die in der Röhre a zwiſchen o und m verſperrte Luft, wenn da eine Platte aufgeſchroben wird.

Durch ein kleines Geſtelle läßt ſich leicht bewirken, daß man die Röhre auf eine verlangte Tiefe genau einſenken und erheben kann.

Es ſey die Höhe om $= h$, die on $= H$, die Dichtigkeit der in om befindlichen atmoſphäriſchen Luft $= \triangle$; nun erhöhe man die eingeſenkte Röhre, wie fig. 6, ſo wird das Queckſilber z. B. bis vw ſteigen, es ſey iezt vm $= a$, om $= h'$, die der äuſſeren Atmoſphäre zugehörige Barometerhöhe $= B$, die zu der iezt über vw in der Röhre verſperrten Luft gehörige Barometerhöhe $= b$, ſo iſt

der äuſſere Druck auf pq	=	dem Druck einer Queckſ. Säule von der Höhe B
der Gegendruck der verſperrten Luft mit dem kleinen Queckſilberſäulchen vm	=	dem Druck einer Queckſilberſäule von der Höhe $b + a$

Demnach für den Stand des Gleichgewichts

$$B = b + a$$

oder

$$b = B - a$$

Alſo

Alſo iſt das Verhältniß der Expanſivkraft der fig. 5. verſperrten Luft zur Expanſ. Kraft der fig. 6. verſperrten Luft

wie $B : b = B : (B - a)$

Die Dichtigkeit der verſperrten Luft (fig. 5) verhält ſich zu der (fig. 6)

wie $(h' - a)$ zu h!

Findet man nun

$$B : (B - a) = (h' - a) : h$$

ſo iſt die Expanſivkraft, wenigſtens für verdünnte atmoſphäriſche Luft, der Dichtigkeit proportional.

II. Um dieſelbe Proportion bei verdichteter Luft zu prüfen, fülle man (fig. 7) eine bei b und anfänglich auch bei a offene Röhre bca bis zu einer gewiſſen Horizontalfläche pq mit Queckſilber; dann ſchraube man eine Platte bei a auf und gieſſe bei b aufs Neue Queckſilber hinzu. Dieſes Zugieſſen geſchieht am beſten mittelſt eines kleinen cylindriſchen Maaßes, das mit der Röhre (fig. 7) gleichen Durchmeſſer und eine beliebige Höhe $\mathfrak{h}$ hat; reicht nun das Queckſilber, nachdem man n ſolche Maaße zugegoſſen hat, im Schenkel qb bis an eine gewiſſe Stelle r, die ſich allemal leicht bemerken läßt, und im Schenkel pa bis an s, die erſt noch berechnet werden ſoll, ſo hat man

$$qr + ps = n.\mathfrak{h}$$

alſo

$$ps = n.\mathfrak{h} - qr$$

Die ganze Höhe pa ſey $= h$, ſo iſt

$$sa = pa - ps = h + qr - n.\mathfrak{h}$$

Die

Die der äuſſeren Atmoſphäre zugehörige Barometerhöhe heiſſe b, die der ietzt über s verſperrten zugehörige B, ſo iſt $B = b + qr - ps$

$$= b + qr - n\mathfrak{h} + qr = b + 2.qr - n.\mathfrak{h}$$

alſo

$$B : b = (b + 2.qr - n.\mathfrak{h}) : b$$

und

Dichtigkeit der verſperrten Luft : Dichtigkeit der äuſſeren

$$= pa : as = h : (h + qr - n.\mathfrak{h})$$

Findet man alſo

$$(b + 2.qr - n.\mathfrak{h}) : b = h : (h + qr - n.\mathfrak{h})$$

ſo iſt auch bei dieſem Verſuch mit verdichteter Luft die Expanſivkraft der Luft ihrer Dichtigkeit proportional.

Erfahrung 6.

§. 21. Bis zu ſehr ſtarken Verdünnungen und bis zur vierfachen Verdichtung der nahe an der Erdfläche befindlichen Luft hat man ihre Dichtigkeit immer ihrer Expanſivkraft proportional befunden. Man nennt dieſes Geſetz das Mariottiſche, weil Mariotte ſolches zuerſt aus Verſuchen herleitete. Winkler hat daſſelbe noch bei achtfachem Drucke richtig befunden. Nach Sulzer gab Druck, der noch nicht der ſiebenfache des atmoſphäriſchen war, ſchon achtfache Dichtigkeit. Hingegen wächſt nach Muſchenbröck die Expanſivkraft der Luft, ſobald ihre Dichtigkeit viermal ſo groß als die der Luft nahe an der Erdfläche geworden, bei fernerer Verdichtung in ſtärkerem Verhältniſſe als ihre Dichtigkeit.

Bei Verdünnungen der atmoſphäriſchen Luft treten Umſtände ein, welche die allgemeine Anwendung

des Mariotteſchen Geſetzes nicht geſtatten, wie die Folge ergeben wird.

Zuſ.

§. 23. Kann man für Luft, welche dünner als die atmoſphäriſche nahe an der Erde iſt, das Mariotteſche Geſetz beibehalten, ſo wird die Luft von der Erde aufwärts in demſelben Verhältniſſe dünner, in welchem die Expanſivkraft der Luftſchichten abnimmt, woferne übrigens Luft von gleicher Beſchaffenheit vorausgeſetzt wird.

Aufg. 4.

§. 24. ABCD (fig. 8) ſey eine Röhre von gegebener Weite, und mit ihr eine andere mnop verbunden; beide ſind anfänglich, da ſich noch kein Kolben in der weiteren Röhre befand, mit Waſſer bis an dcrq angefüllt; indem nun AdcD mit natürlicher Luft angefüllt iſt, wird ein genau paſſender Kolben in den Cylinder ABCD eingeſchoben und bis zu einer beſtimmten Tiefe ab niedergedruckt: man fragt, wie hoch das Waſſer in der Röhre mo hinaufgetrieben wird?

Aufl. 1. Der Durchmeſſer dc ſey $= D$, der $rq = d$, die Höhe $Aa = b$, $Ad = h$, und der Waſſerſpiegel werde von dc bis in vw niedergetrieben, ſo daß $dv = x$ ſey, ſo iſt $av = Ad - Aa + dv = h - b + x$; anfänglich gehörte zu der über dc befindlichen Luft die Barometerhöhe B, die gegeben iſt; nach vollendetem Schub des Kolbens iſt ſie

alſo $= \frac{Av}{av} . B = \frac{h + x}{h + x - b} . B.$

2. Er-

2. Erhebt ſich das Waſſer bis ef, ſo iſt der kubiſche Inhalt von $rq\phi = 0,785 \times D^2 . x$, alſo die Länge $r\phi = \frac{0,785 . D^2 . x}{0,785 . d^2} = \frac{D^2}{d^2} . x$, und die lothrechte Höhe $fy = \frac{D^2}{d^2} . x . \sin \phi qy$, alſo

$$fz = \frac{D^2}{d^2} . x . \sin \phi qy + x$$

3. Die ſpec. Schwere des Queckſilbers ſey $= \psi$, die des Waſſers $= 1$ geſetzt, ſo iſt der Druck der Waſſerſäule über vz = dem Druck einer Queckſilberſäule von der Höhe

$$\frac{fz}{\psi} = \frac{\left(\frac{D^2}{d^2} . \sin \phi qy + 1\right) . x}{\psi}$$

4. Die Höhe (no. 3.) muß der am Ende von (no. 1) gleich ſeyn, alſo

$$\frac{h + x}{h + x - b} . B = \frac{\left(\frac{D^2}{d^2} . \sin \phi qy + 1\right)}{\psi} . x$$

oder, wenn die zur Rechten in x multiplicirte Gröſſe A heißt,

$$hB + Bx = (h - b) . A . x + A . x^2$$

und

$$x^2 + \frac{(h - b) . A - B}{A} . x = Bh$$

alſo

$$x = -\frac{(h-b) . A - B}{2A} \pm \sqrt{\left(Bh + \left(\frac{(h-b) A - B}{2A}\right)^2\right)}$$

wo das obere Zeichen genommen wird.

Aufg.

Aufg. 5.

§. 25. Die Röhre CDop (fig. 9) ſteht von p bis q im Waſſer, anfänglich befindet ſich im oberen Theil bei ab ein Kolben, und unter ihm iſt die Röhre bis q durchaus mit Luft angefüllt, der die Barometerhöhe B zugehört; man ſucht die Länge qf des Röhrenſtücks, welches vom Waſſer ausgefüllt werden wird, wann der Kolben bis in vw erhoben wird.

Aufl. Es ſey der oberen Röhre Durchmeſſer $= D$, der unteren $= d$, die Höhe $Aa = a$, die $av = \beta$, die Länge $oq = f$, der Winkel $fqg = \phi$; ψ habe die vorige Bedeutung (§. 24), und qf ſey $= x$; ſo iſt im Zuſtand des Gleichgewichts, wann der Kolben in vw gekommen iſt, und die der verſperrten Luft zugehörige Barometerhöhe in dieſem Zuſtand $= b$ iſt,

$$b + \frac{x.\sin\phi}{\psi} = B$$

und

$$b = \frac{0{,}785.D^2.a + 0{,}785.d^2.f}{0{,}785.D^2.(a+\beta) + 0{,}785.d^2.(f-x)}$$

alſo

$$\frac{D^2.a + d^2.f}{(a+\beta).D^2 + (f-x).d^2} + \frac{x.\sin\phi}{\psi} = B$$

oder

$$D^2.a + d^2.f + \left(\frac{(a+\beta).\sin\phi.D^2}{\psi} + \frac{f.d^2.\sin\phi}{\psi}\right).x$$

$$- \frac{d^2.\sin\phi}{\psi}.x^2 = \left((a+\beta)D^2 + f.d^2\right).B - d^2 B.x$$

oder

$$x^2 - \frac{(a+\beta).D^2 + f.d^2 + B.d^2.\psi : \sin\phi}{d^2}.x$$

$$= - \frac{((a+\beta).D^2 + f.d^2).B.\psi}{d^2.\sin\phi}$$

$$+ \frac{(D^2.a + d^2.f).\psi}{d^2.\sin\phi}$$

Heißt hier die Gröſſe zur Rechten N, die in x multiplicirte Gröſſe M, ſo erhält man

$$x = \tfrac{1}{2}M \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}M^2 + N)}$$

Erklärung 6.

§. 26. Jedes Werkzeug, das durch Hin- und Hergang einer Maſſe in einer Röhre zur Veränderung der Dichtigkeit der Luft in einem mit der Röhre verbundenen Gefäſſe dient, heißt eine Luftpumpe.

Anm. Die Torricelliſche Leere (§. 13) hat die erſte Veranlaſſung zu Anſtalten gegeben, wodurch ſich ein luftleerer Raum erhalten lieſſe. Die Phyſiker zu Florenz bedienten ſich anfänglich dieſer Torricelliſchen Leere, bis man auf bequemere Werkzeuge verfiele.

Zuſ. 1.

§. 27. Zur weſentlichen Einrichtung einer Luftpumpe, inſoferne ſie nur zur Verminderung der Dichtigkeit der atmoſphäriſchen Luft dienen ſoll, gehört bloß ein genauer Cylinder AB (fig. 10), worin ſich ein genau paſſender Kolben n hin und her ſchieben läßt, mit einer daran befindlichen Röhre xw, an deren Ende w ſich der Hals eines Gefäſſes (Recipienten) M ankük-

kütten lieſſe, woferne nur bei c und o die zur Abſchneidung und Wiederherſtellung der Kommunikation des Recipienten mit dem Cylinder oder Stiefel AB, und des Raums unter dem Stiefel mit der äuſſeren Atmoſphäre dienliche Vorrichtungen angebracht werden. Dazu dient bei c eine Klappe, ein kleines Thürchen, das von c nach x aufgeht und von c nach w zufällt; ebenſo eine in einem Seitenröhrchen angebrachte Klappe o, die ſich nach auſſen öffnet und ſich ſelbſt überlaſſen wieder zufällt.

Indem der Kolben n bis auf den Boden x niedergetrieben wird, wird die Klappe c angedruckt und die o aufgeſtoſſen, indem die Luft im Raum cx verdichtet und hierdurch ihre Expanſivkraft vergröſſert wird.

So wird alſo beim erſten Schub alle im Stiefel unter dem Kolben befindliche Luft bis zum Boden x herab in die äuſſere Atmoſphäre ausgeſtoſſen, und es bleibt nur der Raum cx mit atmoſphäriſcher Luft angefüllt, der daher der ſchädliche Raum heißt. Beim Rückzuge des Kolbens verbreitet ſich die Luft aus dreien Räumen, dem M bis an v, dem zwiſchen v und c und dem ſchädlichen Raume (die ich mit I, II und III bezeichnen will) bis zum Kolben hin, dem ſie beim Rückzuge folgt; bezeichne ich alſo dieſen vom Kolben bis zum Ende ſeines Rückzuges durchloſſenen Raum mit IV, ſo iſt iene in I + II + III verſperrte Luft am Ende des Rückzugs in I + II + III + IV verbreitet.

Iſt der kubiſche Inhalt von I + II = K, der kub. Inhalt von III = k, von IV = 𝔎, die Dichtigkeit der äuſſeren atmoſph. Luft = D, die Dichtig-

keit der Luft in I nach dem 1ten Zuge $= D'$, nach dem 2ten $= D''$ u. ſ. w. ſo iſt

$$D' = \frac{K + k}{K + k + \mathfrak{K}} \cdot D$$

Nach wieder erfolgtem Einſchieben des Kolbens iſt die Dichtigkeit der Luft zwar für I und II noch $= D'$, aber für III wieder, wie nach iedem folgenden Schub, $= D$, alſo hiernächſt nach dem 2ten Zuge.

$$D'' = \frac{K . D' + k . D}{K + k + \mathfrak{K}} =$$

$$= \frac{K . (K + k) . D}{(K + k + \mathfrak{K})^2} + \frac{k . D}{K + k + \mathfrak{K}}$$

Und nun nach dem 3ten Zuge

$$D''' = \frac{K . D'' + k . D}{K + k + \mathfrak{K}}$$

$$= \frac{K^2 . (K + k) . D}{(K + k + \mathfrak{K})^3} + \frac{K . k . D}{(K + k + \mathfrak{K})^2}$$

$$+ \frac{k . D}{K + k + \mathfrak{K}}$$

Nach dem 4ten

$$D^{IV} = \frac{K . D''' + k . D}{K + k + \mathfrak{K}}$$

$$= \frac{K^3 (K + k) . D}{(K + k + \mathfrak{K})^4} + \frac{K^2 . k . D}{(K + k + \mathfrak{K})^3}$$

$$+ \frac{\mathfrak{K} k D}{(K + k + \mathfrak{K})^2} + \frac{k D}{K + k + \mathfrak{K}}$$

Ueber-

Ueberhaupt nach dem nten Zuge die Dichtigkeit der Luft im Recipienten

$$= \frac{K^{n-1}.(K+k).D}{(K+k+\mathfrak{K})^n} + \frac{K^{n-2}.k.D}{(K+k+\mathfrak{K})^{n-1}}$$

$$+ \frac{K^{n-3}.k.D}{(K+k+\mathfrak{K})^{n-2}} \ldots + \frac{K^0.k.D}{K+k+\mathfrak{K}}$$

$$= \left(\frac{K^{n-1}.(K+k)}{(K+k+\mathfrak{K})^n} + \frac{(K+k+\mathfrak{K})^{n-1}.k - K^{n-1}.k}{(K+k+\mathfrak{K})^{n-1}.(\mathfrak{K}+k)}\right)$$

$\times D$ (Alg. § 30. no. II); oder auch =

$$\left(\frac{K}{K+k+\mathfrak{K}}\right)^{n-1} . \frac{K+k}{K+k+\mathfrak{K}}.D$$

$$+ \frac{k.D}{\mathfrak{K}+k} - \left(\frac{K}{K+k+\mathfrak{K}}\right)^{n-1} . \frac{k.D}{\mathfrak{K}+k}$$

oder =

$$\left(\left(\frac{K}{K+k+\mathfrak{K}}\right)^{n-1} . \left(\frac{K+k}{K+k+\mathfrak{K}} - \frac{k}{\mathfrak{K}+k}\right) + \frac{k}{\mathfrak{K}+k}\right).D$$

Weil nun $\frac{K+k}{K+k+\mathfrak{K}}$ allemal gröſſer als $\frac{k}{\mathfrak{K}+k}$ ſeyn muß, ſo iſt dieſer beiden Gröſſen Differenz allemal beiaht, alſo

die Dichtigkeit der Luft im Recipienten nach n Zügen allemal noch gröſſer $\frac{k}{\mathfrak{K}+k}.D.$

Zuſ. 2.

§. 28. Allemal kann n ſo groß werden, daß

$$\left(\frac{K}{K+k+\mathfrak{K}}\right)^{n-1} . \left(\frac{K+k}{K+k+\mathfrak{K}} - \frac{k}{\mathfrak{K}+k}\right)$$

ganz unbedeutend wird, da dann die Dichtigkeit im Recip. nur noch $= \frac{k}{K+k} \cdot D$ angenommen werden könnte. Dieſes iſt die Gränze der Verdünnung der Luft im Recipienten, die man eigentlich nie erreichen kann, der man ſich aber deſto ſchneller nähert, ie gröſſer K iſt. Die Luftpumpe geſtattet alſo eine deſto gröſſere Verdünnung, ie kleiner $\frac{k}{K+k}$ d. i. ie kleiner k oder der ſchädliche Raum in Vergleichung mit K oder mit dem Raume iſt, welchen der Kolben bei iedem Zug durchlauft.

Anm. 1. Es wird vorausgeſetzt, daß die zum iedesmaligen Zufallen beſtimmte Klappe bei ieder rückkehrenden Bewegung ſich augenblicklich ſchlieſſe und alle Kommunikation mit der Luft auſſerhalb derſelben Klappe aufs vollkommenſte abſchneide, auch daß ſonſt alles aufs vollkommenſte luftshaltig ſey, welches freilich für den Künſtler eine ſehr ſchwere Bedingung iſt.

Uebrigens giebt fig 10 nur einen beiläufigen Begriff von der älteſten Einrichtung der Lumpumpen, wie ſie Otto von Guericke, Burgermeiſter zu Magdeburg, ums J. 1650 erfunden hat.

Der Hahn y bleibt während dem Pumpen, wenigſtens beim Rückzuge des Kolbens, beſtändig offen. Soll aber der angeküttete Recipient abgenommen werden, ohne daß wieder Luft von auſſen hineindringe, ſo wird vorher dieſer Hahn ſo gedreht, daß die Kommunikation mit der äuſſeren Luft dadurch abgeſchnitten wird.

Ich habe es gerne zuerſt bei dieſer ganz ungekünſtelten Einrichtung belaſſen wollen, da dieſelben Berechnungen auf iede andere Art von Luftpumpen ebenſo angewendet werden. Eine hierzu noch gehörige beſondere Bemerkung in Anſehung der Smeatonſchen Luftpumpe wird in der Folge vorkommen.

Anm.

Anm. 2. Daß eine beſtimmte Luftmaſſe aus ihrem anfänglichen Raum in die Hälfte des Raums gepreßt doppelte Dichtigkeit, in den dritten Theil deſſelben gepreßt dreifache überhaupt in $\frac{1}{n}$ des anfänglichen Raums zuſammengedruckt n fache Dichtigkeit erhält, und umgekehrt aus einem beſtimmten Raume in einen n fachen verbreitet nur $\frac{1}{n}$ von ihrer anfänglichen Dichtigkeit behält, iſt für ſich klar und ſteht mit dem hypothetiſchen Mariotteſchen Geſetze in gar keiner Verbindung; die vorgetragene Berechnung bleibt alſo richtig, wenn auch das Mariotteſche Geſetz nicht richtig wäre. Die Ungewißheit dieſes Geſetzes läßt nur ungewiß, ob mit der n fachen Verdünnung der anfänglichen Luft auch n fache Verſchwächung der Expanſivkraft verbunden ſey? ob man alſo auch umgekehrt daraus, daß nach einer gewiſſen Anzahl von Kolbenzügen die Expanſivkraft der zurückgebliebenen Luft etwa mittelſt einem ſchicklich angebrachten Barometer nur $\frac{1}{n}$ ſo groß als anfänglich befunden wird, ſchlieſſen dürfe, daß ſie auch nur noch $\frac{1}{n}$ von ihrer anfänglichen Dichtigkeit habe? In der That leiten Verſuche, wie man finden wird, auf den Schluß, daß bei beträchtlichen Verdünnungen der Luft ihre Expanſivkraft langſamer als ihre Dichtigkeit abnehmen müſſe und daß alſo die Dichtigkeit in ſtärkerem Verhältniſſe vermindert worden ſey, als nach dem Verhältniſſe der zugehörigen Barometerhöhen.

Anm. 3. Guericke ſtellte zwar mit ſeiner 1650 erfundenen Luftpumpe ſchon im J. 1654 auf dem Reichstage zu Regensburg öffentliche Verſuche an, aber ihre erſte Beſchreibung gab doch erſt ein Jeſuit, Kaſpar Schott in Mechanica hydraulico-pneumatica, Herbipoli 1657 in 4, in Append. Experimentum nouum Magdeburgicum.

Daher wird unrichtig Robert Boyle für den Erfinder der Luftpumpen ausgegeben. Er verbeſſerte ſie nur

beſonders darin, daß er mit Hook eine verzahnte Kolbenſtange anbrachte, die durch eine Kurbel mit einem eingreifenden kleinen Rade oder Trilling ein- und ausgewunden werden konnte. Ueberdas ließ er die Ventilen oder Klappen weg, und brachte bloß in der Wand des ſchädlichen Raums eine enge Seitenöffnung mit einem eingeriebenen Stöpſel an, welcher beim Einſchieben des Kolbens herausgenommen und beim Rückzuge (der bei ihm lothrecht geſchahe) wieder eingeſteckt wurde. Der Hahn y wurde beim Einſchieben zu- und beim Rückzuge wieder aufgedreht. Auch brachte er oben am Recipienten einen metallenen Deckel mit einem Stöpſel an.

ſ. Boyles Noua experimenta phyſico-mechan. de vi aëris elaſtica Opp. T. I.

Von ſeinem Namen rührt die Benennung Boyliſche Leere — richtiger die Guerickiſche Leere.

Anm. 4. Guericke blieb wegen der mit dem Getriebe verbundenen langſameren Bewegung auch nach iener Boyliſchen Abänderung doch bei dem Kolben mit unverzahnter Stange ſtehen, brachte aber iezt einen Hebel zur Erleichterung der Bewegung an. Auch ſezte er die Maſchine ſo unter Waſſer, daß die Verküttung und der bei y angebrachte Hahn vom Waſſer bedeckt wurden. Er beſchrieb nunmehr ſelbſt zum erſtenmal ſeine verſchiedene Einrichtungen unter dem Titel:

Ottonis de Guericke Experim. noua Magdeburgica de vacuo ſpatio. Amſtel. 1672. fol.

Anm. 5 Sturm ließ das Ventil o (fig. 10) weg, und brachte dagegen eine hohle Kolbenſtange an, deren Höhlung ſich in die freie Luft endigte. Mit dieſer Höhlung kommunicirte ein durch den Kolben gehender Kanal, der mit einem Ventil bedeckt war, das ſich beim Einſchieben des Kolbens nach auſſen in die freie Luft öffnete.

Anm. 6. Dionyſius Papin brachte an der unverzahnten Kolbenſtange einen Steigbügel an. Aber ſeine wichtigſte Verbeſſerung beſtand darin, daß er an der mit dem

dem Stiefel und mit der Luft unter dem Recipienten kommunicirenden Röhre einen Teller anbrachte, der zum Aufſetzen des Recipienten oder der auszuleerenden Gefäſſe dient.

Nouvelles expériences du vuide à Paris 1674. 4.

Anm. 7. Hierauf erſchien die noch immer berühmte, auch von Wolf beſchriebene, Senguerdſche Luftpumpe, mit einem ſchiefliegenden Stiefel, von Senguerd, Prof. zu Leiden. Er gab ſie ſchon in ſeiner

Philoſophia natural.; Lugd. Bat. 1685.

an, brachte ſie aber ſelbſt erſt 1697 völlig zu Stande.

Die verzahnte Kolbenſtange wird ein, und ausgewunden; am Boden des ſchiefliegenden Stiefels iſt eine enggebohrte Röhre befeſtigt, die in einiger Entfernung vom Stiefel einen kurzen lothrechten engdurchbohrten und von auſſen mit einem Gewinde verſehenen Aufſatz hat, auf welchen ein abgeſchliffener meſſingener Teller, der zu dem Ende in der Mitte eine Oeffnung mit einer Mutter hat, aufgeſchroben werden kann.

Nahe am Boden des Stiefels iſt die Kommunikationsröhre mit einem Hahn verſehen, um die Kommunikation des Stiefels mit dem Teller abſchneiden und wieder herſtellen zu können.

Zu dem Ende iſt der in der Hülſe ad bc (fig. 11) eingeſteckte Hahn nvoqp, welcher oben durch einen hier nicht ausgedruckten beſonderen Griff leicht herumgedreht werden kann, von oben herab ſo gebohrt, wie die Figur es zeigt, daß nämlich bei einer gewiſſen Stellung deſſelben das untere Ende dieſes ſchiefen Kanälchens ſich an das Kanälchen der von dem unteren Ende S des Stiefels abgeleiteten Kommunikationsröhre verſchließt, wodurch der Raum im Stiefel unter dem Kolben mit der äuſſeren Atmoſphäre bei n in Kommunikation kommt.

Auf dieſe Weiſe wird die Luft im Stiefel beim Einſchieben oder Niederwinden des Kolbens in die Atmoſphäre auszuweichen genöthigt.

Ueberdas iſt der Hahn auch wagrecht durchbohrt, ſo daß die lothrechte Ebene, in der die Mittellinie dieſes wagrechten Kanälchens liegt, mit iener, in welcher die Mittellinie des vorigen Kanälchens liegt, einen rechten Winkel macht.

Daher zeigt die Figur von dieſem wagrechten Kanälchen nur den kreisförmigen Durchſchnitt bei x, ſeine beiden Ausgänge ſchlieſſen ſich in dieſer Stellung des Hahns an die innere Wandfläche der äuſſeren Hülſe genau an, ſo daß in dieſer Stellung nirgends Luft in dieſes Kanälchen treten kann.

In dieſer Stellung wird alſo der Kolben bis auf den Boden niedergewunden. Soll nun der Kolben wieder zurückgewunden werden, ſo wird der Hahn vorher um einen Quadranten herumgedreht. Hierdurch kommt das wagrechte Kanälchen in die Lage ef, ſo daß nunmehr der Raum im Stiefel unter dem Kolben mit dem Raum w über dem Teller, worauf der Recipient (eine gläſerne Glocke) ſteht, in Kommunikation tritt, hingegen ſchließt ſich iezt die untere Oeffnung des aufwärts in die freie Luft gehenden Kanälchens an die innere Fläche der Hülſe genau an, daß alſo alle Kommunikation der äuſſeren Luft mit dem Stiefel ſowohl als mit dem Recipienten nunmehr abgeſchnitten iſt.

Indem alſo nach dieſer Umdrehung der Kolben wieder zurückgezogen wird, bekommt die Luft unter der Glocke völlige Freiheit ſich durch die Röhre wfe bis in den Stiefel zu verbreiten und dem Kolben zu folgen.

Wird nun am Ende des Rückzugs der Hahn wieder in die erſte Stellung gedreht, dann der Kolben wieder hineingewunden und ſo das vorige Verfahren immer wiederholt, ſo erfolgt die Verdünnung der Luft unter der Glocke nach (§. 27 u. 28). Dabei iſt der Raum zwiſchen der äuſſeren Fläche des Hahns bei c und der Grundfläche des bis zur tiefſten Stelle eingeſchobenen Kolbens der ſchädliche Raum k, der Raum, welchen der Kolben von der tiefſten bis zur höchſten Stelle durchlauft, iſt K, und der Raum unter der Glocke (nach Abzug des Raums, welchen etwa dar-

darunter gebrachte Körper einnehmen) mit Inbegriff des von w bis an den ſchädlichen Raum ſich erſtreckenden Kanälchens iſt K (§. 27).

Soll dieſe Sen guerdſche Pumpe als **Kompreſſionspumpe**, d. h. zur Verdichtung einer Luftmaſſe gebraucht werden, ſo wird an dem über dem Teller hervorragenden Theile des Röhrchens w, welches von auſſen ringsherum ein Gewinde hat, noch ein metallenes Röhrenſtück angeſchroben, deſſen durchgehendes Kanälchen wiederum durch einen durchgehenden Hahn nach Willkühr mit der Oeffnung w in Kommunikation gebracht oder davon abgeſchnitten werden kann. Dieſes angeſchrobene Röhrenſtück hat oberhalb dem Hahn wiederum auf ſeiner äuſſeren Fläche ein Gewinde, damit ſich ein metallenes Gefäß anſchrauben laſſe, das zu dem Ende in ſeinem Boden ein Loch mit einer Mutter hat, die zu ienem Gewinde paßt. Iſt die Luft im Gefäſſe verdichtet, welches durch entgegengeſetzte Umdrehung des Hahns vopq geſchieht, ſo darf man nur das aufgeſchrobene Stück mittelſt Umdrehung des daran befindlichen Hahns verſchlieſſen und es nun ſamt dieſem Röhrenſtück von w wieder wegnehmen.

Anm. 8. **s'Graveſande** gab zuerſt eine Einrichtung an bei der mit dem Hin und Herſchieben des Kolbens der zur Ableitung der Luft in die Atmoſphäre angebrachte Hahn von ſelbſt in die iedesmal erfoderliche Lage kommt.

Anm. 9. Zu den berühmt gewordenen älteren Luftpumpen gehört beſonders die **einfache Nolletſche** Luftpumpe. Der Kolben geht wie bei der Boyliſchen lothrecht von unten hinauf, aber ſtatt der Getriebe iſt die unverzahnte Kolbenſtange zum Niedertreten oder Rückzuge mit einem **Steigbügel** und zum Aufziehen oder Einſchieben mit einer aufwärts gebogenen Stange verſehen. Die Kommunikationsröhre, welche aus dem Stiefel zum Teller führet, hat oben nahe am Stiefel einen Hahn, der wie der Senguerdſche doppelt gebohrt iſt.

Nollet, leçons de Phyſ. exper. T. III, Leç. X.

Auſſen

Auſſen vor der Oeffnung des Hahns, durch welche die Luft aus dem Stiefel in die Atmoſphäre tritt, iſt ein Ventil vorgelegt, das bei der Senguerdſchen fehlt. Hierdurch wird das Aufziehen des Kolbens merklich erleichtert, weil der Kolben nicht eher den Widerſtand der äuſſeren am Ventil anliegenden atmoſphäriſchen Luft empfindet, als bis die im Stiefel befindliche verdünnte Luft durch das Einſchieben des Kolbens iedesmal wieder bis zur Dichtigkeit der atmoſphäriſchen zuſammengepreßt worden iſt.

Die doppelte Nolletſche Luftpumpe führt ein Getriebe zwiſchen verzahnten Stangen.

Anm. 10. Nach Nollet machte ſich beſonders Smeaton, ein einſichtsvoller engliſcher Künſtler] um die Verbeſſerung der Luftpumpen verdient. Er wußte 1.) die Luftpumpe mit 3 Ventilen ſo einzurichten, daß ſie zugleich als Kompreſſionspumpe gebraucht werden kann. Bloß zu dieſer Beſtimmung ihres Gebrauchs brachte er einen Hahn an, der übrigens bei dem Gebrauche immer einerlei Stellung behält, die nur verſchieden iſt, nachdem die Pumpe zum Evakuiren oder zum Komprimiren dienen ſoll. Auſſerdem wurden 2) iene Ventile ſo angebracht, daß beim Anfang eines ieden neuen Kolbenzugs der unter dem Kolben noch mit Luft angefüllte ſchädliche Raum nicht mit Luft von der natürlichen Dichtigkeit, ſondern mit äuſſerſt verdünnter Luft angefüllt bleibt.

Wenn bei dieſer Pumpe der Raum des Recipienten und des bis zum Bodenventil im Stiefel gehenden Kanälchens zuſammengenommen = K, der Raum zwiſchen dieſem Bodenventil und dem Kolben in ſeinem tiefſten Stande = k; der Raum, welchen der Kolben durchlauft = $\mathfrak{K}$, und der Raum zwiſchen dem Kolben und dem Deckelventil = $\mathfrak{k}$ geſetzt wird, ſo iſt nach iedem Hube oder Rückzuge des Kolbens die Dichtigkeit der Luft im Raume $\mathfrak{k}$ die der äuſſeren atmoſphäriſchen = D, und nun am Ende des folgenden Schubs oder Niedergangs $= \frac{\mathfrak{k}}{\mathfrak{K} + \mathfrak{k}} . D.$

Bei

Bei iedem Niedergange des Kolbens muß das Kolbenventil ſich immer wieder öffnen. ſolange bis die Dichtigkeit der Luft im Raume k nur noch $= \frac{\mathfrak{k}}{\mathfrak{K} + \mathfrak{k}} . D$ geworden iſt, das Gewicht des Ventilchens bei Seite geſetzt.

In dieſem Zuſtande, da der Kolben in ſeiner tiefſten Stelle ſtebt, iſt die Dichtigkeit der Luft im Raume

$$K = \frac{k}{\mathfrak{K}+k} . \left(\frac{\mathfrak{k}}{\mathfrak{K}+\mathfrak{k}} . D\right).$$

Wird nun nach Erreichung dieſer Verdünnung der Kolben noch einmal gezogen, ſo kann ſich das Bodenventil nicht noch einmal öffnen. Alſo iſt bei dieſer Pumpe vorſtehender Werth die Gränze der Verdünnung, die viel weiter geht, als die §. 28.

Die umſtändlichere Beſchreibung kann dem mündlichen Vortrage vorbehalten bleiben.

Erklärung 7.

§. 31. **Das Verhältniß der Expanſivkraft verſchiedener Luftarten oder überhaupt verſchiedener elaſtiſch-flüſſiger Materien, nachdem man ſie auf gleiche Dichtigkeit zuſammengepreßt hat, iſt auch das Verhältniß ihrer ſpecifiſchen Elaſticität.**

Gewöhnlich wird bei dieſer Vergleichung die Expanſivkraft der atmoſph. Luft = 1 geſetzt, da dann die Zahl, welche die verhältnißmäſſige Gröſſe der Expanſivkraft einer andern auf dieſelbe Dichtigkeit gebrachten Luftart ausdrückt, auch ſchlechthin die ſpec. Elaſticität der letzteren genennt werden kann.

Zuſ. 1.

§. 32. Weil iede Luftart, um mit der atmoſphäriſchen gleiche Dichtigkeit zu erhalten, aus dem

Raume,

Raume, den ſie beim Druck der Atmoſphäre einnimmt, in einen ſovielmal gröſſern Raum verbreitet oder in einen ſovielmal kleineren zuſammengepreßt werden müßte, ſovielmal ſie beim Drucke der Atmoſphäre ſpecifiſch ſchwerer oder ſpec. leichter als die demſelben Drucke ausgeſetzte atmoſphäriſche Luft iſt, ſo iſt nach (§. 30. Anm. 5) für die Barometerhöhe von 28 Zollen und für die gemeinſchaftliche Wärme von 10° Reaum. bei Vorausſetzung des Mariotteſchen Geſetzes, die

ſpec. Elaſtic. der ſchwefelſauren Luft . . .	$\frac{10000}{25670}$
— — der Kohlenſ.	$\frac{10000}{14995}$
— — Salpeterluft	$\frac{10000}{11888}$
— — des Sauerſtoffgas	$\frac{10000}{11019}$
— — der atmoſph. Luft	1
— — der Stickluft	$\frac{10000}{9660}$
— — der fl. alk. Luft	$\frac{10000}{5975}$
— — der infl. Luft	$\frac{10000}{770}$

Zuſ. 2.

§. 33. Nach demſelben Begriffe finden auch verſchiedene ſpecifiſche Elaſticitäten von einerlei Luftart bei verſchiedener Wärme ſtatt. Wäre bei m° Reaum. die Expan-

Expanſivkraft (d. h. die Höhe einer mit ihr im Gleichgewicht ſtehenden Queckſilberſäule) atmoſph. Luft in einem gegebenen Falle = E, die Expanſivkraft derſelben Luft bei n° Reaum. = e, ihre Dichtigkeit in jenem Falle = D, in dieſem = d, ſo hätte man, die ſpec. Elaſticität der erſteren = 1 und die der letzteren = f geſetzt,

$$1 : f = E : \frac{D}{d} . e = \frac{E}{D} : \frac{e}{d}$$

Und ſo laſſen ſich auch die ſpec. Elaſt. verſchiedener Luftarten oder verſchiedener elaſtiſch flüſſiger Maſſen bei verſchiedener Wärme mit einander vergleichen.

Anm. Geſetzt eine Luftmaſſe, deren Expanſivkraft E wäre, beſtände aus 1000 Theilchen, und eine andere, deren Exp. Kr. = e wäre, bei gleichem Volumen aus 800 Theilchen, ſo hätte man

$$1 : f = \frac{E}{1000} : \frac{e}{800}$$

Wären nun die Expanſivkräfte der Anzahl von Lufttheilchen proportional, in welche die Expanſivkraft wirkt (wie das Gewicht eines Körpers der Menge ſeiner Theilchen proportional iſt, in welche die Schwere wirkt), ſo wären die Quotienten $\frac{E}{1000}$, $\frac{e}{800}$ Ausdrücke für die Expanſivkraft eines einzelen Theilchens von jeder dieſer beiden Luftarten. Dann könnte man alſo die ſpec. Elaſticität als die Expanſivkraft eines einzelen Theilchens betrachten, der die Quotienten $\frac{E}{D}$, $\frac{e}{d}$ proportional wären.

Dieſe Betrachtung wäre aber augenſcheinlich unrichtig, denn von einer aus 1000 Theilchen beſtehenden Luftmaſſe, deren Expanſivkraft mit einer Queckſilberſäule E z. B. von 28 Zollen im Gleichgewicht wäre, läßt ſich nicht ſagen, daß

daß z. B. 5 Theilchen mit einer Queckſilberſäule von $\frac{28}{200}$ Zollen oder ein Theilchen mit einer Queckſilberſäule von $\frac{28}{1000}$ Zollen im Gleichgewicht wäre. Vielmehr kommt die Expanſivkraft von 28 Zollen iedem Theilchen zu.

Es läßt ſich alſo unter ſpecifiſcher Elaſticität nicht etwa ſo was denken wie unter ſpec. Schwere, daß man nämlich durch die Quotienten $\frac{E}{D}$. $\frac{e}{d}$ die verhältnißmäßigen Preſſungen einzeler Theilchen verſperrter Luftmaſſen erhielte.

Offenbar geben dieſe Quotienten nur das Verhältniß der Expanſivkräfte verſchiedener Luftmaſſen für den Fall an, welcher (§. 31) beſtimmt worden iſt, und zwar nur innerhalb den Gränzen, für welche das Mariotteſche Geſetz gilt.

Viertes Kapitel.

Von Thermometern.

Erfahrung 7.

§. 34. Den Begriff von Wärme erhalten wir durch das Gefühl, das uns auch merklich höhere und geringere Wärmegrade zu unterſcheiden dient, aber doch keinen ſichern Maaßſtab für beſtimmte Wärmegrade abgiebt. Hierzu dient uns eine andere Erfahrung, welche uns belehrt, daß alle Materien ausgedehnt oder in einen gröſſeren Raum verbreitet werden, ſobald wir ſie mit Materien in Berührung bringen, die für unſer Gefühl merklich wärmer als iene

der

ſind. In der That kennen wir keine andere von der Wirkung der Wärme zunächſt abhängende Erſcheinung, auſſer unſerem Gefühle, als die Veränderung des Volumens, welche ſie bei allen Körpern bewirkt oder doch zu bewirken ſtrebt, wenn etwa dieſer Veränderung Hinderniſſe entgegengeſetzt werden ſollten.

Axiom.

§. 35. Ein durchaus gleichartiger Körper (deſſen kleinſte durch mechaniſche Zerlegung darſtellbare Theilchen alle einerlei chemiſche Beſchaffenheit haben), der bei irgend einer Wärme auch durchaus gleichförmige Dichtigkeit und gleichen Zuſammenhang hat, wird durch iede andere in allen ſeinen Theilen gleichförmig verbreitete Wärme auch durchaus in allen Theilen ſeiner Maſſe gleiche Aenderung ſeines Volumens leiden.

Zuſ.

§. 36. Weil ieder Körper von beſtimmter Art bei ieder beſtimmten Wärmeänderung auch eine beſtimmte Aenderung ſeines Volumens leidet, ſo ſind ſolche gleichartige Körper (§. 35) vorzüglich geſchickt, durch die Gröſſe der Aenderung ihres Volumens auch beſtimmte Aenderungen der Wärme und beſtimmte Wärmegrade anzugeben. Dahin gehören flüſſige Körper, als Luft, Waſſer, Weingeiſt, Leinöhl, Queckſilber, wenigſtens bis zu gewiſſen Graden der Wärme; und bei noch höheren Graden Maſſen von Thon, auch von Metall.

Erklärung 8.

§. 37. Die Beſtimmung des Wärmegrades eines Körpers A durch die verhältnißmäſſige Aus-

dehnung eines zum Maaſsſtabe angenommenen flüſſigen oder feſten Körpers, der mit dem A gleiche Wärme angenommen hat, heißt die Temperatur des Körpers A.

Erklärung 9.

§. 38. Ein Werkzeug, das durch die verhältnißmäſſige Ausdehnung, welche die Wärme eines andern mit ihm in Berührung gebrachten Körpers bei ihm bewirkt, zur Angabe der Temperatur dieſes Körpers dient, heißt ein Thermometer (Wärmemeſſer auch wohl Thermoſkop).

Anm. 1. Das älteſte Thermometer iſt das Drebbelſche (fig. 13). Die gläſerne Kugel A mit der daran befindlichen Glasröhre BC wird zuerſt etwas erwärmt, damit ein Theil der darin enthaltenen atmoſphäriſchen Luft entweiche; mit der zurückgebliebenen etwas verdünnten Luft wird die noch warme Röhre in ein mit Waſſer, Weingeiſt oder einer anderen flüſſigen Materie gefülltes Behältniß DE eingetaugt, da dann der Druck der Atmoſphäre die flüſſige Materie in der Röhre, während die darin erwärmt geweſene Luft wieder bis zu einer beiläufig mittleren Temperatur, wie man ſie in tiefen Kellern hat, abgekühlt wird, auf eine gewiſſe Höhe H hinauftreibt, die dann mit o bezeichnet werden kann. So korreſpondirt dieſe Stelle mit beiläufig mittlerer Temperatur. Gleiche Abtheilungen von o abwärts und von o aufwärts zeigen dann ſtärkere oder geringere Ausdehnungen der verſperrten Luft, alſo gröſſere oder geringere Wärme an.

Eine bequemere Einrichtung des Drebbelſchen Therm. giebt fig. 14.

Man ſieht aber gleich, daß dieſes Drebbelſche Therm. nicht bloß Aenderungen der Wärme, ſondern zugleich Aenderungen des atmoſph. Drucks anzeigt, daher die bloß von der Wärme herrührenden Aenderungen in jedem Fall wie-

der durch beſondere Berechnungen gefunden werden müßten. Auſſerdem hatte Drebbel weder für die Stelle H, d. i. für das Null, noch für die übrigen oberhalb und unterhalb getragenen Abtheilungen hierbei ſo genaue Beſtimmungen, daß dieſes Therm. zur Angabe übereinſtimmender Wärmegrade hätte gebraucht werden können.

Anm. 2. Amonton änderte das Drebbelſche Therm. ſo ab, wie fig. 15.

Dabei machte er den Durchmeſſer der Glasröhre ſehr klein im Vergleichung mit dem der Kugel. Die Kugel wurde zum Theil mit Queckſilber angefüllt, über dem die Luft verſperrt war, ſo daß ſich das Queckſilber im ſiedenden Waſſer auf eine gewiſſe Höhe GH (z. B. von 45 Zollen) erhob, ohne daß die Oberfläche EF in der Kugel merklich tiefer ſank.

m ſey die Stelle, bis zu der das Queckſilber im ſchmelzenden Schnee ſinkt, und zwar bei irgend einer beobachteten Barometerhöhe b, die in Linien ausgedruckt ſeyn kann.

Die Höhe der Stelle m über EF, gleichfalls in Linien ausgedruckt, heiſſe t.

Steigt nun das Queckſ. bei irgend einer Beobachtung z. B. bis n bei der Barometerhöhe B, und ſetzt man die Thermometerhöhe $nE = T$, ſo ſteht iezt die Expanſivkraft der verſperrten Luft mit einer Queckſilberſäule im Gleichgewicht, deren Höhe $= B + T$ iſt, da ſie bei der Gefrierkälte $= b + t$ war.

So ſind alſo die Höhen

$$B + T, \quad b + t$$

Verhältnißzahlen für die Expanſivkraft der verſperrten Luft bei verſchiedenen Temperaturen.

Würde bei einer neuen Beobachtung die Barometerhöhe $= \mathfrak{B}$, die Thermometerhöhe $= \mathfrak{T}$, die Wärme $= \mathfrak{W}$, ſo wie die bei der vorigen $= W$ geſetzt, ſo hätte man

$$\mathfrak{h}) \quad W : \mathfrak{W} = (B + T) : (\mathfrak{B} + \mathfrak{T})$$

 wo-

woferne 1) das Volumen der verſperrten Luft bei dieſer Einrichtung ohne merklichen Fehler als unveränderlich angeſehen werden kann, 2) die Aenderung der ſpec. Schwere des Queckſilbers bei verſchiedenen Temperaturen unbedeutend iſt, und 3) das Verhältniß der Expanſivkraft der verſperrten Luft bei verſchiedenen Temperaturen zugleich für das Verhältniß der verſchiedenen Wärme gelten kann.

Die erſte Vorausſetzung kann für eine Kugel, deren Durchmeſſer z. B. 50 mal ſo groß als der Durchmeſſer der Glasröhre wäre, noch ohne merklichen Fehler gelten. Bei der 2ten iſt zu bemerken, daß die ſpec. Schwere des Queckſilbers von der Froſtkälte bis zur Hitze des ſiedenden Waſſers um 0,015 abnimmt. Inzwiſchen wird der deßhalb in einzele Vergleichungen zwiſchen dieſe Gränzen fallender Temperaturen einſchleichende Fehler immer viel kleiner als gerade für dieſe beiden Gränzen ſelbſt; auſſerdem wird er aber auch durch einen gerade entgegengeſetzten Fehler, der aus den hier bei Seite geſetzten Aenderungen des Glaſes bei verſchiedenen Temperaturen entſteht, noch ſo vermindert, daß die daraus entſtehenden Unrichtigkeiten für die Ausübung unbedeutend werden, ſolange die Wärmegrade zwiſchen m und H fallen.

Zur 3ten Vorausſetzung dient folgende Prüfung:

Man ſetze das Werkzeug nach einander in zwei Gefäſſe mit Waſſer von verſchiedenen Temperaturen.

Dem Iten Verſuch ſollen die Buchſtaben W, B, T dem IIten die 𝔚, 𝔅, 𝔗 zugehören.

In iedem Gefäß ſollen ſich z. B. 2 Pf. Waſſer befinden.

Zu der Wärme W ſoll eine Menge von Wärmetheilchen = M, zu der 𝔚 die 𝔐 gehören.

Vermiſcht man nun beide Waſſermaſſen ſchnell mit einander, ſo hat man eine Miſchung von 4 Pf., in der

$$M + \mathfrak{M} \text{ Wärmetheile}$$

enthalten ſind.

Das

Das Waſſer enthält alſo ietzt in 2 Pf. Waſſer

$$\frac{M + \mathfrak{M}}{2} \text{ Wärmetheile.}$$

Wäre nun die ietzige Barometerhöhe β und die Thermometerhöhe $= \tau$, ſo müßte, woferne die Menge der Wärmetheilchen der Expanſivkraft proportional wäre,

$$\beta + \tau = \frac{B + T + \mathfrak{B} + \mathfrak{T}}{2}$$

ſeyn, oder weil während dem Verſuch B, $\mathfrak{B}$ und β nicht merklich von einander verſchieden ſeyn werden,

$$B + \tau = \frac{B + T + B + \mathfrak{T}}{2}$$

$$= B + \frac{T + \mathfrak{T}}{2}$$

alſo

$$\tau = \tfrac{1}{2}(T + \mathfrak{T})$$

Hiermit ſtimmt nun die Erfahrung von der Gefrierkälte bis zur Hitze des ſiedenden Waſſers, d. i. für alle Thermometerſtände zwiſchen m und h (fig. 15) mehreren Verſuchen zufolge gut genug überein; andere zeigen zwar beträchtliche Abweichungen. Ueberhaupt laſſen ſich aber bei verſchiedenen Graden der Trockenheit der Luft keine übereinſtimmende Reſultate erwarten, und die von Einigen gefundene Abweichungen ſcheinen nach Hrn. Prof. Schmidts genauen Unterſuchungen bloß der Feuchtigkeit zugeſchrieben werden zu müſſen, welche ſolche Beobachter nicht ſorgfältig genug von der Luft abgeſchieden hatten. ſ. unten im VI. Kap. §. 61.

Zwiſchen den angegebenen Gränzen kann man nach Lambert die Gleichung ($\mathfrak{h}$) beibehalten. Bezeichnet W die Wärme bei der Gefrierkälte, und B, T die Barometer- und Thermometerhöhen, bei welchen das Queckſil-

der bei Verfertigung des Werkzeugs die zur Gefrierkälte gehörige Stelle m (fig. 15) erreichte, und ſetzt man den Werth von B + T = S, ſo hat man nach Lambert für jede andere Barometer- und Thermometerhöhe 𝔅, 𝔗 die zugehörige Wärme

$$\mathfrak{W} = \frac{\mathfrak{B} + \mathfrak{T}}{S} . W$$

Anm. 3. Lambert hatte gefunden, daß bei ungeändertem Druck verſperrte Luft von der Gefrierkälte bis zur Hitze des ſiedenden Waſſers ſich um beiläufig 0,370 ihres Volumens ausbreite.

Wenn man nun mit Lambert beim Amontonſchen Thermometer die Stelle m, bis zu der das Queckſilber bei Verfertigung des Thermometers in der Gefrierkälte (in ſchmelzendem Schnee) ſinkt, mit 1000 bezeichnet, und den Abſtand mh in 370 gleiche Theile eintheilt, ſo hat man ein Amontonſches Thermometer mit Lambertſcher Skale, wo alſo der Punkt h mit 1370 bezeichnet iſt.

Wenn nun 𝔚 eine gewiſſe Anzahl von ſolchen Theilen oder Graden bezeichnen ſoll, ſo hat man, die Anzahl über m = w geſetzt,

$$1000 + w = \frac{\mathfrak{B} + \mathfrak{T}}{S} . 1000$$

Z. B. Nach Amontons Thermometer war S = 51,5 Zolle; im Keller der Pariſer Sternwarte war 𝔅 + 𝔗 = 54 Zolle, alſo

$$1000 + w = \frac{54}{51,5} . 1000 = 1049$$

Dieſes wäre die Anzahl von Graden, welche nach einem Amontonſchen Thermometer mit Lambertſcher Skale der Wärme in gedachtem Keller entſpräche

Hierbei wird allemal eine in Vergleichung mit dem Durchmeſſer der Kugel ſehr enge Röhre vorausgeſetzt.

Inzwi-

Inzwiſchen hat Lambert dieſe Vorausſetzung nicht beibehalten, weil ſie wegen der groſſen Kugel und der allzuhohen Röhre ein unbequemes Werkzeug giebt.

Man kann, um ein ſolches Lambertſches Therm. zu erhalten, die zur Gefrierkälte gehörige Stelle m mit 1000 bezeichnen, dann in der Hitze des ſiedenden Waſſers die Stelle h bemerken, bis zu der das Queckſilber ſteigt, und nun den Zwiſchenraum mh in 370 gleiche Theile theilen.

Weil nämlich die Expanſivkraft der Luft von der Gefrierkälte bis zur Siedhitze im Verhältniß 1000 zu 1370 wächſt, und zu gleichen Zunahmen der Expanſivkraft gleiche Zunahmen der Queckſilberhöhen gehören, ſo bezeichnen dieſe 370 gleiche Theile oder Lambertſche Grade auch ebenſoviele gleiche Zunahmen der Wärmemenge, inſoferne die Höhen der Queckſilberſäulen durch das Sinken der Queckſilberfläche EF nicht beträchtlich geändert werden.

Das ſo verfertigte Luftthermometer beziebt ſich aber auf die bei ſeiner Verfertigung zum Grund liegende Barometerhöhe B; ſoll es daher bei irgend einer andern Barometerhöhe 𝔅 gebraucht werden, ſo kann die Anzahl von Thermometergraden, die es zeigt, nicht geradezu beibehalten werden.

Wäre nämlich die Barometerhöhe bei Verfertigung des Werkzeugs auch = 𝔅 geweſen, ſo würde man ſtatt der Höhe mE = T eine andere erhalten haben.

Zeigt nämlich das Therm 𝔏. Grade, und iſt die Länge von B ſo groß als die von λ Graden, ſo muß man den wirklichen Wärmegrad bei der Barometerhöhe 𝔅

$$= \mathfrak{L} + \frac{\mathfrak{B} - B}{B + T} \cdot \lambda$$

ſetzen.

Ex. Es ſei bei einer mit einem ſolchen Therm. angeſtellten Beobachtung 𝔏 = 1180°, B = 28 Zolle, T =

 1 Zoll

1 Zoll, $\mathfrak{B} = 27$ Zolle, $\lambda = 320°$, ſo iſt der eigentliche Wärmegrad

$$1180 + \frac{27 - 28}{28 + 1} \cdot 320 = 1169 \text{ Gr.}$$

Das Thermometer zeigt nämlich bei dieſer Beobachtung darum 1180 Grade, weil die Barometerhöhe nur 27 Zolle beträgt, alſo die verſperrte Luft das Queckſilber in der Thermometerröhre höher hinauf zu treiben vermag, als geſchehen würde, wenn die Atmoſphäre ſo ſtark als bei Verfertigung des Thermometers druckte, da die Barometerhöhe 28″ betrug. Daher würde das Thermometer um 11 Grade niedriger ſtehen, wenn dieſelbe Barometerhöhe einträte, auf welche ſich die Thermometerſkale bezieht, und man darf darum nur 1169° ſtatt 1180° nehmen.

Wenn aber ſtatt der Thermometerkugel ein cylindriſches Gefäß vom Durchmeſſer D genommen würde, und der Durchmeſſer der Röhre = d wäre, ſo würde man genauer verfahren, wenn man die Höhe mh nur in $(1 - \frac{d^2}{D^2}) . 370$ gleiche Theile theilte, dann aber für iede Anzahl von Graden l, welche das Thermometer oberhalb m anzeigte, allemal die

$$(1 + \frac{d^2}{D^2}) . l + \frac{\mathfrak{B} - B}{B + T} . \lambda$$

alſo für iede Anzahl L (d. i. 1000 + l) die

$$1000 + \frac{D^2}{D^2 - d^2} . l + \frac{\mathfrak{B} - B}{B + T} . \lambda$$

gebrauchte.

Ich erinnere nur noch, daß das Verhältniß 1000 : 1370 nicht ſo ganz ſicher iſt.

Hr. Prof. Schmidt, deſſen Beobachtungen allemal einen vorzüglichen Werth haben, ſubſtituirt dafür eigenen Verſuchen zufolge, die er mit trockener Luft angeſtellt hat, das Verhältniß 1000 : 1357.

Uebri-

Uebrigens iſt noch zu bemerken, daß eigentlich nicht der ganze Raum, welchen verſperrte Luft bei gleichem äuſſeren Druck einnimmt, der Wärmemenge proportional geſetzt wird, ſondern nur derjenige Theil dieſes Raums, welchen die Lufttheilchen zwiſchen ſich frei laſſen. Da aber die Luft nahe an der Erdfläche über 16000 mal leichter als Platina iſt, alſo die Lufttheilchen ſelbſt bei einem Drucke von 28″ Queckſilberhöhe gewiß noch nicht $\frac{1}{16000}$ von dem ganzen Raume ausfüllen, in den ſie verbreitet ſind, ſo kann man bei nicht ſehr beträchtlichen Verdichtungen ohne merklichen Fehler jenen Satz auch vom ganzen Raume oder Volumen gebrauchen.

So könnte alſo jener Satz ſelbſt bei gänzlichem Mangel aller Wärme oder bei der abſoluten Kälte ſeine Richtigkeit behalten, ohne daß daraus gänzliche Verſchwindung des Volumens folgte; es würden in ſolchem Falle die Lufttheilchen nur in einen völlig dichten Körper ohne alle Zwiſchenräume zuſammentreten müſſen; wenigſtens wäre dieſes die Gränze ihres Volumens.

Anm. 4. Fahrenheit, ein Künſtler in Danzig, hob nicht nur die Kommunikation des Fluidums in der Röhre mit dem atmoſphäriſchen Druck auf, ſondern ließ auch in der Kugel keinen Luftraum; er füllte ſie mit dem Fluidum, deſſen er ſich bediente, ganz aus, ſo daß die Ausdehnung deſſelben in der Kugel, alſo die davon abhängende Höhe dieſes Fluidums in der Röhre, wo ſich über ihm eine Torricelliſche Leere befindet, zum Maaße der Wärme dienen ſollte.

Zuerſt bediente er ſich gefärbten Weingeiſtes, nachher, etwa ſeit 1714 oder 1715, des Queckſilbers.

Er bezeichnete die Stelle, bis zu der das Queckſilber in einer von Waſſer, Eis und Salmiak oder Kochſalz gemachten Miſchung ſtand, mit 0 (Null), bemerkte zugleich die Stelle, bis zu der das Queckſilber in ſiedendem Waſſer ſtieg, und theilte dieſe Entfernung in 212 gleiche

Theile oder Grade. In ſchmelzendem Schnee ſteigt das Queckſilber bis 32° über Null.

Dieſer letztere Punkt heißt der natürliche Gefrierpunkt, auch ſchlechtweg der Gefrierpunkt oder der Froſtpunkt; jener aber, der mit Null bezeichnete, der künſtliche Gefrierpunkt, und der mit 212 bezeichnete der Siedepunkt.

Der natürliche Gefrierpunkt und der Siedepunkt heiſſen auch Fundamentalpunkte, und ihr Abſtand von einander der Fundamentalabſtand, der alſo am Fahrenheitſchen Thermometer in 212 — 32 = 180 gleiche Theile eingetheilt iſt.

Fahrenheit hatte zuerſt dieſe Fundamentalpunkte beſtimmt. Lamberts Luftthermometer iſt weit jünger.

Anm. 5. Gegen 1730 änderte Reaumür das Fahrenheitſche Therm. ab. Statt des Queckſilbers bediente er ſich wieder des Weingeiſtes. Den natürlichen Gefrierpunkt bezeichnete er mit Null; den, welchen der Weingeiſt in ſiedendem Waſſer erreichte, mit 80, und theilte den Fundamentalabſtand in 80 gleiche Theile, weil er gefunden hatte, daß ſich das von ihm gewählte Fluidum von der Gefrierkälte bis zur Siedhitze in dem Verhältniſſe 1000 : 1080 ausdehne.

Anm. 6. De l'Iſle machte 1733 ſein Queckſilberthermometer bekannt. Den Siedepunkt bezeichnete er mit 0, und den Froſtpunkt mit 150, weil er gefunden hatte, daß ſich das Queckſilber von der Siedhitze bis zur Froſtkälte um $\frac{150}{10000}$ zuſammenziehe.

Anm. 7. Celſius, deſſen Thermometer auch das Schwediſche heißt, bezeichnet den Gefrierpunkt mit 0, den Siedepunkt mit 100. Es iſt gleichfalls ein Queckſilberthermometer.

Anm. 8. Unrichtig aber dennoch ſehr häufig wird ein Queckſilberthermometer mit Reaumürſcher Skale ein Reaumürſches

ſches Thermometer genennt, da unter letzterem allemal ein Weingeiſtthermometer verſtanden werden muß.

Anm. 9. Dergleichen leichte Erfahrungen mit vermiſchten Waſſern von verſchiedenen Temperaturen, wie oben (Anm. 2) ſchon angeführt worden ſind, beweiſen, daß die Ausdehnungen des Queckſilbers ſehr genau den wirklichen Aenderungen der Wärme oder der Wärmemenge proportional ſind, wenigſtens innerhalb dem Fundamentalabſtande. Nun geht aber ein Reaumürſches Weingeiſtthermometer mit einem ebenſo abgetheilten Queckſilberthermometer nicht zu gleichen Schritten, alſo ſind die Thermometeränderungen eines ſolchen Weingeiſtthermometers den wirklichen Wärmeänderungen nicht proportional.

Daher ſind ſolche auch nicht mehr im Gebrauche.

Anm. 10. Sehr leicht laſſen ſich Wärmegrade eines jeden Queckſilberthermometers auf Grade eines jeden andern Queckſilberthermometers reduciren.

Nur die Reduktion der Grade eines Weingeiſtthermometers auf Grade eines Queckſilberthermometers iſt etwas ſchwieriger.

Wenn q Grade eines 80theiligen Queckſilberthermom. mit w Graden eines Reaum. Weingeiſttherm. korreſpondiren, ſo hat man genau genug

$$w = 196,5 - \sqrt{(38702 - 314,12 . q)}$$

wenigſtens innerhalb dem Fundamentalabſtande.

Anm. 11. Weil der Siedepunkt des Waſſers Erfahrungen zufolge von dem verſchiedenen Druck abhängt, den das ſiedende Waſſer auf ſeiner Oberfläche leidet, ſo muß bei Verfertigung der Thermometer zugleich auf die Barometerhöhe mit Rückſicht genommen werden.

Nach den Beobachtungen der Deputirten der königl. Soc. d Wiſſ. zu London, welche die Berichtigung dieſes Gegenſtandes zum Hauptzwecke hatten, ergiebt ſich folgende Regel:

Wird

Wird das Thermometer zu einer Zeit verfertiget, da die Barometerhöhe $= 332,16 \pm n \cdot 1,28$ Par. Linien hoch ſteht, und der Siedepunkt in ſiedendem Waſſer (worin die Thermometerkugel 2 bis 3 Zolle tief eingetaugt worden) in der Entfernung λ über dem natürlichen Gefrierpunkt befanden, ſo ſoll man dieſe Entfernung λ ſo abändern, daß man dafür

$$\frac{1000 \pm n}{1000} \cdot \lambda \text{ nimmt.}$$

Die Berometerhöhe ſey zur Zeit der Verfertigung des Therm. $= B$, ſo ſetzt man

$$332,16 \pm n \cdot 1,28 = B$$

Dieſes giebt

$$\pm n = \frac{B - 332,16}{1,28}$$

Fünftes Kapitel.

Einige Betrachtungen über den Wärmeſtoff als Urſache der Temperatur der Körper.

Hypotheſe.

§. 39. Um die Erſcheinungen der Wärme zu erklären, nimmt man eine eigene überall verbreitete Materie an, deren Theilchen ſich mit einer ſehr groſſen Kraft von einander zu entfernen ſtreben und

und die von andern Körpern mehr oder minder angezogen werden. Dieſe nennt man die Wärmematerie oder den Wärmeſtoff, und ſchreibt ihr allein die Veränderlichkeit des Volumens aller übrigen Körper zu.

Anm. Dieſe Vorausſetzung läßt ſich bei weitem noch nicht als eine wirklich beſtättigte Erfahrung anſehen. Man könnte die Wärme eines Körpers auch als einen ſeinen Theilen eigenthümlich zukommenden Zuſtand betrachten, der nicht einer fremden Materie zugeſchrieben werden müßte.

Wenn man erwägt, daß in dem feinſten bemerkbaren phyſiſchen Punkt Centillionen von Atomen vereinigt ſeyn können, ſo lieſſe ſich auch wohl der Fall denken, daß ſich jedes dieſer Atome um ein anderes herumbewegte und daß jeder ſolcher Punkt gleichſam ein Weltſyſtem im Kleinen bildete, in welchem die Weltkörper Atomen wären. Dann hätte jeder Atom vermöge ſeiner Umlaufsbewegung eine Centrifugalkraft, deren Gröſſe von der Umlaufsgeſchwindigkeit und dem ſeiner Bahn zugehörigen Halbmeſſer abhängen würde. Ab- und Zunahme der Temperatur wäre dann eigentlich Ab- und Zunahme dieſer Centrifugalkraft oder der Umlaufsgeſchwindigkeiten der Atomen, und damit wäre zugleich Ab- und Zunahme des Volumens eines aus Atomen zuſammengeſetzten Körpers verbunden.

Wenn nun gleich die mit der Anwendung einer neuen Hypotheſe verbundene gröſſere Schwierigkeit des Kalkuls nichts gegen ſie entſcheidet, ſo bleibe ich doch für jetzt noch bei der von den meiſten Naturforſchern angenommenen Hypotheſe eines beſonderen Wärmeſtoffs ſtehen. Ebendieſe Vorausſetzung rechtfertiget zugleich die einer ſolchen Unterſuchung angewieſene Stelle in der Aerometrie oder Pneumatik.

Zuſ.

§. 40. Die Zunahme oder Erhöhung der Temperatur eines Körpers, welche aus dem Steigen des

Ther-

Thermometers *) erkannt wird, ſetzt allemal das Einſtröhmen einer gröſſeren Menge von Wärmetheilen in das Queckſilber des Thermometers voraus, und hiermit iſt die Bedingung verbunden, daß die Expanſivkraft der im Thermometer befindlichen Wärmematerie, ſolange das Queckſilber darin ſteigt, kleiner ſeyn müſſe, als die Expanſivkraft der Wärmetheile in der Materie, aus welcher das Thermometer ſolche aufnimmt, oder welche das Thermometer zum ſteigen bringt. Beim Fallen iſt es umgekehrt.

Iſt die Temperatur eines Körpers mit der Temperatur eines ihn umgebenden Mittels einerlei, ſo ſteht bei einerlei Thermometerhöhe die Expanſivkraft der im Thermometer befindlichen Wärmematerie mit der Expanſivkraft der Wärmetheilchen ſowohl ienes Körpers als des ihn umgebenden Mittels im Gleichgewicht, und es müſſen alſo die Expanſivkräfte der Wärmetheilchen ienes Körpers und des ihn umgebenden Mittels unter einander ſelbſt im Gleichgewicht ſeyn. Das Beſtreben der Wärmetheilchen, ſich von einander abzuſtoſſen, alſo auch das Eindringen neuer Wärmetheilchen zu verhindern, iſt im Körper und dem ihn umgebenden Mittel gleich groß; es gehen alſo aus keinem der beiden Räume Wärmetheilchen in den andern über, wie bei zweien kommunicirenden Gefäſſen, die mit Luft von gleicher Expanſivkraft angefüllt ſind, aus keinem Lufttheilchen in das andere übergehen.

Aufg. 7.

§. 41. **Die Umſtände zu beſtimmen, von welchen das Gleichgewicht der Wärmetheilchen eines Kör-**

*) Ich verſtehe in der Folge allemal ein gewöhnliches 80theiliches Queckſilberthermometer, wenn kein anderes ausdrücklich genennt wird.

Körpers K und des ihn umgebenden Mittels M abhängt.

Aufl. Die abſolute Expanſivkraft der mit einer Maſſe verbundenen Wärmematerie hängt, den Einfluß dieſer Maſſe auf den Wärmeſtoff bei Seite geſetzt, von der Dichtigkeit der Wärmematerie ab.

Es ſey nun die abſolute Expanſivkraft der Wärme in K = E, die Anziehung der Körpertheilchen als eine der erſteren entgegengeſetzte Kraft = e; dieſelbe Bedeutung ſollen D, d für das äuſſere Mittel haben, ſo muß für den Fall des Gleichgewichts

$$E - e = D - d$$

ſeyn.

Nun kann ein Körper K von einer gewiſſen Temperatur in ein Mittel M von derſelben Temperatur gebracht werden, ſo daß aus den Anziehungskräften beider Materien von K und M gegen einander eine Miſchung entſteht, in welcher

> von den Gröſſen E, e, D, d eine oder mehrere oder auch alle ſo abgeändert werden, daß das Beſtreben der Wärmetheilchen in der Miſchung gegen die äuſſeren Wärmetheilchen = D — d wird.

Wenn nun in dem dieſe Miſchung umgebenden Mittel das Beſtreben der Wärmetheilchen gegen dieſe Miſchung = T — t, ſo wird das Gleichgewicht der Wärmetheilchen nur unter der Bedingung ſtatt finden, daß D — d = T — t bleibe.

Da aber die Anziehungskräfte der mannigfaltigen Stoffe in der Natur ſowohl unter ſich als gegen den Wärmeſtoff ſoſehr verſchieden ſind, ſo läßt ſich erwarten,

ten, daß faſt nie in Fällen, wo chemiſche Verände-
rungen erfolgen,

$$D - d = T - t.$$

bleiben werde.

Erfahrung 8.

§. 42. Die Erfahrung lehrt, daß wirklich beinahe bei allen Miſchungen, bei welchen die Anziehungskräfte verſchiedener Stoffe auf einander wirken können,

$$\text{entweder } D - d < T - t$$
$$\text{oder } D - d > T - t$$

werde.

Daher wird die Temperatur der Miſchung faſt allemal entweder niedriger oder höher als die Temperatur des die Miſchung umgebenden Mittels.

Anm. Im erſten Falle entſteht durch das Einſtröhmen der äuſſeren Wärmetheile in die Miſchung zur Herſtellung des Gleichgewichts Verkältung; im anderu Falle durch Ausſtröhmen einer Menge von Wärmetheilen aus der zu einer höheren Temperatur gekommenen Miſchung in das äuſſere Mittel Erwärmung.

Ein Beiſpiel zum 1ten Falle giebt die Vermiſchung des Salpeters mit Waſſer; zum 2ten die Vermiſchung ungelöſchten Kalks mit Waſſer.

Zuſ.

§. 43. Man ſetze, es komme eine Materie, in welcher die Wärmetheilchen die relative Expanſivkraft E — e haben, mit einer andern, in der dieſe relative Expanſivkraft = D — d wäre, in Berührung, ſo daß eine Miſchung entſtände, für welche ſie noch D — d wäre, ſo könnte auch D — d beträchtlich gröſ-
ſer

ſer als E—e ſeyn, und doch D—d = E—e bleiben.

Zum Beiſpiele dient die Vermiſchung des Schnees mit warmem Waſſer.

Vermiſcht man 1 ℔ Schnee von 32° Fahrenh. mit 1 ℔ Waſſer von $162° + \alpha°$ Fahr. ſo ſchmilzt aller Schnee und die Temperatur der Miſchung iſt nun

$$\text{nicht } \frac{162 + \alpha + 32}{2}$$

$$\text{ſondern } \frac{(162 + \alpha + 32) - 130}{2} = 32 + \tfrac{1}{2}\alpha$$

alſo, für $\alpha = 0$, $= 32°$ Fahr.

Hier bleibt alſo die relative Expanſivkraft der Wärmetheilchen in der Miſchung, des hinzugekommenen heiſſen Waſſers ungeachtet, wie ſie vorher im Schnee war.

Die Anziehungskräfte der Waſſertheilchen im feſten Zuſtande (des Schnees) ändern ſich alſo beim Uebergange in den tropfbarflüſſigen ſo, daß die zu 130° Fahrenh. gehörige Expanſivkraft bloß dazu verwendet wird, den Zuſtand der Flüſſigkeit herzuſtellen. Soviel Expanſivkraft der Wärmetheilchen, als dazu gehört, eine Temperatur um 130° Fahr. zu erhöhen, wird durch die Anziehungskräfte des Waſſers im flüſſigen Zuſtande aufgehoben.

Anm. Inzwiſchen kann in allen ſolchen Fällen doch Verbreitung der Wärme aus einem Raume A in einen andern B immer nur unter der Bedingung erfolgen, daß während der Verbreitung die relative Expanſivkraft in A gröſſer ſey als in B.

Wird die relative Expanſivkraft der Wärmetheile in A etwa durch ein Feuer beſtändig gleichgroß erhalten, ſo muß auch der Uebergang aus A in den angränzenden Raum B ſolange fortdauern, als die Expanſivkraft in B noch kleiner als in A iſt.

Zuſ. 2.

§. 44. Aus dem fortdauernden Uebergang der Wärmetheile aus einem Raume A von höherer Temperatur in einen angränzenden B von niedrigerer Temp. folgt aber nicht, daß die Temperatur von B auch immerhin ſteigen müſſe. Läßt nämlich B ſelbſt immerhin wieder Wärmetheile in einen angränzenden Raum fahren, und wird dieſer Ausfluß von Wärmetheilen aus B immer gröſſer, ſo kann ein Zeitpunkt eintreten, in welchem der Zufluß von Wärmetheilen in B ienem Ausfluſſe gleich wird, und dann tritt die Temperatur von B in den Beharrungsſtand.

Es giebt hiervon unzähliche Beiſpiele, aber eine vorzügliche Aufmerkſamkeit verdient hier die Erfahrung vom Waſſer.

Erfahrung 9.

§. 45. Waſſer, das wir in offenen Gefäſſen über Feuer ſetzen, ſteigt nicht nur eine Zeitlang in ſeiner Temperatur, ſondern es leidet auch einen beträchtlichen Abgang ſeiner Maſſe, die in einem luftförmigen Strohme von der Oberfläche des Waſſers aufſteigt. Dieſen aufſteigenden luftförmigen Strohm nennen wir Dämpfe. Die Schnelligkeit dieſer Verwandlung des Waſſers in Dämpfe nimmt mit ſteigender Temperatur des Waſſers zu, die Bewegung des noch vorhandenen Waſſers wird immer heftiger, bis ſie endlich ganz allgemein wird und das Waſſer eine gewiſſe Temperatur erreicht hat, über die es auch bei fortgeſetzter Unter-

terhaltung des Feuers nicht erhoben werden kann. Dieſer Zuſtand des Waſſers heißt das Sieden. In dieſem Zuſtande hat alſo die Expanſivkraft der Wärmetheile, die das Waſſer gleichzeitig zu faſſen vermag, ihr Maximum erreicht. Dieſe unveränderliche Temperatur des Waſſers im Zuſtande des Siedens hängt nun ſehr von der Höhe der Gegend, wo ſich das offene Gefäß befindet, über der Meeresfläche, überhaupt vom Barometerſtande ab. Sie iſt höher oder niedriger, wie dieſer höher oder niedriger iſt.

Zuſ.

§. 46. Die Siedhitze iſt alſo bloß relativ und hängt von dem Druck ab, welchem die Oberfläche des Waſſers ausgeſetzt iſt. Hierauf gründet ſich die (oben §. 38. Anm. 11) gegebene aus ſorgfältigen Beobachtungen abgeleitete Vorſchrift. Die geſammte Waſſermaſſe iſt nämlich überall zum Uebergang in Dämpfe geſchickt, d. i. in den Zuſtand des Siedens gebracht, wann die zur allgemeinen Bildung iener luftförmigen Flüſſigkeit erfoderliche Expanſivkraft eintritt, vermöge der die entſtehenden Dampftheilchen in ieder Stelle des Waſſers den Druck überwinden müſſen, dem dieſe Stelle ausgeſetzt iſt. Daher gehört zu einem beſtimmten Druck, den ſiedende Theilchen leiden, auch beſtimmte Temperatur.

Es dringen zwar immerfort neue Wärmetheile in das Gefäß, aber dieſe verbinden ſich nur mit den Waſſertheilchen zu Dämpfen, die ſamt den Wärmetheilchen davon gehen.

Lehrſ. 1

§. 47. Wenn ein Körper a von einem andern A, der eine unveränderliche Temperatur hat, in ei-

ner Temperatur erhalten werden ſoll, die der von A gleich iſt, ſo darf a nirgends einen Raum berühren, deſſen Temperatur niedriger als die von A wäre.

Bew. Unter der angenommenen Vorausſetzung iſt die Expanſivkraft der Wärmetheile in a der in A gleich, alſo können ſo wenig aus A in a als aus a in A Wärmetheile übergehen. Wird aber der Körper a irgendwo von einem Raum berührt, deſſen Temperatur niedriger als die von a iſt, ſo gehen Wärmetheile aus a in dieſen kälteren Raum über.

Da nun dieſer Verluſt vermöge des erſten Satzes nicht wieder erſetzt wird, ſo muß die Temperatur von a nothwendig abnehmen; alſo iſt die Vorausſetzung, daß unter dieſen Umſtänden die Temper. von a der von A gleich bleiben ſolle, unmöglich.

Zuſ. 1..

§. 48. Wird alſo ein mit Waſſer gefülltes Gefäß a, das mit einem Deckel verſchloſſen iſt, in ein anderes A, worin Waſſer beſtändig ſiedend erhalten wird, ſo eingetaugt, daß das a zum Theil die äuſſere kühlere Luft berührt, ſo kann das Gefäß a mit dem darin enthaltenen Waſſer nie die Temperatur des in A ſiedenden Waſſers annehmen.

Zuſ. 2.

§. 49. Umſoviel weniger kann das Waſſer im Gefäß a im vor. §. zum Sieden gebracht oder ſiedend erhalten werden, wenn a mit keinem Deckel verſchloſſen wäre. Jetzt leidet nämlich das Waſſer in a noch den beſonderen Wärmeverluſt, welcher mit der Verdämpfung verbunden iſt. Jeder Tropfen, der in Dampfform davon geht, nimmt ungleich mehr Wärme-

theile

theile mit ſich fort, als er im Gefäß bei ſich hatte, weil er ſonſten in tropfbarflüſſiger Geſtalt verbleiben müßte; er nimmt alſo beim Verdämpfen alle die Wärme mit ſich fort, welche nöthig iſt, um ihn in luftförmige Flüſſigkeit zu verwandlen.

Hierhergehörige Erfahrungen findet man unten (§. 54).

Zuſ. 3.

§. 50. Die Menge von Wärmeſtoff, welche aus dem Körper A (§. 47) in den unmittelbar anliegenden a übergeht, hängt fürs erſte von dem Unterſchied der relativen Expanſivkräfte des Wärmeſtoffs in beiden Körpern A und a ab, alſo von dem Unterſchiede der Temperaturen beider Körper A und a; fürs andere aber auch noch insbeſondere von der Größe der Anziehungskraft, welche der Materie des Körpers a gegen den Wärmeſtoff zukommt. Denn von letzterer hängt die größere oder geringere Dichtigkeit der Wärmematerie in a ab, der eine beſtimmte Expanſivkraft zukommt. Je geringer die Anziehungskraft der Materie von a gegen die Wärmetheile iſt, deſto weniger Wärmetheile liegen in einerlei Raum bei einer beſtimmten Expanſivkraft neben einander; es iſt alſo die ſpecifiſche Expanſivkraft der Wärmetheilchen in a deſto größer.

Es ſtröhmt nämlich bei einer unveränderlichen Temperatur von A, nachdem auch die von a in den Beharrungsſtand gekommen iſt, in einer beſtimmten Zeit immer eine gewiſſe Wärmemenge aus a in den an a angränzenden Raum R, und die einzelen Wärmetheilchen dringen mit einer beſtimmten Geſchwindigkeit c in den Raum R ein; dieſe Geſchwindigkeit c hängt von der Expanſivkraft der Wärmetheilchen in a

ab, ihre Dichtigkeit mag übrigens wie man will beſchaffen ſeyn; weil nun bei einerlei Ausflußgeſchwindigkeit die Menge des Ausfluſſes der Dichtigkeit der ausſtröhmenden Materie proportional ſeyn muß, ſo erhellet, daß bei einer beſtimmten Temperatur von a die Menge der in einer beſtimmten Zeit von a ausſtröhmenden Wärmetheile ihrer Dichtigkeit proportional ſeyn müſſe, alſo deſto gröſſer, ie gröſſer die anziehende Kraft von a gegen den Wärmeſtoff iſt.

Wird nun a in einer beſtimmten Temperatur von A erhalten, ſo muß die von A in den Körper a in einer beſtimmten Zeit übergehende Wärmemenge ebenſo groß ſeyn, als die in derſelben Zeit von a ausſtröhmende Wärmemenge. Demnach leitet der Körper a deſtomehr Wärmeſtoff aus dem A in einer beſtimmten Zeit in den Raum R ab, ie gröſſer die Anziehungskraft der Materie a gegen den Wärmeſtoff, oder ie geringer die ſpec. Expanſivkraft des Wärmeſtoffs in a iſt; und umgekehrt deſto weniger, ie kleiner die Anziehungskraft der Materie a gegen den Wärmeſtoff, oder ie gröſſer die ſpec. Expanſivkraft des Wärmeſtoffs in a iſt.

Erklärung 10.

§. 51. Ein ieder Körper a, der irgend eine flüſſige Maſſe aus einem unmittelbar angränzenden Raume A aufzunehmen und in einen andern angränzenden R abzuleiten geſchickt iſt, heißt überhaupt für die flüſſige Materie ein Leiter; es iſt alſo natürlich, im vor. §. den Körper a insbeſondere einen Wärmeleiter oder Wärmeableiter zu nennen, und zwar einen beſſeren oder ſchlechteren Wärmeleiter, nachdem die Materie von a bei einerlei Geſtalt und Gröſſe eine gröſſere

oder kleinere Menge von Wärmeſtoff aus demſelben A in einerlei Zeit abzuleiten vermag, wenn A irgend eine beſtimmte Temperatur hat. Die Fähigkeit von a, die Wärme abzuleiten, kann das Wärmeableitungsvermögen heiſſen.

Dabei kann nun R auch von a umgeben ſeyn oder ein willkührlicher innerer Theil des an A angränzenden Körpers die Stelle von R vertreten, und der übrige Theil dieſes Körpers für a gelten.

Erklärung II.

§. 52. Ein ieder Körper, der bis zu einer gewiſſen Temperatur erwärmt iſt und ſo in ein Mittel von niedrigerer Temperatur geſetzt wird, erwärmt eine Zeitlang das äuſſere Mittel, und läßt den Ueberſchuß von Wärmeſtoff, wovon ſeine höhere Temperatur abhängt, nur allmählig fahren. In Bezug auf dieſen Zuſtand betrachtet kann ieder Körper ein Selbſtwärmeleiter; und ſein Vermögen, Wärme in das ihn umgebende Mittel abzuſetzen, kann ſein Selbſtleitungsvermögen heiſſen.

Er iſt ein deſto beſſerer oder ſchlechterer Selbſtleiter, ie kürzer oder ie länger die Zeit iſt, die er bei gleichem Volumen und unter ſonſt gleichen Umſtänden braucht, den Ueberſchuß von Wärmeſtoff, der ihm die höhere Temperatur giebt, in das ihn umgebende Mittel abzuſetzen, oder um von einer beſtimmten höheren Temperatur bis zu einer beſtimmten niederen abzukühlen.

Zuſ.

§. 53. Ein beſſerer Selbſtleiter iſt allemal ein ſchlechterer Ableiter; und umgekehrt ein ſchlechterer Selbſtleiter allemal ein beſſerer Ableiter.

So iſt z. B. Eiſen ein ſehr guter Ableiter, aber ein ſehr ſchlechter Selbſtleiter; die Luft (verſchloſſene) ein ſehr ſchlechter Ableiter, aber ein ſehr ſtarker oder guter Selbſtleiter.

Anm. Man findet hin und wieder Verhältnißzahlen für verſchiedene Materien angegeben, in wieferne ſie beſſere oder ſchlechtere Wärmeleiter ſeyen, wobei aber auf den Unterſchied zwiſchen Ableitern und Selbſtleitern nicht allemal gehörig geachtet worden iſt. Ebendieſes hat mich veranlaßt, dieſe verſchiedene Benennungen zu gebrauchen. Die in den phyſikaliſchen Lehrbüchern und mehreren Journalen mitgetheilten Beobachtungen beziehen ſich durchgängig auf das Selbſtleitungsvermögen, das aber in ſolchen Schriften allemal ſchlechthin das Leitungsvermögen oder die Leitungskraft genennt wird. Gegen den Begriff, welchen ein Schriftſteller mit einer angenommenen Benennung verbinden will, iſt nun zwar nichts weiter zu erinneren; es iſt aber fehlerhaft nach demſelben Begriffe von Wärmeleitung z. B. zu ſagen, Steine ſeyen beſſere Wärmeleiter als die Luft, weil dieſer Satz da, wo nur vom Selbſtleitungsvermögen die Rede iſt, nicht angenommen werden kann, denn Steine ſind nicht beſſere Selbſtleiter, wohl aber beſſere Ableiter für die Wärme als Luft. So muß in meiner Abhandl. über Gegenſtände der Wärmelehre (S. 181) der Satz, daß die Wärmeleitungskraft der Luft (bei gleichem Volumen und Geſtalt) 473 mal ſo groß als die des Waſſers ſey, nicht vom Ableitungs-, ſondern vom Selbſtleitungsvermögen verſtanden werden.

Für die Ausübung iſt wohl die Kenntniß des Ableitungsvermögens die wichtigſte.

Erfah-

Erfahrung 10.

§. 54. Zwei Gefäſſe von gleicher Form, Gehalt, und Dicke wurden mit Waſſer, das 8° Reaum. Queckſilbertherm. warm war, in ein anderes, worin Waſſer ſiedend erhalten wurde, ſo eingeſetzt, daß ſie die Wände des gröſſeren nirgends berührten. Das eine von den eingeſetzten war ein eiſernes, das andere ein thönernes. Der Erfolg war dieſer:

Zeit in Min.	Wärme im eiſernen Gefäß	Wärme im thönernen
0	8 Gr.	8 Gr.
5	52	32
10	60	44
15	66½	52
20	70	57
25	72	60
30	die Wärme ſtieg nicht	63
35	höher, obgleich das	65
40	äuſſere Waſſer noch	66½
45	1 Stunde in vol-	67½
50	lem Kochen erhal-	68
60	ten wurde	68½

Höher konnte dieſe Wärme bei noch anderthalbſtündigem Kochen des äuſſeren Waſſers nicht gebracht werden.

ſ. Werners Abh. von den Oefen S. 90.

Erfahrung 11.

§. 55. Werner theilt a. a. O. S. 92 noch folgende Verſuche mit:

Auf einerlei Kohlenfeuer ſchmolz	Auf einem Eiſen zu 9″ lang, 2″ breit, 3 1/2‴ dick	Auf einem Eiſen, zu 9″ l. 2 br. 7‴ dick	Auf gebrenntem Thon oder Ziegel zu 9″ l. 2″ br. 7‴ dick
Siegellack	1 Min.	2 Min.	3 Min.
Zinn	3 —	5 —	7 —
Blei	8 —	9 —	{12 Anfang {17 gänzliche Schmelzung

Nach 15 Min. war das Ziegelſtück völlig erkaltet (hatte die Temperatur der äuſſeren Luft wieder angenommen).

Das dünnere Eiſen konnte man erſt nach 30 Min. mit bloßer Hand angreifen. Auf dem dickeren ſchmolz nach 30 Min. noch Talg.

Mit dieſem dünneren Eiſen wurde ein Ziegelſtück von doppelter Breite und vierfacher Dicke gleichſtark erhitzt. Das Eiſen behielt die Wärme mit dem Ziegelſtück beinahe gleich lange.

Das zuvor erwähnte dickere Eiſen behielt die Wärme länger als dieſer Ziegel, bei gleicher Erhitzung.

Dieſemnach ſind eiſerne Platten ungleich beſſere Wärmeableiter als thönerne, unter ſonſt gleichen Umſtänden.

Anm. Erfahrungen über das Selbſtleitungsvermögen findet man in v. Crell's Annalen 1798. 6 St. auch in meiner ſchon angef. Abh. S. 166.

Hierher gehörige Schriften.

Mayer, über die Geſetze und Modifikationen des Wärmeſtoffs Erlangen 1791.

Langsdorf, Phyſiſch-mathematiſche Abhandl. über Gegenſtände der Wärmelehre, welche mit der Ausübung in der nächſten Verbindung ſtehen, Marburg 1796.

Lambert, Pyrometrie, oder vom Maaſe des Feuers und der Wärme, Berlin 1779.

Gren, Journal d. Phyſ. I, IV und VII B.

Werner, Theoretiſch-praktiſche Abh. über holzſparende Stubenöfen, Koch-Heerde und Kochöſen, Hamb. 1797.

v. Humbold, im Bergmänniſchen Journal II. St. 1792.

v. Crell, angef. Annalen; 1798. 6 St.

Sechstes Kapitel.

Nähere Beſtimmung des Einfluſſes der Wärme auf die Expanſivkraft der Luft und der Dämpfe.

Erfahrung 12.

§. 56. Nach Hrn. Prof. Schmidts genauen Unterſuchungen (Anfangsgr. der Math. II. Th. 1. Abth. S. 229) wird das Volumen verſchiedener Luft-

Luftarten, welches beim Eispunkt = 1 iſt, bis zur Siedhitze nach folgenden Verhältniſſen vergröſſert

trockene (durch geglühte Potaſche ihrer Feuchtigkeit beraubte) atmoſphäriſche Luft bis zu	1,3574
Sauerſtoffgas	1,3213
Waſſerſtoffgas	1,4400
Kohlenſaures Gas	1,4352
Stickgas	1,4787

Erfahrung 13.

§. 57. Schon aus dem vor. Kap. erhellet, daß Wärmematerie in hinlänglichem Maaße mit Waſſer vereinigt ſolches endlich zum Sieden bringt, und daß die beim Sieden entſtehenden Dämpfe, ſo wie ſie über den Waſſerſpiegel treten, vermöge des Drucks der Atmoſphäre als eine luftförmige Maſſe zuſammengepreßt ſeyn müſſen, deren Expanſivkraft daher dem Druck der Atmoſphäre gleich iſt. Ueberhaupt muß die Expanſivkraft der im ſiedenden Waſſer erzeugten Dämpfe bei ihrer Erſcheinung auf der Oberfläche des Waſſers allemal dem Druck gleich ſeyn, welchem die Oberfläche des ſiedenden Waſſers ausgeſetzt iſt.

Hiermit ſtimmt die Erfahrung genau überein. Dämpfe, welche nach dem 80 theiligen Queckſ. Therm. eine Temperatur von 80° haben, ſtehen mit einer 28 Par. Zoll hohen Queckſilberſäule, über der ſich eine Torricelliſche Leere befindet, im Gleichgewicht.

Was nun für Wärmegrade mit Dämpfen von Waſſer, das einem geringeren Druck ausgeſetzt iſt, zuſammenhängen, läßt ſich auf keine Weiſe theoretiſch beſtimmen. Die erſten hierhergehörigen genaue Verſuche

ſuche hat Betancourt angeſtellt in Mem. ſur la force expenſ. de l'eau et de l'eſprit de vin, Paris 1790. die man auch bei Prony findet. Dieſelbe Verſuche hat Hr. Prof. Schmidt mit groſſer Sorgfalt wiederholt; auch haben Prony uud Schmidt Formeln geſucht, nach welchen ſich iedesmal zuſammengehörige Werthe der Expanſivkraft und des Wärmegrades der Dämpfe berechnen laſſen. Nachſtehendes Täfelchen enthält die Reſultate dieſer Verſuche von 10 zu 10 Graden.

Wärmegrade nach 80theiligem Queckſ. Thermometer.	Höhe der Queckſilberſäule, welche mit der Expanſ. Kraft der Waſſerdämpfe im Gleichgewicht iſt, in Par. Zollen		
	Nach Betancourts Beobachtungen.	nach Schmidts Beobachtungen	Nach der v. Schmidt angegebenen Formel
0°	0,00	0,00	1,00
10	0,15	0,28	0,31
20	0,65	0,90	0,92
30	1,52	1,93	2,02
40	2,92	3,64	3,80
50	5,35	6,40	6,61
60	9,95	10,98	10,98
70	16,90	17,92	17,77
80	28,00	28,00	28,00
90	46,40	43,77	43,50
100	71,80	67,00	66,47
110	98,00	100,72	100,87

Anm. Hr. Prof. Schmidt hat aus ſeinen Beobachtungen die äuſſerſt einfache Formel

$$e = t^{1,4113 + 0,005 \,.\, t}$$

berge-

hergeleitet, wo e die Queckſilberhöhe, welche mit der Expanſivkraft der Waſſerdämpfe im Gleichgewicht iſt, in Hundertheilen eines Pariſer Zolles, und t die Anzahl Grade nach einem 100theiligen Queckſ. Thermometer ausdruckt. Dieſe Formel hat einen ſehr groſſen Vorzug vor der Pronyſchen, und ſie wird beſonders dadurch ſehr intereſſant, daß das Geſetz, nach welchem ſich die Expanſivkraft der Dämpfe mit der Wärme ändert, dabei ſo leicht in die Augen fällt. Dieſe Expanſivkraft iſt nämlich allemal eine Potenz des Wärmegrades, und der Exponent dieſer Potenz, der ſelbſt veränderlich iſt, geht mit den Aenderungen der Wärme zu gleichen Schritten fort, ſo daß er ſich für jede Temperaturänderung von 1° um 0,005 ändert.

Erfahrung 14.

§. 58. Hr. Prof. Schmidt hat auf eine geſchickte Weiſe das Gewicht der Dämpfe von Waſſer, das bei einer Barometerhöhe von 28 Zollen kochte, mit dem Gewicht der Luft, die daſſelbe Fläſchchen ausfüllte, verglichen. Seine Verſuche gaben, da die Temperatur des Waſſers und der Luft 15° war,

Gewicht des Waſſers $= 1$
— — der Luft $= \frac{1}{840}$
— — — Dämpfe $= \frac{1}{1470}$

Erfahrung 15.

§. 59. Unſere atmoſphäriſche Luft iſt in ihrem natürlichen Zuſtande immer mit mehr oder weniger Feuchtigkeit vermiſcht. Iſt ſie bis zur Sättigung mit Feuchtigkeit angefüllt, und wird ſie in dieſem höchſtfeuchten Zuſtande bei einer Barometerhöhe von 28 Zollen und bei der Temperatur der Gefrierkälte in einem verſchloſſenen Gefäß bis zur Siedhitze erwärmt, ſo wird ihre Expanſivkraft, nach Hrn. Schmidts Verſuchen, in dem Verhältniß 1 zu 2,3574 vergröſſert.

Zuſ.

Zuſ.

§. 60. Es iſt aber, die Expanſivkraft trockener Luft bei der Eiskälte und bei 28″ Barometerhöhe = 1 geſetzt, die Expanſivkraft ebendieſer Luft bei der Erhöhung bis zur Siedhitze = 1,3574 (§. 56), und die Expanſivkraft der Dämpfe von Waſſer, das bei derſelben Barometerhöhe ſiedet, = 1 (§. 57); demnach die Expanſivkraft der höchſtfeuchten Luft bei der Siedhitze ſo groß als die Summe der Expanſivkräfte der trockenen Luft nnd der Waſſerdämpfe bei der Siedhitze zuſammengenommen.

Erfahrung 16.

§. 61. Je weniger die Luft feucht iſt, deſto weniger wird ſie durch einerlei Wärme ausgedehnt. Setzt man die Menge der Feuchtigkeit, welche z. B. 1 Kub. Fuß Luft, die bis zur Sättigung damit angefüllt iſt, enthält, = 100, ſo wird ſolche von 0° bis zu 80° in dem Verhältniß 1 zu 2,3574 ausgedehnt (§. 59); wäre aber die Menge der Feuchtigkeit in 1 Kub. Fuß Luft nur = 20, ſo wird ſolche von 0° bis zu 80° nur in dem Verhältniß 1 zu 1,1120 ausgedehnt. Nachſtehendes Täfelchen iſt wiederum von Hn. Schmidt.

Wärme-Grade nach dem 100theiligen Therm.	Feuchtigkeit				
	20	40	60	80	100
	Volumen derſelben Luftmaſſe				
0°	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
20	1,0939	1,0994	1,1029	1,1074	1,1120
40	1,1997	1,2207	1,2417	1,2627	1,2838
60	1,3384	1,4087	1,4791	1,5494	1,6198
80	1,5574	1,7374	1,9574	2,1574	2,3574

Anm.

Anm. Luft, die mit Feuchtigkeit geſättiget iſt, enthält nach Sauſſüre bei 15 Gr. des 100theil. Therm. etwa 11 Gran Waſſer, bei mittelmäſſiger Trockenheit und demſelben Wärmegrade etwa 4 bis 5 Gran. Werkzeuge, welche die Menge der in der Luft enthaltenen Feuchtigkeit anzugeben beſtimmt ſind, heiſſen Hygrometer. Es gehören hierher beſonders das Sauſſüreſche Haarhygrometer und das Delückſche Fiſchbeinhygrometer. Werkzeuge, welche Aenderungen in der Dichtigkeit der Luft anzugeben dienen, heiſſen Manometer, wohin beſonders das Guerickeſche gehört; und ſolche, welche die verhältnißmäſſige Menge der Lebensluft in einer beſtimmten Luftſchichte anzugeben dienen, Eudiometer. Ich überlaſſe die nähere Beſchreibung dieſer Werkzeuge, die von ihrer erwünſchten Vollkommenheit noch weit entfernt ſind, den Lehrern der Phyſik.

Hierhergehörige Schriften.

Schmidts Abhandl. über die Expanſivkraft ꝛc. in Grens n. Journal d. Phyſ. 4. B.

Deſſ. Phyſ. mathematiſche Abh.

Lamberts Hygrometrie, aus dem Franz. Augsb. 1774.

Sauſſüre Verſuch über die Hygrometrie durch H. B. de Sauſſüre aus dem Franz. Leipz. 1784.

De Luc Idées ſur la météorologie.

Gehler phyſ. Wörterbuch.

Gilbert Annal. d. Phyſ. I. B. 3tes St. Halle 1799.

Hydraulik.

Hydraulik.

Erſtes Kapitel.

Vom Ausfluſſe des Waſſers durch Oeffnungen aus Behältniſſen, die beſtändig gleich voll erhalten werden.

Vorerinnerung.

In den erſten 10 §§ wird durchgängig vorausgeſetzt, daß die Oberfläche des Waſſers merklich über den oberen Rand der Ausſtußöffnung hinſtreiche, ſo daß ſie vor der Wand, in der ſich die Oeffnung befindet, eine horizontale Ebene bilde.

Erklärung 1.

§. 1. Bei der Bewegung des Waſſers kommt es auf Richtung der Bewegung, auf Gröſſe des in einer beſtimmten Zeit durchloffenen Weges, auf die Menge des in einer beſtimmten Zeit aus einem gewiſſen Raume abflieſſenden Waſſers, auf die Gröſſe des Beſtrebens, mit welchem Waſſer da, wo ihm nach der Richtung ſeiner Bewegung Hinderniſſe entgegengeſetzt werden, dieſe Hinderniſſe zu überwinden ſucht, und auf die Kraft an, welche in die Waſſer-

theilchen wirken muß, um ſie mit einer verlangten Geſchwindigkeit nach einem vorgeſchriebenen Wege in Bewegung zu ſetzen. **Die Hydraulik ſoll lehren, wie alle dieſe Beſtimmungsſtücke von einander abhängen.**

Aufg. 1.

§. 2. ABCD (fig. 1) ſey ein mit Waſſer angefülltes Gefäß, das bei m eine kleine horizontal durchgehende Oeffnung hat, aus der das Waſſer hervorſpringt und auf dem horizontalen Boden GH in F niederfällt, indeß das Gefäß durch langſamen Zufluß beſtändig bis an AB voll Waſſer erhalten wird; man ſoll aus dieſem Verſuch die Geſchwindigkeit beſtimmen, mit welcher die Waſſertheilchen bei m ausſtröhmen.

Aufl. Es ſey die Höhe mE = a, die Weite des Sprungs EF = b, die Zeit, in welcher die Waſſertheilchen von der Schwere durch die Tiefe mE = a niedergetrieben werden, in Sekunden = t, ſo hat man

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \text{ (Dyn. §. 85. VI.)}$$

In ebendieſer Zeit haben die Waſſertheilchen vermöge der gleichförmigen horizontalen Geſchwindigkeit den Weg EF = b durchloffen; heißt alſo die horizontale Geſchwindigkeit c, ſo hat man

$$c = \frac{b}{t} \text{ (Dyn. §. 5)} = \frac{b}{\sqrt{\frac{a}{g}}}$$

$$= b . \sqrt{\frac{g}{a}}$$

Erfah-

Erfahrung 1.

§. 3. Die Geſchwindigkeit, welche der Höhe Bm = h von B bis in die Mitte der Oeffnung gemeſſen zugehört, iſt nach (Dyn. §. 85) = $2\sqrt{gh}$; iſt nun das Wandſtück, worin ſich die Oeffnung bei m befindet, dünne, ſo daß die Dicke kleiner als der Durchmeſſer der Oeffnung iſt, ſo findet man ſehr genau $b.\sqrt{\frac{g}{a}} = 2\sqrt{gh}$.

So giebt alſo die Erfahrung zur Berechnung der Ausflußgeſchwindigkeit c, für die Waſſerhöhe Bm = h, wenn ſich die Oeffnung in einer dünnen Platte befindet,

$$c = 2\sqrt{gh}$$

woferne die Höhe der Oeffnung m einigemal kleiner als h, und die Querſchnitte des Gefäſſes vielmal (z. B. 20mal) gröſſer als die Oeffnung ſind.

Anm. Hier kann dieſer Erfahrungsſatz genügen. Er läßt ſich auch aus der Theorie herleiten, deren Auseinanderſetzung aber hier zu weitläuftig wäre.

Aufg. 2.

§. 4. Es iſt unter den Einſchränkungen des vor. §. der Querſchnitt z des bei m ausſtröhmenden Waſſerſtrahls gegeben, ingleichem die Waſſerhöhe h über dem Mittelpunkt der Ausflußöffnung; man ſoll die in einer Sekunde ausflieſſende Waſſermenge M beſtimmen.

Aufl. Weil die Schwere, welche in die bereits ausgeſtröhmten Waſſertheilchen wirkt, die Menge dieſer ausgefloſſenen Waſſertheilchen nicht abändern kann, ſo kann man bei ihnen die Schwere bei Seite ſetzen.

Wenn nun die Waſſertheilchen mit der Geſchw. c ausfahren, ſo hat am Ende der Sekunde die Waſſerſchichte, welche am Anfang derſelben bei m war, den Weg c durchloſſen, und weil ieder vorangehenden Schichte unmittelbar eine andere folgt, ſo bildet die in einer Sekunde ausgefloſſene Waſſermenge eine Reihe an einander liegender Waſſerſchichten, wovon die erſte bei m und die letzte in der Entfernung c von m läge. Die ausgefloſſene Waſſermenge iſt alſo ein Waſſerprisma, deſſen Länge $= c$, und deſſen Grundfläche $= z$ wäre; daher

$$M = c \, . \, z$$

Aber $c = 2 \sqrt{gh}$, alſo

$$M = 2z \, . \, \sqrt{gh}$$

Erfahrung 2.

§. 5. Wenn man wirkliche Verſuche anſtellt, und die Oeffnung in einer dünnen Platte w heißt, ſo findet man, wenn w einen kleinen Theil der ganzen Wand ausmacht, in welcher die Oeffnung angebracht iſt, nach wirklicher Ausmeſſung des ausgefloſſenen Waſſers ſehr genau nur

$$M = 0{,}62 \, . \, 2w \sqrt{gh}$$

alſo muß im vor. §.

$$z = 0{,}62 \, . \, w$$

ſeyn.

Der Querſchnitt z des ausſtröhmenden Waſſerſtrahls iſt alſo kleiner als die Oeffnung in der dünnen Platte; er beträgt nur $\frac{62}{100}$ von dieſer.

Der Strahl wird alſo, wie auch dem Auge ſehr bemerkbar iſt, beim Einſtröhmen aus dem Gefäß in

die Oeffnung zuſammengezogen, ſo daß der Querſchnitt des zuſammengezogenen Strahls nur 0,62 von der Gröſſe der Oeffnung beträgt, wenn das Waſſer durch dünne Platten ausfließt. Es geht dieſemnach ein Theil des Querſchnitts $= 0,38 . w$ verlohren, und es bleibt nur noch

$$z = (1 - 0,38) . w$$

und

$$M = (1 - 0,38) . w . 2\sqrt{gh}$$

Erfahrung 3.

§. 6. Geht die Oeffnung m (fig. 1) durch eine dicke Wand, oder iſt an dieſer Oeffnung eine kurze Anſatzröhre angebracht, deren Weite $= w$ wäre, ſo ergeben ſorgfältige Verſuche ſehr genau

$$M = 0,81 . 2w\sqrt{gh}$$

oder auch

$$M = (1 - 0,19) . 2w\sqrt{gh}$$

Zuſ.

§. 7. Weil nun allemal auch (§. 4)

$$M = c . z$$

ſeyn muß, ſo hat man für kurze Anſatzröhren

$$cz = 0,81 . 2w\sqrt{gh}$$

Das Waſſer fließt aber aus ſolchen Anſatzröhren in der ganzen Röhrendicke heraus, ſo daß $z = w$ iſt, alſo

$$c = 0,81 . 2\sqrt{gh}$$

oder auch

$$c = 2 . \sqrt{0,66 . gh}$$

Hier gehört alſo die Ausflußgeſchw. nur der Höhe $0,66 . h$, d. i. einer Höhe zu, die nur $\frac{2}{3}$ von der

Waſſerhöhe beträgt, welches wiederum der Erfahrung gemäß iſt.

Erfahrung 4.

§. 8. Wenn vor der Ausflußöffnung m (fig. 2) der kurzen Anſatzröhre eine dünne Platte mit einer Oeffnung β angeſchroben wird, die z. B. ſchon halb ſo groß als die ganze Röhrenweite iſt, ſo giebt die Erfahrung, wenn die Waſſerhöhe $Bm = h$ bleibt, die Ausflußmenge für eine Sekunde

$$M \geq 0,62 \,.\, \beta \,.\, 2\sqrt{gh}$$

und deſtomehr von $0,62 \,.\, \beta \,.\, 2\sqrt{gh}$ verſchieden, ie näher die Gröſſe der Oeffnung β der Röhrenweite kommt, oder ie weniger $\frac{\beta}{w}$ von 1 verſchieden iſt.

Daſſelbe findet man auch, wenn an die erſte kurze Anſatzröhre eine zweite m angeſetzt wird, deren Weite β wäre; iſt nun die Weite des erſten kurzen Anſatzröhrchens $= w$, ſo giebt die Erfahrung wiederum

$$M > 0,81 \,.\, \beta \,.\, 2\sqrt{gh}$$

und M iſt deſtomehr von $0,81 \,.\, \beta \,.\, 2\sqrt{gh}$ verſchieden, ie näher $\frac{\beta}{w}$ der 1 kommt.

Wenn alſo allgemein für Oeffnungen in dünnen Platten und für kurze Anſatzröhren

$$M = (1 - n) \,.\, \beta \,.\, 2\sqrt{gh}$$

geſetzt wird, ſo iſt zwar für die Fälle, da die Oeffnung oder die kurze Anſatzröhre in einer Wand angebracht iſt, die vielmal gröſſer als β wäre,

für Oeffnung in dünnen Platten $n = 0,38$
— kurze Anſatzröhren . . $n = 0,19$

nicht

nicht aber für Fälle, wo die Oeffnung einen beträchtlichen Theil der Wand ausmacht, in der ſie angebracht oder die Röhre angeſetzt iſt.

Hypotheſe.

§. 9. Wenn an einem ſolchen Behältniß, wie α (fig. 2 und 3) eine vorgeſchrobene dünne Platte m mit einer Oeffnung angebracht wird, ſo kann man überhaupt

$$n = x.\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\left(2 - \frac{\beta}{w}\right)}}\right).\,0,38$$

ſetzen.

Dieſer Ausdruck giebt nämlich allemal $n = 0$, wenn $\beta = w$ wird, weil alsdann keine neue Zuſammenziehung des Strahls in der Oeffnung m ſtatt findet, alſo $M = \beta.\,2\sqrt{gh}$ bleiben muß.

Weil aber zugleich für einen ſehr kleinen Werth von $\frac{\beta}{w}$, $n = 0,38$ iſt, ſo muß, wenn $\frac{\beta}{w}$ in Vergleichung mit der Zahl 2 für Null angenommen werden kann,

$$x.\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).\,0,38 = 0,38$$

d. i. $$x.\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$$

ſeyn, oder

$$x = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{141}{41} = 3,44$$

und $x.\,0,38 = 1,3$

 daher

daher für Oeffnungen in dünnen Platten

$$n = 1,30 . \left(1 - \frac{1}{\sqrt{(2 - \frac{\beta}{w})}}\right) (\mathfrak{C}$$

und für eine angeſetzte Röhre, wo n halb ſo groß als im vorigen Falle wird,

$$n = 0,65 . \left(1 - \frac{1}{\sqrt{(2 - \frac{\beta}{w})}}\right)$$

Anm. In der Folge wird noch beſonders bemerkt werden, daß lange Röhren die Geſchwindigkeit des Waſſers verzögern, ſo daß die Menge des in einer Sekunde durch Röhren von beträchtlicher Länge oder durch ganze Röhrenleitungen abflieſenden Waſſers nicht auf vorſtehende Weiſe berechnet werden kann. Inzwiſchen ergiebt die Erfahrung bei ſolchen Verſuchen, die man nach (§. 5. und 6) anſtellt, allemal

$$M = (1 - n) . \beta . 2 \sqrt{gh},$$

ſo daß dort ohne merkliche Abweichung n entweder 0,38 oder = 0,19 bleibt, wenn man gleich h bald gröſſer bald kleiner nimmt, daß alſo gröſſere oder kleinere Geſchwindigkeit des Waſſers den Werth von n nicht abändert.

Demnach kann man die vorſtehenden Beſtimmungen von n (um den wievielten Theil nämlich der Waſſerquerſchnitt da, wo das Waſſer in eine kleinere Oeffnung tritt, zuſammengezogen wird) auch bei allen Verengungen in Röhrenleitungen beibehalten.

Weil der Faktor 1 − n häufig gebraucht wird, ſo habe ich (Handb. der Maſchinenl. 2 B. S. 210) eine kleine Tafel berechnet, die ich am Ende dieſer Schrift beigefügt habe.

Aufg. 3.

§. 10. **Die Ausflußmenge M in 1 Sek. für ſolche Fälle zu beſtimmen, da zu den**

ver-

verſchiedenen Stellen der Ausflußöffnung merklich verſchiedene Waſſerhöhen gehören, alſo der Mittelpunkt der Oeffnung (die in Vergleichung mit den Querſchnitten des Gefäſſes klein ſey) nicht ohne merklichen Fehler für die mittlere Geſchwindigkeitshöhe aller ausſtröhmenden Waſſertheilchen angenommen werden könnte.

Aufl. I. Wenn die Oeffnung ein lothrechtes Rektangel mit wagrechter Grundlinie iſt.

Des Rektangels Grundlinie heiſſe b, ſeine Höhe a, die Waſſerhöhe vom Spiegel bis zur Grundlinie des Rektangels H, die einem Waſſertheilchen in der unbeſtimmten Höhe x über der Grundlinie des Rektangels zugehörige Geſchwindigkeit ſey = c, ſo iſt die durch ein wagrechtes Element des Rektangels b.dx in 1 Sek. durchflieſende Waſſermenge

$$dM = b.dx.2\sqrt{(H-x)}$$

alſo nach gehöriger Integrirung, ohne Rückſicht auf die Zuſammenziehung

$$M = \tfrac{4}{3}b.\left(H\sqrt{gH}-(H-x).\sqrt{g(H-x)}\right)$$

folglich für das ganze Rektangel und zugleich mit Rückſicht auf die Zuſammenziehung

$$M = (1-n).\tfrac{4}{3}b \times \left(H\sqrt{gH}-(H-a).\sqrt{g(H-a)}\right)$$

II. Wenn die Oeffnung kreisförmig iſt.

Der Oeffnung Durchmeſſer ſey = b, ihr tiefſter Punkt liege in der Tiefe H unter dem Spiegel, ſo

ſo wäre die Ausflußmenge durch ein Quadrat mit horizontaler Grundlinie, das um den Kreis beſchrieben wäre, $= (1-n) \times$

$$\tfrac{4}{3} b \left(H \sqrt{gH} - (H-b) \sqrt{g(H-b)}\right)$$

und nun ſo genau als es für alle Fälle der Ausübung verlangt werden kann, die geſuchte Ausflußmenge, indem man mit 0,785 multiplicirt,

$$= 1{,}047 \,.\, (1-n) \,.\, b \times$$
$$\left(H \sqrt{gH} - (H-b) \sqrt{g(H-b)}\right)$$

Anm. Es verſteht ſich, daß hier nur von Fällen die Rede iſt, da das Waſſer aus dem Behältniß entweder durch eine dünne Wand oder durch eine kurze Anſatzröhre in die freie Luft ſtröhmen und aus der Oeffnung oder der Anſatzröhre ſogleich frei herabfallen kann. Die zweierlei Werthe von n werden dann iedesmal aus (§. 9) genommen.

Zuſ.

§. 11. Wenn die Vorausſetzung (am Anfange dieſes Kap. Vorer.) nicht ſtatt fände, wie wenn die Abflußöffnung ein Einſchnitt in einer Wand wäre wie mnop (fig. 10), doch ſo, daß das Waſſer hinter der Wand frei herabſtürzen kann; ſo erhält die Sache dadurch eine Aenderung, daß das Waſſer iezt vor der Oeffnung keine horizontale Oberfläche bildet, ſondern nach einer gewiſſen Krümmung aec (fig. 9) ſich gegen die Oeffnung ſenkt.

Hätte man eine ſchon vorhandene Waſſerſtemmung dieſer Art vor ſich, bei der das Waſſer in der Höhe fc über die äuſſere Wandfläche (fig. 9. u. 10) wegſchöſſe, ſo könnte man die Formel (§. 10. I) zuerſt ſo brauchen, daß man M auf irgend eine andere

Weiſe,

Weiſe, d. h. ohne dieſe Formel (durch die abgemeſſene Geſchwindigkeit, oder durch wirkliche Ausmeſſung der eine beſtimmte Zeit hindurch abgefloſſenen Waſſermenge) zu beſtimmen ſuche, hiernächſt die Höhe bf = H genau abwäge (ſ. II. Kap.), um welche des Waſſers Oberfläche da, wo ſeine Bewegung nach c beſchleunigt zu werden anfängt, über f erhaben iſt, und aus der erwähnten Gleichung für M den Werth von n ſuche, nämlich, weil hier a = H wird,

$$n = 1 - \frac{3M}{4bH.\sqrt{Hg}}.$$

Viele dergleichen Verſuche, bei welchen no = b, fb = H wäre, könnten dann auf eine Beſtimmung des Werthes von n leiten, der nur in vorkommenden Fällen dieſer Art dienen könnte, aus der Gleichung für M die Abflußmenge zu beſtimmen, wenn b, H vorher durch Meſſung gegeben wären.

So hat Hr. Eytelwein (Handb. der Mechanik feſter Körper u. der Hydraulik S. 139) Verſuche angeſtellt, welche ergeben, daß man auch in Fällen dieſer Art genau genug n wie in den übrigen Fällen beibehalten könne, wie ich auch ſchon in meinem Handbuche der Maſchinenlehre (I. B. §. 92) bemerkt habe. Man kann alſo bei Fallſchützen, Wehren u. d. g. allemal, wenn die Oeffnung bis zur Oberfläche reicht,

$$M = (1 - n).\tfrac{4}{3}bH\sqrt{gH}$$

ſetzen.

Anm. Zur Erläuterung wegen des Werths von n füge ich noch folgendes bei.

Fig. 11 und 12 ſollen horizontale Durchſchnitte durch die Oeffnung vorſtellen, ſo hängt die Zuſammenziehung des Strahls, alſo der Werth von n fürs erſte mit von der Länge der Wand kl ab oder von dem Verhältniß der Oeff-

nungs-

nungsbreite vw zur Länge kl, und man kann dieſerhalb (§. 9. ☾) die Breite vw ſtatt β, und die Länge kl ſtatt w ſetzen. Auſſerdem lehrt die Erfahrung, daß bei einerlei Breite der Oeffnung xy unter ſonſt gleichen Umſtänden mehr Waſſer durch die Oeffnung (fig. 12) abfließt, als durch die (fig. 11), wenn nämlich die innere Weite vw (fig. 12) gröſſer als die vw (fig. 11) iſt.

In dem Falle (fig. 12) hängt nun der Werth von n zugleich von dem Winkel $yw\beta = xv\alpha$ ab, den ich mit α bezeichnen will.

Die Theorie lehrt dieſe Abhängigkeit nicht beſtimmen, inzwiſchen kommt man der Erfahrung nahe genug, wenn man (§. 9. ☾ zur Rechten) noch mit $1 - \sin\alpha . \cos\alpha$ multiplicirt, alſo allgemein

$$n = 1{,}3 . \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\left(2 - \frac{\beta}{w}\right)}}\right) . (1 - \sin\alpha . \cos\alpha)$$

ſetzt.

Zweites Kapitel.

Vom Nivelliren oder Waſſerwägen.

Vorerinnerung.

§. 11*. Ueberall, wo Waſſer von einem gegebenen Ort A nach einem andern B abgeleitet werden ſoll, wird vorausgeſetzt, daß von A bis B ein Fall oder Gefälle vorhanden ſey, d. i. daß B niedriger, dem Mittelpunkt der Erde näher, liege als A; ſoll eine verlangte Waſſermenge in einer beſtimmten Zeit von A nach B abgeleitet werden, ſo hängt die

Beſtimmung der Breite und Tiefe des hierzu erfoderlichen Kanals von der Geſchwindigkeit ab, mit der die Waſſertheilchen längſt dem Kanale abflieſſen können, die dann deſto gröſſer iſt, ie ſtärker das Gefälle von A bis B iſt oder ie tiefer B unter A liegt, wenn man dem Kanal von A nach B einen gleichförmigen Abhang giebt. Auch bei der wirklichen Anlage eines ſolchen Kanals, muß man ihm von Strecke zu Strecke den proportionirten Abhang zu geben im Stande ſeyn, damit der Kanal am Ende richtig in der verlangten Tiefe B ſeinen Ausgang finde.

Man muß alſo das Verfahren kennen, nach welchem die Höhen und Tiefen, in welchen verſchiedene Stellen einer auf der Erdoberfläche angegebenen Strecke über und unter einander liegen, beſtimmt werden. Die Verrichtung, wodurch dieſes geſchieht, heißt das Nivelliren oder das Waſſerwägen, auch das Abwägen des Gefälles. Dieſes iſt ein Gegenſtand der praktiſchen Geometrie, die aus eigenen Schriften erlernt werden muß. Auſſerdem ertheilen beſondere Schriften, wovon unten einige genennt werden, ausführlichen Unterricht über das Nivelliren.

Weil inzwiſchen nicht Jeder, der vom Studium der reinen Mathematik zu dem der angewandten fortſchreitet, zumal nach der gewöhnlichen Einrichtung akademiſcher Studien, zuvor die praktiſche Geometrie ſtudirt hat, ſo theile ich hier einige Sätze mit, woraus man wenigſtens erſehen kann, worauf es beim Nivelliren hauptſächlich ankommt.

Lehnſatz.

§. 12. Wir können den mittleren Erdhalbmeſſer zu 3271794 Toiſen oder 19630764 Par. Fußen

Fußen annehmen, und wo wir eine Abwägung (Nivellement) anfangen, uns allemal als auf einer Kugelfläche ſtehend anſehen, deren Halbmeſſer der erwähnte wäre.

Erklärung 2.

§. 13. Eine Kugelfläche, welche den zu unſerem Standpunkt gehörigen Erdhalbmeſſer zu ihrem Halbmeſſer hätte, heißt die zu dieſem Standpunkt gehörige wahre Horizontalfläche; eine Ebene, welche ſie in unſerem Standpunkt berührt, die zu dieſem Punkte gehörige ſcheinbare Horizontalfläche. Ein durch unſeren Standpunkt durchgehender Bogen eines größten Kreiſes der wahren Horizontalfläche heißt die zu dieſem Punkte gehörige wahre Horizontallinie; eine gerade Linie, welche die wahre Horizontallinie in unſerem Standpunkte berührt, heißt die zu dieſem Punkte gehörige ſcheinbare Horizontallinie.

Ein aus dem Mittelpunkt der Erde auf die hier erwähnten Flächen und Linien gefälltes Perpendikel wird alſo zu 19630764 Par. F. (§. 12) angenommen.

Befinden wir uns in a (fig. 4), und iſt c der Mittelpunkt der Erde, ſo wäre ca der erwähnte Erdhalbmeſſer und der damit beſchriebene Kreis eadfg oder ein Bogenſtück ead dieſes Kreiſes die zu a gehörige wahre Horizontallinie, eine Tangente ab die ſcheinbare.

Aufg. 4.

§. 14. Die Höhe bd eines Punktes b (fig. 4) der ſcheinbaren Horizontallinie ab über der wahren ad zu beſtimmen, wenn die Entfernung ab vom Standpunkte gegeben iſt.

Aufl.

Aufl. Es iſt

$$ac^2 + ab^2 = (cd + db)^2$$
$$= cd^2 + 2cd \cdot db + db^2$$

aber $ac = cd$, alſo

$$ab^2 = 2cd \cdot db + db^2$$

Es iſt aber auf die Länge ad von 5 Meilen der Winkel acd erſt $\frac{1}{3}^\circ$, und für dieſen Winkel die Secante cb noch nicht merklich vom Halbmeſſer cd verſchieden, alſo kann man für ſo beträchtliche Längen noch immer db^2 in Vergleichung mit $2cd \cdot db$ bei Seite, und

$$ab^2 = 2cd \cdot db$$

ſetzen, welches

$$db = \frac{ab^2}{2cd}$$

giebt, oder

$$db = \frac{ab^2}{6543588} \text{ in Toiſen.}$$

Anm. Geſetzt auch, daß man in Anſehung des Nenners um $\frac{1}{200}$ ungewiß wäre, wie es doch nicht iſt, ſo erhellet doch, daß in allen Fällen der Ausübung dieſe Ungewißheit im Werthe von db unbedeutend wäre. So giebt alſo dieſer Ausdruck die Höhe, um welche die Stelle b weiter vom Mittelpunkt der Erde C entfernt wäre, als der Standpunkt a, mit einer für alle Fälle der Ausübung vollkommen genügenden Genauigkeit.

Zuſ.

§. 15. Hätte man alſo, für $ab = \alpha$, $db = \delta$ gefunden, und gehörte zu $ab = \beta$ die Höhe $db = \varepsilon$, ſo wäre

$$\delta : \varepsilon = \alpha^2 : \beta^2$$

und $\varepsilon = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot \delta$

wodurch die Berechnung von ε ſehr erleichtert wird.

Lehnſatz.

§. 16. Wenn in dem Standpunkte a (fig. 4) durch ein Fernrohr am, deſſen Axe in der zu a gehörigen ſcheinbaren Horizontallinie läge, nach einem in d befindlichen Stabe oder ſonſtigen Gegenſtande dp viſirt wird, ſo läßt ſich keineswegs annehmen, daß der an dieſem Gegenſtand bemerkte Punkt wirklich in der verlängerten am, d. h in der ſcheinbaren Horizontallinie ab liege. Weil nämlich unter ſonſt gleichen Umſtänden die Luft in gröſſerer Entfernung von dem Mittelpunkt c dünner als in geringerer Entfernung von c iſt, ſo werden die von einem Punkte über der Horizontalfläche ausgehenden Strahlen, indem ſie ſich der Horizontalfläche nähern, alſo durch dichtere Luft durchgehen, krummlinigt gebrochen. Daher iſt der nach der ſcheinbaren Horizontallinie ba ins Auge bei a fallende Strahl nicht der von b, ſondern von irgend einem tiefer liegenden Punkte n ausgehende Strahl, und der Punkt, den wir längſt der Axe am des Fernrohres an dem Gegenſtand oder der Stange dp bemerken, iſt nicht der zur ſcheinbaren Horizontallinie gehörige Punkt b, ſondern der darunter liegende n.

Nun iſt die Tiefe der wahren Horizontallinie ad unter b, alles in Toiſen ausgedruckt, $= \frac{ab^2}{6543588}$ (§. 14), alſo

$$nd = bd - bn = \frac{ab^2}{6543588} - bn$$

oder,

oder, weil die abgeſehene Linie an ſtatt der ab geſetzt werden kann,

$$nd = \frac{an^2}{6543588} - bn$$

So kann alſo die Tiefe des in der wahren Horizontallinie liegenden Punktes d unter dem durch das wagrecht geſtellte Seherohr abgeſehenen Punkte n allemal beſtimmt werden, wenn bn bekannt iſt.

Nach Hrn. Lambert kann an als ein Kreisbogen vom 7fachen Erdhalbmeſſer angeſehen werden, woraus ſich bn $= \frac{1}{7}$ bd ergiebt; man hat alſo, alles in Toiſen ausgedruckt

$$nd = \frac{6}{7} \cdot \frac{an^2}{6543588}$$

Ex. Es ſey an = 300 Par. Fuß = 50 Toiſen, ſo iſt

$$bd = \frac{50^2}{6543588} = 0{,}00382 \text{ Toiſ.}$$

$$\text{oder} = 0{,}0229 \text{ Par. F.}$$

$$nd = \frac{6}{7} bd = 0{,}0196 \text{ Par. F.}$$

alſo für jede andere Entfernung an oder β,

$$bd = \frac{\beta^2}{50^2} \cdot 0{,}0229 \text{ Par. F.}$$

$$nd = \frac{\beta^2}{50^2} \cdot 0{,}0196 \text{ Par. F.}$$

da dann β in Toiſen ausgedruckt werden muß (§. 15).

Weil nun $\frac{0,0229}{50^2} = 0,00000916$ iſt, ſo hat man zur bequemeren Berechnung allemal

$$bd = 0,00000916 \,.\, \beta^2$$

und $$nd = \frac{6}{7} \,.\, bd$$

So läßt ſich eine hierher gehörige Tafel leicht berechnen, die ich aus der Neuen Architekt. Hydraul. von Prony am Ende dieſes Buchs mittheile.

Aufg. 5.

§. 17. avoqw (fig. 4) ſey die Geſtalt der äuſſeren Erdfläche in einer durch a und d gelegten lothrechten Ebene; in q ſteht eine lothrechte Stange qp; man ſoll mittelſt eines Sehrohres, deſſen Axe am wagrecht, d. i. in der zu a gehörigen ſcheinbaren Horizontallinie ab liegt, beſtimmen, um wieviel die Stelle q höher oder tiefer als die a liegt.

Aufl. 1. Man meſſe die Entfernung der Stelle q von der a, d. h. die gerade aq; man kann hier allemal ohne merklichen Fehler annehmen, daß dieſe mit der Länge der Linie ab einerlei iſt.

2. Von dem an der Stange qp abgeſehenen Punkt n herab meſſe man die Höhe nq; ſie ſey = H.

3. Nun nehme man den zur Entfernung aq gehörigen Werth von nd aus der vorerwähnten Tafel; ſie heiſſe h, ſo hat man

$$dq = H - h$$

Iſt H > h, ſo zeigt dieſer Werth, um wieviel die Stelle q unter der wahren Horizontallinie, alſo um

um wieviel ſie tiefer als die Stelle a liegt, iſt H < h, ſo wird der Werth von dq verneint, und die gefundene Zahl, die das Zeichen — vor ſich ſtehen hat, zeigt, wieviel die Stelle q über der zu a gehörigen wahren Horizontallinie, d. i. um wieviel ſie höher als die Stelle a liegt.

Anm. Die Lambertſche Beſtimmung des Werths von bn (fig. 4) ſetzt voraus, daß die Luft zwiſchen a und n eine beſtimmte Beſchaffenheit habe. Nach der verſchiedenen Beſchaffenheit der atmoſphäriſchen Luft werden die Strahlen anders gebrochen, und es könnte daher in manchen einzelen Fällen die Stelle n in die b oder gar über b hinausfallen. Daher bleibt die Beſtimmung von bn immer mißlich, und wo es auf groſſe Genauigkeit ankommt, iſt nachſtehendes Verfahren vorzuziehen.

Aufg. 6.

§. 18. Die Höhe oder Tiefe der Stelle q (vor. §.) über oder unter der a durch eine Methode zu beſtimmen, auf welche die Refraktion der Strahlen keinen Einfluß hat.

Aufl. ak ſey eine in a ſtehende lothrechte Stange, o die Mitte zwiſchen a und q; aus o ſehe man längſt der Axe eines horizontal geſtellten Sehrohres nach beiden Stangen ak und qp; ſind nun x und y die an den Stangen abgeſehenen Punkte, ſo liegen ſolche in einer Linie, die man als eine von der zu x oder zu y gehörigen wahren Horizontallinie nicht merklich verſchiedene anſieht. Man hat alſo

$$dq = qy - ax$$

und es iſt daher nichts weiter nöthig, als ax und qy wirklich zu meſſen.

Anm. Es wird hierbei vorausgeſetzt, daß die Strahlen von x nach o ebenſo wie die von y nach o gebrochen werden. Wenn die Beſchaffenheit der Luft zwiſchen o und x ſowohl nach dem Hygrometer als nach dem Thermometer während der Beobachtung ebenſo befunden wird wie zwiſchen o und y, ſo iſt dieſe Vorausſetzung wohl geſtattet, in andern Fällen aber kann ſie mehr oder weniger fehlerhaft ſeyn.

Wäre z. B. die Gegend von o nach q ganz trocken und den Sonnenſtrahlen frei ausgeſetzt, die von o nach a etwa ſumpfig und durch Bäume gegen die Sonnenſtrahlen geſchützt, ſo würde iene Vorausſetzung nicht ſtatt finden.

Man muß daher bei der Anwendung dieſer Methode eine ſolche Strecke aq auf der Erdoberfläche wählen, bei welcher dergleichen Verſchiedenheiten wegfallen.

Erklärung 3.

§. 19. Eine mit einer flüſſigen Materie bis auf eine kleine zurückbleibende Luftblaſe angefüllte genau cylindriſche Glasröhre heißt überhaupt eine Libelle; gewöhnlich bedient man ſich ihrer zum Anfüllen des Weingeiſtes, da dann die ſo gefüllte Glasröhre insbeſondere eine Weingeiſtlibelle heißt.

Um ſie mit den übrigen zur ganzen Einrichtung der Waſſerwage erfoderlichen Theilen durch Schrauben u. d. g. in feſte Verbindung bringen zu können, wird ſie gewöhnlich in eine meſſingene Röhre gefaßt, die iedoch eine hinlängliche Oeffnung haben muß, um das Spielen der Luftblaſe nach der Länge der Röhre ungehindert ſehen zu können.

Anm 1. Die Glasröhre muß genau cylindriſch ſeyn, und kann deßhalb noch beſonders ausgeſchliffen werden. Ihre Länge kann 9 bis 12 Zolle, ihr Durchmeſſer 1/2 Zoll und die Länge der Luftblaſe 2 bis 4 Zolle betragen.

Man bemerkt die Mitte c (fig. 5) der Röhrenlänge mit einem Zeichen und legt bei der Gefrierkälte die Libelle

ſo,

ſo, daß die beiden Enden der Luftblaſe m, n gleichweit von c abſtehen; man erwärmt hiernächſt die Libelle etwa zu 40° Reaum. Queckſ. und legt nun wiederum die Libelle ſo, daß die beiden Enden der Luftblaſe (die ietzt von dem ausgedehnten Weingeiſt in einen kleineren Raum zuſammengedrängt wird) a und b gleichweit von c abſtehen.

In dieſen Lagen iſt die Axe der Libelle iedesmal horizontal, und man hat nun die Gränzen, zwiſchen welchen die beiden Enden der Luftblaſe in der horizontalen Lage ſpielen muß, nämlich zur Rechten zwiſchen b und n, zur Linken zwiſchen a und m, und zwar allemal in gleicher Entfernung von a und b.

Anm. 2. Dieſe Libelle kann nun mit einem Fernrohre verbunden werden, wobei es gleichgültig iſt, ob ſich die Libelle beim Auflegen des Fernrohres oberhalb oder unterhalb dem Fernrohre befindet. Zu dem Ende können auf einem ſtarken Stabe, am beſten von Metall, 2 Stützen oder Träger angebracht werden, auf welchen das Fernrohr ruht.

Der erwähnte Stab kann am einen Ende auf- und nieder geſchroben werden, indem er ſich am andern um eine Axe dreht.

So iſt man im Stande, durch das Auf- oder Niederſchrauben dieſes Stabes, in welchem die Träger des Fernrohres befeſtiget ſind, ingleichem durch das Höher- oder Tieferſchrauben der Libelle am Fernrohr das Fernrohr in eine Lage zu bringen, bei welcher nicht nur die Axe der Libelle, ſondern auch zugleich die Axe des Fernrohres wagrecht zu liegen kommt.

Ueberhaupt ergeben ſich iedesmal die hierzu dienlichen Mittel leicht aus der beſonderen Einrichtung des Werkzeugs, dem man nach und nach ſehr mannigfaltige Formen und Abänderungen gegeben hat. Noch immer iſt die Siſſonſche Nivellirwage und ihre Abänderung von Brander ſehr beliebt. Vorzügliche Aufmerkſamkeit verdient die erſt im J. 1800 von Hrn. Hogrewe angegebene Nivel-

 lir-

lirwage, die bei genauer Verfertigung zugleich die einzelen Diſtanzen zu beſtimmen dient, ohne daß man ſie noch beſonders zu meſſen braucht, und auſſerdem noch den Vortheil gewährt, daß man die Zielſcheiben an den ausgeſteckten Stangen während dem Nivelliren gar nicht zu verrücken braucht. Hier kann ich mich, auch wegen der damit verbundenen Vervielfältigung der Zeichnungen, in die nähere Beſchreibung ſolcher Werkzeuge nicht einlaſſen.

Anm. 3. Die Mühlenmeiſter und andere Werkleuthe pflegen ſich zum Nivelliren der bekannten Setzwage zu bedienen; die Bergleuthe gebrauchen gewöhnlich den Hängebogen. Auf kurze Strecken, oder wo es auf kleine Fehler nicht ankommt, thun auch dieſe Werkzeuge gute Dienſte. Ihrer Unvollkommenheit kommt zu ſtatten, daß weder die Abweichung der ſcheinbaren Horizontallinie von der wahren, noch die Refraktion dabei in Betrachtung kommt.

Einige zu dieſem Kapitel gehörige Schriften.

Mayer, Gründlicher und ausführlicher Unterricht zur prakt. Geom. 2te Ausg. Gött. 1795. im 3ten Th.

Picard Abh. vom Waſſerwägen, Berl. 1749.

Lambert, Beyträge zum Waſſerwägen, Berl. 1770.

Abhandl. der königl. Schwed. Akad. d. W. für 1744.

Brander Beſchreibung einer neu verfertigten Waſſerwage findet man in

Lamberts Anmerk. über die Branderſchen Mikrometer, Augſp. 1769.

Roth, Beſchreibung einer neuen Bergwage, Leipz. 1758.

Bugge Gründliche und vollſtändige theoretiſch-praktiſche Anleitung zum Feldmeſſen, aus dem Däniſchen überſetzt von Tobieſen, Altona 1798.

Müller Beſchreibung eines neuen vorzüglich gemeinnützigen und bequemen Werkzeugs zum Nivelliren, Gött. 1792.

Mönnich Lehrb. der Math. I. Th. Berl. 1800. die darin befindliche Abhand. vom Nivelliren iſt auch beſonders abgedruckt unter dem Titel: Kurze Theorie und Praxis des Nivellirens.

Huth, Tabellen zum Nivelliren mit der Hängewage, Halle 1798.

Hogrewe, Praktiſche Anweiſung zum Nivelliren, Hannover 1800.

Gilly, Praktiſche Anleitung zur Anwendung des Nivellirens in den bey der Landeskultur vorkommenden gewöhnlichen Fällen, Berlin 1801.

Meinert Anweiſung zum Nivelliren und Profiliren, Halle 1801.

Drittes Kapitel.

Von der Bewegung des Waſſers in offenen Kanälen.

Vorerinnerung.

§. 20. Ich ſchränke mich hier nur auf reguläre Kanäle ein, und ſelbſt in Bezug auf dieſe muß man ſich mit beiläufigen Berechnungen begnügen. Noch bis ietzt verdanken wir die intereſſanteſten Unterſuchungen über dieſen Gegenſtand (ſowohl über offene Kanäle als über Röhrenleitungen) dem franzöſiſchen Hydrauliker Dú Búat, nach welchem ich dieſe Unterſuchung in meinem Lehrbuche der Hydraulik ausführlich abgehandelt habe. Seine Formeln ſind zwar aus vielfältigen von ihm angeſtellten Beobachtungen abgeleitet worden; aber ſie ſind keineswegs als bloſe Ableitungen

aus der ohngefähren Ordnung der Zahlen anzuſehen, welche ihm ſeine Beobachtung angaben, ſo daß er nach bekannten analytiſchen Methoden nur eine gegebene Reihe von beobachteten Zahlen benutzt hätte, eine allgemeine Formel zu finden, die dieſen verſchiedenen Zahlen anpaſſe; er iſt vielmehr der Natur der Sache ſelbſt nachgegangen, hat die mancherlei Beſtimmungsſtücke, von welchen die in beſtimmten Zeiten durch Kanäle und Röhrenleitungen abflieſſende Waſſermengen abhängen, mit Scharfſinn aufgeſucht und dieſe verſchiedenen Beſtimmungsſtücke in ſeine Grundformeln gebracht, die daher auch für die Ausübung von größter Wichtigkeit ſind.

Auf Röhren, deren Durchmeſſer nur eine oder ein paar Linien betrüge und auf ebendergleichen offene Kanälchen dürfte man ſolche Formeln freilich nicht anwenden, weil zwar bei Röhrenleitungen, um die ſich der Hydrauliker zu bekümmern hat, die beſondere Hinderniß, welche die an den Wänden unmittelbar anliegenden Waſſertheilchen in ihrer Bewegung leiden, wenig oder gar nicht in Betrachtung kommt, für dieſe Theilchen ſelbſt aber allerdings ſehr beträchtlich ſeyn kann.

Bei Röhren von höchſtens einigen Linien im Durchmeſſer kann daher die vom unmittelbaren Anliegen der Waſſertheilchen an den Wänden herrührende Hinderniß für die ganze durchflieſſende Waſſermaſſe, deren Durchſchnitt etwa nur dem eines Waſſertropfens gleich iſt, ſehr von Bedeutung ſeyn, und eine Formel, welche bis auf ſolche Kanälchen anwendbar ſeyn ſollte, müßte noch Beſtimmungsſtücke enthalten, welche ſich auf die anziehende Kraft der Röhrenwände gegen das Waſſer beziehen, z. B. Temperatur des Waſſers, Art der Materie, aus welcher das Kanälchen beſteht u. d. g.

In

In dieſer Rückſicht ſind für den Gebrauch enger Röhrchen die von Hrn. Prof. Gerſtner *) in Bezug auf verſchiedene Temperaturen des Waſſers angeſtellten Verſuche mit Röhrchen von $\frac{4}{5}$ bis $2\frac{2}{5}$ Linien im Durchmeſſer merkwürdig.

Es beweiſen aber auch ebendieſe Gerſtnerſche Verſuche, daß der Einfluß der Wärme auf die Bewegung des Waſſers in Röhren nur für die ſehr nahe an den Wänden liegenden Theilchen von Bedeutung iſt, und daß er bei nur 8 bis 9 Zoll Waſſerhöhe ſchon in dem $2\frac{2}{5}$ Linien weiten Röhrchen bei weitem geringer iſt als in dem $\frac{4}{5}$ Linien weiten, ſo daß der Unterſchied der Ausflußgeſchwindigkeiten bei verſchiedenen Temperaturen für Röhren von $\frac{1}{2}$ Zoll im Durchmeſſer ſchon verſchwinden muß. Hierzu kommt noch, daß ſelbſt aus kleinen Unterſchieden der Ausflußmengen bei verſchiedenen Temperaturen keineswegs auf Unterſchiede der Geſchwindigkeiten geſchloſſen werden kann. Weil nämlich dieſelbe Röhre bei höherer Temperatur, wegen der damit verbundenen Ausdehnung aller Materien, weiter iſt als bei geringerer Temperatur, ſo rührt die gröſſere Ausflußmenge bei höherer Temperatur nicht bloß von gröſſerer Geſchwindigkeit, ſondern auch von der gröſſeren Weite der Röhre her, und wenn für die Berechnung der Geſchwindigkeit aus der Ausflußmenge bei verſchiedenen Temperaturen einerlei Weite der Röhre zum Grunde gelegt wird, ſo findet man bei höheren Temperaturen die Geſchwindigkeit gröſſer als ſie wirklich iſt.

Hr.

*) Neue Abh. der königl. Böhm. Geſellſch. d. Wiſſ. 3. Bd. Man findet ſie auch in Gilberts Annalen der Phyſ. V. B. 2ten St. 1800.

Hr. Gerſtner führt noch das Zurückbleiben des Waſſers in offenen Kanälen an, das ſich ſehr auffallend zeige, wann Schnee hineinfalle. Aber dieſe auffallende Verzögerung entſteht urſprünglich an der Oberfläche, nicht wegen der Verminderung der Temperatur, ſondern weil die auf der Oberfläche ſich fortbewegenden Waſſertheilchen den hineinfallenden Schnee erſt in Bewegung ſetzen müſſen, wobei ſie ſelbſt einen Theil ihrer Geſchwindigkeit verliehren.

Man darf es wohl als ausgemacht anſehen, daß für Waſſerleitungen, von welchen in der Hydraulik die Rede iſt, die Temperatur des Waſſers in Rückſicht auf die Geſchwindigkeit ſeiner Bewegung ganz bei Seite geſetzt werden kann. Die Dü Büatſche Formeln verdienen alſo wegen des Umſtandes, daß ſie nicht auch die Temperatur des Waſſers als Beſtimmungsſtück enthalten, gar keinen Tadel. Vielmehr ſieht man mit Vergnügen ſelbſt noch bei Röhren von $2\frac{2}{3}$ Linien im Durchmeſſer bei gemäſſigter Temperatur die gute Uebereinſtimmung der Dübüatſchen Formel mit der Erfahrung durch die Gerſtnerſchen Verſuche aufs Neue beſtättiget. Die Dübüatſche Formel für offene Kanäle kommt zwar den Reſultaten der Erfahrung nicht ſo nahe als die für Röhrenleitungen, doch ſchadet dieſer Umſtand ihrer Brauchbarkeit nicht, zumal da die Kanäle keiner ſo genauen Abmeſſungen bedürfen als die Röhrenleitungen.

In gegenwärtigen Anfangsgründen kann ich mich aber in dieſe etwas verwickelte Unterſuchungen, die ich im Lehrbuche der Hydraulik vollſtändig auseinander geſetzt habe, nicht einlaſſen. Ich werde hier dem Vortrage (Handb. der Maſchinenlehre I. B.) folgen.

Aufg.

Aufg. 7.

§. 21. **Einen allgemeinen Ausdruck für die Waſſermenge zu finden, welche in einer Sekunde durch einen nach allen Abmeſſungen gegebenen regulären Kanal durchfließt.**

Aufl. 1. mnrs (fig. 6) ſey ein Waſſerquerſchnitt, an einer Stelle genommen, wo das Waſſer wenigſtens auf die Länge von einigen Ruthen ſeine Geſchwindigkeit, alſo auch ſeine Tiefe nicht merklich ändert; ſein Flächeninhalt ſey $= q$; der benetzte Umfang dieſes Profils $mn + nr + rs$ ſey $= p$; die Tiefe des Waſſers an dieſer Stelle on ſey $= h$; die mittlere Breite zwiſchen dem Boden und der Oberfläche $= b$; der Kanalboden habe, wie eine ſchiefliegende Fläche, durchaus gleichförmiges Gefälle, das auch, wenn er horizontal liegt, $= a$ ſeyn kann. Allemal muß die Oberfläche des fortflieſenden Waſſers einen gewiſſen Abhang haben, der, von der erwähnten Stelle aus gemeſſen, auf die Länge $l = a$ ſeyn mag, ſo daß l höchſtens ein paar Ruthen beträgt.

Es ſey ferner die mittlere Geſchwindigkeit der Waſſertheilchen in dem angenommenen Querſchnitt $= v$. Alles in Pariſer Zollen ausgedruckt.

2. Beobachtungen zufolge hängt die Geſchwindigkeit v von den erwähnten Abmeſſungen ſo ab, daß v ziemlich genau der Quadratwurzel aus $\frac{aq}{pl}$ proportional iſt, ſo daß man

$$v = \Phi \cdot \sqrt{\frac{aq}{pl}}$$

ſetzen kann.

3. Aus

3. Aus dieſer auch nur als Hypotheſe angenommenen Gleichung kann man durch Verſuche bei regulären Kanälen $\Phi = v \cdot \sqrt{\frac{pl}{aq}}$ beſtimmen, und ſehen, ob ſich für Φ eine Zahl ergiebt, die ſich beſtändig beibehalten läßt.

Ein Mittel aus vielen von Dübüat angeſtellten Verſuchen giebt

$$\Phi = 309 \text{ alſo}$$

$$v = 309 \cdot \sqrt{\frac{aq}{pl}}$$

wo alles auf Par. Zolle geht.

4. Hingegen alles in Par. Fußen ausgedruckt, erhält man genau genug

$$v = 89 \cdot \sqrt{\frac{aq}{pl}} \text{ Par. Fuße.}$$

5. Alſo

$$M = q \cdot v$$
$$= 89 \cdot q \cdot \sqrt{\frac{aq}{pl}} \text{ Par. Kub. F.}$$

6. Die Böſchung mo des Kanals kann als ein allquoter Theil der Waſſertiefe h angeſehen werden; ſetzt man ſie $= \frac{1}{e} h$, ſo hat man (fig. 6)

$$p = nr + 2\sqrt{\left(h^2 + \frac{h^2}{e^2}\right)}$$
$$= b + \frac{h \cdot (2\sqrt{(e^2 + 1)} - 1)}{e}$$

Daher

Daher in (5)

$$M = 89 . bh . \sqrt{\frac{abh}{bl + \frac{h . (2\sqrt{(e^2+1)} - 1)}{e} . l}}$$

7. Für einen rechtwinklichten Kanal iſt b zugleich die Breite des Bodens, und $p = b + 2h$, alſo (no. 5)

$$M = 89 . bh . \sqrt{\frac{abh}{(b + 2h) . l}}$$

Zuſ.

§. 22. Es iſt alſo (vor. §. 7)

$$\frac{a}{l} = \frac{M^2 . (b + 2h)}{89^2 . b^3 h^3}$$

Für einen Kanal mit horizontalem Boden druckt $\frac{a}{l}$ bloß das Gefälle der Oberfläche aus. Weil aber mit dem Abhang der Oberfläche nothwendig in dieſem Falle zugleich Abnahme von p und q verbunden iſt, ſo muß $\frac{q^2}{p}$ veränderlich ſeyn; und da dennoch M für alle Querſchnitte einerlei Werth haben muß, ſo folgt, daß auch $\frac{a}{l}$ veränderlich iſt oder für ieden andern Querſchnitt einen andern Werth hat.

Man ſchreibe daher allgemein y ſtatt h, — dy ſtatt a, dx ſtatt l und z ſtatt p, ſo wird

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{M^2}{89^2 . b^3} . \frac{b + 2y}{y^3}$$

daher

daher

$$dx = -\frac{89^2 b^3}{M^2} \cdot \frac{y^3 dy}{b + 2y}$$

Weil nun der Nenner $b + 2y$ in Vergleichung mit dem Zähler y^3 ſehr wenig veränderlich iſt, ſo ſchreibe ich dafür μ und ſehe anfänglich μ als unveränderlich an. So giebt ſich ſogleich, wenn ich B ſtatt $\frac{89^2 . b^3}{M^2}$ ſchreibe

$$x = -\frac{B . y^4}{4\mu} + \text{Conſt}$$

Für $x = 0$ iſt $y = h$, alſo

$$\text{Conſt} = \frac{B h^4}{4\mu}$$

und

$$x = \frac{B(h^4 - y^4)}{4\mu}$$

Zur Verbeſſerung ſetze man ietzt noch $\frac{h + y}{2}$ ſtatt μ, ſo hat man

$$x = \frac{B . (h^4 - y^4)}{2(h + y)}$$

woraus ſich ſogleich

$$y = \sqrt[4]{\left(h^4 - \frac{2(h + y) . x}{B}\right)}$$

ergiebt, wo man unter dem Wurzelzeichen zuerſt h ſtatt y, alſo die Gleichung

$$y = \sqrt[4]{\left(h^4 - \frac{4hx}{B}\right)},$$

gebrau-

gebrauchen kann; ſetzt man den ſo gefundenen Werth von $y = y'$, ſo erhält man

$$y = \sqrt[4]{\left(h^4 - \frac{2(h+y')\,x}{B}\right)}$$

Dieſe Gleichung giebt die Höhe eines ieden Waſſerquerſchnitts, der von dem, deſſen Höhe h iſt, in der Entfernung x weiter abwärts liegt.

Ebenſo hat man

$$h = \sqrt[4]{\left(y^4 + \frac{2(h+y).x}{B}\right)}$$

wo man wiederum zuerſt y ſtatt h unter dem Wurzelzeichen, alſo

$$h = \sqrt[4]{\left(y^4 + \frac{4yx}{B}\right)}$$

nehmen kann. Wird der ſo gefundene Werth von h durch h' ausgedruckt, ſo hat man

$$h = \sqrt[4]{\left(y^4 + \frac{2(h'+y).x}{B}\right)}$$

eine Gleichung, aus der ſich die Höhe h eines ieden Waſſerquerſchnitts ergiebt, der in der Entfernung x oberhalb einem Querſchnitt liegt, deſſen Höhe y gegeben iſt.

Anm. So leicht es auch war, auf eine Differentialgleichung für die Oberfläche des Waſſers in einem parallelepipediſchen Kanale zu verfallen, ſo iſt dennoch dieſer Gedanke Dübüat und andern Hydraulikern entgangen. Ich habe ſie zuerſt in dem Handbuche der Maſchinenlehre (S. 99) beigebracht. Hr. Eytelwein (in der oben §. 11. angef. Schrift) hat ſie als eine völlig ſcharfe Gleichung behandelt, und hat ſich daher die Mühe gegeben, ihr genaues Integral zu entwickeln (a. a. O.

S. 190 u. f.). Dadurch iſt aber das Verfahren weit mühſamer und der Gebrauch der ſo gefundenen Formel viel beſchwerlicher geworden, ohne daß man dadurch in der Genauigkeit der Uebereinſtimmung mit der Erfahrung gewonnen hätte.

Aufg. 8.

§. 22*. Es iſt das Gefälle $\frac{a}{l}$ des Kanalbodens, die Tiefe h und die Länge l, ingleichem die Waſſermenge M, welche in einer Sekunde abflieſſen ſoll (alles in Pariſer Fußen), gegeben; man ſoll die Breite des Kanals am Boden und an der Oberfläche des Waſſers beſtimmen.

Aufl. Die Gleichung §. 21. no. 6. auf beiden Seiten quadrirt, dann mit dem Nenner zur Rechten multiplicirt und nun auf o gebracht giebt, wenn man alsdann

$$A \text{ ſtatt } \frac{l.M^2.h.(2\sqrt{(e^2+1)}-1)}{89^2.ah^3.e}$$

ſchreibt, $b^3 - \frac{M^2.l}{89^2.ah^3}b - A = 0$

Man kann nun durch einige Rechnungsproben leicht einen beiläufigen Werth von b finden, und wenn man ſolchen mit b′ bezeichnet, ſo hat man ſo genau als es hier überhaupt erwartet werden kann

$$b = \sqrt[3]{\left(A + \frac{M^2.l.b'}{89^2.a.h^3}\right)}$$

Dem

Demnach des Kanals Breite

am Boden . . . $= b - \frac{h}{e}$

an der Oberfl. des Waſſers $= b + \frac{h}{e}$

Aufg. 9.

§. 23. Aus der Waſſermenge, welche in ieder Sek. durch den Kanal abgeleitet werden ſoll und den übrigen Abmeſſungen des Kanals das erfoderliche gleichförmige Gefälle a für die ganze Länge l des Kanals zu finden.

Aufl. Aus (§. 21. no. 5) giebt ſich

$$a = \frac{M^2 \cdot p}{89^2 \cdot q^3}$$

Anm. Um wegen der abzuführenden Waſſermenge hinlänglich geſichert zu ſeyn, mache man den Kanal am Anfang ſo tief, daß das Waſſer darin um $\frac{1}{5}$ höher, als die angenommene Waſſertiefe h beträgt, ſteigen könnte, ohne überzulaufen; dieſe Kanaltiefe kann dann allmählig ſo abnehmen, daß ſie am Ende noch h bleibt.

Um auch gegen allenfallſige Fehler beim Abwägen ſicher zu ſeyn, laſſe man den Kanalboden iedesmal auf die Länge von 300 Fußen plötzlich um $\frac{1}{4}$ Zoll fallen, ſo daß das ganze Gefälle in Fußen $= H + \frac{1}{14400}$ wird.

Und wegen des unvermeidlichen Verluſtes, theils wegen des Ausrinnens theils wegen der Verdünſtung, mache man die mittlere Breite des Kanals bei der wirklichen An-

lage $= (1 + \frac{l}{20000}) . b$ bei gegrabenen Kanälen und $=$

$(1 + \frac{l}{40000}) . b$ bei hölzernen Gerinnen, wo ſich l auf Fuße bezieht.

Anm. 2. Die vorſtehenden Berechnungen beziehen ſich durchaus auf geradausgehende Kanäle; in gebrochenen (fig. 7) leidet das Waſſer eine deſto gröſſere Verminderung ſeiner Geſchwindigkeit, ie gröſſer die Anzahl von Ecken iſt, ie kleiner die Winkel α an dieſen Ecken ſind, und ie gröſſer die Geſchwindigkeit wäre, wenn der Kanal bei denſelben Abmeſſungen keine Ecken α hätte.

Die hieraus entſtehende Verminderung der Abflußmenge kann dadurch unbedeutend gemacht werden, daß man den Kanal gegen die Wendungen hin allmälig erweitert und zugleich abrundet, wie die punktirten Linien (fig. 7) andeuten.

Anm. 3. Bei einerlei Tiefe und mittlerer Breite, alſo bei ungeänderten Werthen von b und h kann doch die Geſtalt des Profils ſehr verſchieden ſeyn. Iſt z. B. vr (fig. 8) die mittlere Breite, und AB die Linie, bis zu der das Waſſer im Querſchnitt reicht, ſo haben die Profile

mnrs, abcd, kwfg

einerlei Höhe und mittlere Breite, alſo auch einerlei Inhalt, aber ſehr verſchiedene Geſtalten. Und da dieſe verſchiedene Geſtalten des Profils verſchiedene Böſchungen für die Seitenwände geben, ſo erhellet, daß in dem Werthe von M (§. 21) die Gröſſe e ganz verſchiedene Werthe haben kann, ohne daß ſich eine der übrigen in dieſem Werthe vorkommenden Gröſſen ändern darf. Dann gehören aber zu den verſchiedenen Werthen von e auch verſchiedene Werthe von M, und es iſt alſo bei einerlei Gröſſe des Querſchnitts und bei einerlei Waſſertiefe und Gefälle für die Abflußmenge nicht gleichgültig, was man den Seitenwänden für eine Böſchung geben will.

Aufg.

Aufg. 10.

§. 24. Die vortheilhafteſte Böſchung zu beſtimmen, bei der nämlich durch einen Kanal, deſſen Querſchnitt und Tiefe beſtimmt ſind, in einer gegebenen Zeit die größte Waſſermenge abflieſſen kann.

Aufl. Der Foderung gemäß muß im Werthe von M (§. 21) e ſo genommen werden, daß M ein maximum wird; dieſes geſchieht nun, weil die übrigen Gröſſen ungeändert bleiben ſollen, wenn $\frac{2\sqrt{(e^2+1)}-1}{e}$ ſo klein als möglich oder umgekehrt $\frac{e}{2\sqrt{(e^2+1)}-1}$ ſo groß als möglich gemacht wird.

Die Differentialrechnung giebt nun für dieſen Fall

$$(2\sqrt{(e^2+1)}-1).de-e.d(2\sqrt{(e^2+1)}-1)=0$$

woraus man

$$2.(e^2+1)-2.e^2=(e^2+1)^{\frac{1}{2}}$$

oder $2=(e^2+1)^{\frac{1}{2}}$, alſo $e=\sqrt{3}$ findet.

Daher die vortheilhafteſte Böſchung

$$mo\ (\text{fig. } 6)=\frac{h}{1,73}\text{ oder }=\tfrac{4}{7}h$$

woraus ſich

des Bodens Breite	$= b-\frac{4}{7}h$
der Oberfläche Breite	$= b+\frac{4}{7}h$
die Seite mn = rs	$= \frac{8}{7}h$

ergiebt.

Anm. Auf irreguläre Kanäle oder Flußbette, wie ſie die Natur zubereitet, laſſen ſich die vorſtehenden Berechnungen keineswegs anwenden. Wer die unendliche Mannigfaltigkeit ſolcher Flußbette erwägt, wird überhaupt leicht begreifen, daß es kaum oder für uns gar nicht möglich ſeyn wird, auch nur Hypotheſen aufzuſtellen, die uns bei natürlichen Flußbetten auf allgemein anwendbare auch nur empiriſche Formeln zur Beſtimmung der abflieſſenden Waſſermengen leiten könnten. Man hat daher mit Recht ſchon längſt auf Werkzeuge gedacht, die uns in den einzelen Fällen zur Beſtimmung der Abflußmengen behülflich ſeyn könnten.

Hierhin gehören beſonders

Schwimmende Körper überhaupt
Der ſchwimmende Stab des Barattieri
Der Quadrant mit dem Pendel
Die Pitotſche Röhre
Die Waſſerfahne des Ximenes
Michelotti's Waſſerhebel
Nadi's Hydrometriſche Flaſche
Brünings Waſſerhebel
Brünings Strohmmeſſer
Woltmanns Strohmmeſſer oder Hydrometriſche Flügel.

Die Abbildung und Beſchreibung des Woltmanniſchen Strohmmeſſers findet man in Herrn Woltmanns

Theorie und Gebrauch des Hydrometriſchen Flügels, Hamburg 1790.

auch in meinem Handbuch der Maſchinenlehre I. B. S. 182. Die übrigen findet man abgebildet, beſchrieben und genau geprüft in

Herrn Brünings Abhandlung über die Geſchwindigkeit des flüſſenden Waſſers und von

den

den Mitteln, dieſelbe auf allen Tiefen zu beſtimmen, aus dem Holländiſchen überſetzt von Kröncke, Frankfurt am Mayn 1798.

Der treffliche Woltmanniſche Strohmmeſſer, welcher die Geſchwindigkeit des Waſſers an ieder Stelle eines Querſchnittes von flieſſendem Waſſer angiebt, iſt ietzt ſchon ziemlich allgemein bekannt und wird von teutſchen Künſtlern häufig verfertiget.

Umſtändlichere Unterſuchungen findet man bei Herrn Eytelwein a. a. O. (ſ. oben §. 11.) und in meinem Lehrb der Hydraul. Hier verſtattet der Raum keine weitere Ausführung.

Viertes Kapitel.

Von der Bewegung des Waſſers in Röhren bei unveränderlicher Waſſerhöhe.

Vorerinnerung.

§. 25. Wenn die Länge einer mit einem Behältniß verbundenen Röhre den Durchmeſſer beträchtlich übertrifft, ſo fließt nicht mehr ſoviel Waſſer aus als im I. Kap. für kurze Anſatzröhren angegeben worden iſt, und die Ausflußmenge für eine beſtimmte Zeit wird nun bei einerlei Höhe des Waſſerſpiegels über dem Mittelpunkt der Ausflußöffnung, welche hier für die Waſſerhöhe genommen wird, deſto kleiner, ie länger die Röhre iſt. Bei Röhrenleitungen von beträchtlicher Länge iſt daher dieſe Verminderung der

Ausflußmenge ſehr bedeutend, ſo daß letztere nur $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$ u. ſ. w. von der Waſſermenge betragen kann, welche bei derſelben Waſſerhöhe und bei derſelben Röhrenweite aus einer kurzen Anſatzröhre abflieſſen würde. Worin nun auch der Grund dieſer Verminderung liegen mag, ſo muß doch letztere von Hinderniſſen herrühren, wozu die Röhrenwände Anlaß geben, und die Summe dieſer Hinderniſſe kann man bloß zur Abkürzung Widerſtand der Röhrenwände nennen. Es würde nun dieſelbe Verminderung der Ausflußmenge erfolgen, wenn die Röhrenwände gar keine Hinderniſſe der Bewegung verurſachten, dagegen aber am Ende der Röhrenleitung eine Waſſerſäule von einer gewiſſen Höhe entgegendruckte, die durch ihren Gegendruck dem Waſſer dieſelbe Hinderniß entgegenſetzte, welche vorher durch die Röhrenwände veranlaßt wurde. Man kann daher den Widerſtand der Röhrenwände allemal als Gegendruck einer am Ende angebrachten Waſſerſäule betrachten, und die Höhe dieſer Waſſerſäule, deren Gegendruck jenem Widerſtande äquivalent wäre, die Widerſtandshöhe nennen.

Offenbar muß nun, bevor Bewegung erfolgen kann, der geſammte Widerſtand überwunden werden; hierzu wird alſo ein Theil der ganzen vorhandenen Waſſerhöhe verwendet. Nur der übrige Theil der Waſſerhöhe kann auf Geſchwindigkeit verwendet werden, der daher die Geſchwindigkeitshöhe heiſſen kann.

Solange noch, auſſer dem zur Ueberwindung des Widerſtandes erfoderlichen Druck, Kraft in eine Maſſe wirkt, wird ſolcher immer noch neue Geſchwindigkeit mitgetheilt, alſo ihre Bewegung noch immer beſchleunigt.

Wird alſo das Waſſer in den Röhren im Zuſtand der gleichförmigen Bewegung betrachtet, welches der

Behar-

Beharrungsſtand heißt, ſo muß auſſer dem Druck, welcher zur Ueberwindung des Widerſtandes erfodert wird, ſonſt kein Druck weiter auf die Waſſertheilchen in den Röhren ſtatt finden. Das Waſſer bewegt ſich nämlich alsdann bloß vermöge der Trägheit längſt den Röhren fort.

Da nun derjenige Theil der ganzen Waſſerhöhe, welcher nach Abzug des auf die Ueberwindung des Widerſtandes verwendeten Theils noch übrig bleibt, die in die bewegte Maſſe wirkende beſchleunigende Kraft beſtimmt, ſo muß ebendieſer übrigbleibende Theil der Waſſerhöhe für den Beharrungsſtand des in den Röhren abflieſſenden Waſſers = o ſeyn.

Auf dieſen vorläufigen Betrachtungen beruht das Nachfolgende.

Lehrſ. I

§. 26. Die ganze Waſſerhöhe (§. 25) ſey $= H$, der unveränderliche Querſchnitt der Röhren $= w$, die Einflußöffnung in die Röhren (die auch eine Oeffnung in einer vorgeſchrobenen Platte ſeyn könnte) $= \alpha$, alſo der Querſchnitt des zuſammengezogenen Strahls $= (1 - n) . \alpha$ (§. 9), wofür ich $\gamma . \alpha$ ſetzen will, die von den Röhrenwänden herrührende Widerſtandshöhe $= \mathfrak{H}$, die Geſchwindigkeit des Waſſers in den Röhren $= c$, die zugehörige Höhe $= h$, ſo iſt für den Beharrungsſtand

$$h = \frac{\gamma^2 \alpha^2}{w^2} . (H - \mathfrak{H})$$

Bew. Vermöge der Vorausſetzung verhält ſich die Sache ſo, als wäre die wirkliche Waſſerhöhe

 nur

nur $= H - \mathfrak{H}$ und dann der freien Bewegung des Waſſers in den Röhren gar keine Hinderniſſe entgegengeſetzt. Wenn nun die zu $H - \mathfrak{H}$ gehörige Geſchwindigkeit C heißt, ſo iſt vermöge der Lehren des 1ten Kap im Beharrungsſtande C die Geſchwindigkeit, mit der die Waſſertheilchen in die Oeffnung α treten, die alſo $= 2\sqrt{g(H - \mathfrak{H})}$ iſt; daher die Abflußmenge für iede Sekunde

$$M = \gamma\alpha \,.\, 2\sqrt{g(H - \mathfrak{H})}$$

Es iſt aber auch

$$M = c \,.\, w = w \,.\, 2\sqrt{gh}$$

alſo

$$w \,.\, 2\sqrt{gh} = \gamma\alpha \,.\, 2\sqrt{g(H - \mathfrak{H})}$$

woraus ſich

$$w^2 \,.\, h = \gamma^2\alpha^2 (H - \mathfrak{H})$$

alſo

$$h = \frac{\gamma^2\alpha^2}{w^2} \,.\, (H - \mathfrak{H})$$

ergiebt.

Hypotheſe.

§. 27. Der Durchmeſſer der Röhren, deſſen zugehörige Kreisfläche w iſt, heiſſe d, die Länge der Röhren ſey $= \lambda$, ſo kann man vor der Hand

$$\mathfrak{H} = \Phi \,.\, \frac{\lambda}{d} \,.\, h$$

annehmen, ſo daß Φ eine aus Beobachtungen erſt noch zu beſtimmende unveränderliche Zahl bedeutet. Ob es eine ſolche Zahl gebe, die man allemal ſtatt Φ ſetzen könne, um dieſen Ausdruck allen Röhrenleitungen anzupaſſen, müſſen Beobachtungen entſcheiden.

Aufg.

Aufg. 11.

§. 28. Den Werth von ϕ (vor. §.) zu beſtimmen, um ihn mit unmittelbaren Beobachtungen vergleichen zu können.

Aufl. Man ſetze in der letzten Gleichung (§. 26) $\phi \cdot \frac{\lambda}{d} \cdot h$ ſtatt $\mathfrak{H}$ (§. 27), ſo hat man

$$h = \frac{\gamma^2 \alpha^2}{w^2}\left(H - \phi \cdot \frac{\lambda}{d} h\right)$$

alſo

$$\frac{w^2}{\gamma^2 \alpha^2} \cdot h = H - \frac{\lambda}{d} h \cdot \phi$$

und

$$\phi = \frac{\left(H - \frac{w^2}{\gamma^2 \alpha^2} h\right) \cdot d}{\lambda \cdot h}$$

Erfahrung.

§. 29. Die von Dü Büat angeſtellten Verſuche können nun gebraucht werden, für ganz verſchiedene Werthe von H, h, d und λ den zugehörigen Werth von ϕ zu berechnen. Die wirkliche Berechnung giebt aber für dieſe verſchiedenen Röhrenleitungen nicht durchaus einerlei Werth von ϕ. Inzwiſchen fallen die verſchiedenen Werthe, welche man von ϕ auf dieſe Weiſe findet, doch immer noch nahe genug zuſammen, um eine Mittelzahl aus allen dieſen Werthen als diejenige annehmen zu können, welche in allen Fällen ſtatt ϕ geſetzt werden darf. Ich finde als Mittelzahl

$$\phi = 0{,}03$$

und

und hiermit wäre alſo die Hypotheſe (§. 27)

$$\mathfrak{H} = \frac{0{,}03 \,.\, \lambda}{d} \,.\, h$$

wenigſtens eine Näherungsformel, der man ſich ſo-lange bedienen kann, bis entſcheidendere Unterſuchungen hierüber etwas genaueres geben.

Anm. Bei den Dübüatſchen Verſuchen war durchaus $\alpha = w$, alſo zugleich $\gamma = 1 - 0{,}19 = 0{,}81$ und $\gamma^2 = 0{,}65$. Daher

$$\Phi = \frac{(0{,}65 \,.\, H - h) \,.\, d}{0{,}65 \,.\, h \,.\, \lambda}$$

Zuſ. 1.

§. 30. Man hat alſo nunmehr (§. 26. am Ende), indem man $\alpha = w$ und $\gamma^2 = 0{,}65$ oder genauer $= 0{,}656$ ſetzt,

$$h = 0{,}65 \,.\, \left(H - \frac{0{,}03 \,.\, \lambda}{d} \,.\, h\right)$$

$$\text{beinahe} = 0{,}65 \,.\, H - \frac{0{,}02 \,.\, \lambda}{d} \,.\, h$$

Daher

$$h = \frac{0{,}65 \,.\, H}{1 + \frac{0{,}02 \,.\, \lambda}{d}}$$

und die zugehörige Geſchwindigkeit des Waſſers

$$c = \sqrt{4g \,.\, \frac{0{,}65 \,.\, H}{1 + \frac{0{,}02 \,.\, \lambda}{d}}}$$

In Pariſer Zollen iſt g = 181, alſo

$$c = \sqrt{\left(724 \cdot \frac{0,65 \,.\, H}{1 + \frac{0,02 \,.\, \lambda}{d}}\right)}$$

oder auch

$$c = \sqrt{\frac{470 \,.\, H}{1 + \frac{0,02 \,.\, \lambda}{d}}}$$

wo c und H auf Zolle gehen.

Zuſ. 2.

§. 31. Iſt eine Röhrenleitung aus Röhren von verſchiedener Weite zuſammengeſetzt, wie (fig 13), ſo iſt iede einzele Röhrenſtrecke als ein neuer Widerſtand anzuſehen, der ſich durch eine Waſſerſäule von einer gewiſſen Höhe ausdrucken läßt.

Bezeichnet man nämlich

die Längen der nach einander folgenden Röhrenſtrecken mit	$\lambda, \lambda', \lambda'', \lambda''', \lambda''''$ ....
die zugehörigen Röhrendurchmeſſer mit	d, d', d'', d''', d'''' ....
die zugehörigen Kreisflächen mit	w, w', w'', w''', w'''' ....
die zu den verſchiedenen Geſchwindigkeiten des Waſſers in den einzelen Röhrenſtrecken gehörigen Höhen mit	h, h', h'', h''', h'''' ....

die

die zu den einzelen Röhrenſtrecken gehörigen Widerſtandshöhen mit $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}', \mathfrak{h}'', \mathfrak{h}''', \mathfrak{h}''''\ldots$

ſo iſt $\mathfrak{h} = \frac{0,03 . \lambda}{d} . h$, $\mathfrak{h}' = \frac{0,03 . \lambda'}{d'} . h'$, $\mathfrak{h}'' = \frac{0,03 . \lambda''}{d''} . h''$, $\mathfrak{h}''' = \frac{0,03 . \lambda'''}{d'''} . h'''$, $\mathfrak{h}'''' = \frac{0,03 . \lambda''''}{d''''} . h''''$ u. ſ. w.

Aber $h' = (\frac{w}{w'})^2 . h$, $h'' = (\frac{w}{w''})^2 . h$, $h''' = (\frac{w}{w'''})^2 . h$, $h'''' = (\frac{w}{w''''})^2 . h$

alſo die geſammte von den Röhrenwänden herrührende Widerſtandshöhe

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{h} + \mathfrak{h}' + \mathfrak{h}'' + \mathfrak{h}''' + \mathfrak{h}'''' \text{ ꝛc.}$$

$$= 0,03 . h \left(\frac{\lambda}{d} + (\frac{w}{w'})^2 . \frac{\lambda'}{d'} + (\frac{w}{w''})^2 . \frac{\lambda''}{d''} + (\frac{w}{w'''})^2 . \frac{\lambda'''}{d'''} + (\frac{w}{w''''})^2 . \frac{\lambda''''}{d''''} + \text{ꝛc.} \right)$$

wo nämlich iedesmal ſoviele Glieder in der Parentheſe genommen werden, als verſchiedene Röhrenſtrecken auf einander folgen.

Aufg. 12.

§. 32. a (fig. 14) ſey eine mit Waſſer angefüllte Röhrenleitung, deren Querſchnitt = w iſt, und in welcher das Waſſer durch zwei Kolben p, K, deren Stangen unter einem rechten Winkel in

den

den gemeinſchaftlichen einſeitigen Hebel no eingreifen, in Bewegung geſetzt wird, indem das Waſſer in A auf den Kolben K druckt und dadurch den Hebelarm no, der ſich frei um n herumdrehen kann, von o nach p fortſchiebt; alle Reibungen und ſonſtige Hinderniſſe werden bei Seite geſetzt: man ſoll die beſchleunigende Kraft beſtimmen, welche beim Anfang der Bewegung in die Waſſermaſſe der Röhrenleitung λ wirkt.

Aufl. 1. Die Höhe der Ausflußöffnung μ über dem Mittel des Kolbens p ſey = e, die Höhe des Waſſers in A über dem Kolben K = E, die Grundfläche von K = W, die von p = w, die Entfernung mn = r, die on = q, ſo iſt

die bewegende Kraft des Waſſers A $= E.W - \frac{q}{r} e.w$

d. h. ſo groß als das Gewicht einer ſolchen Waſſerſäule.

Dieſe Kraft ſoll P heiſſen.

2. Für die Bewegung von K iſt es nun völlig gleichgültig, ob der Kolben K die Maſſe in λ, welche Q heiſſen ſoll, oder eine andere R mit derſelben Geſchwindigkeit, mit welcher ſich K bewegt, in Bewegung ſetzen ſoll, woferne nur P ungeändert bleibt und

$\mathfrak{R} = \frac{q^2}{r^2} . \mathfrak{Q}$ genommen wird (§. 100).

Würde alſo der Hebel ganz weggenommen, und ſtatt deſſen ein Kolben K unmittelbar mit der Stange Km verbunden, ſo daß iezt das Waſſer in B in Bewegung

wegung geſetzt werden müßte, ſo würde ſich K wie vorhin bewegen, woferne nur P ſeinen vorigen Werth behielte, und die Waſſermaſſe in B $= \frac{q^2}{r^2}$ Ω wäre.

3. Wenn nun die Waſſermaſſe in A = 𝔐 geſetzt wird, ſo wäre im letzteren Falle (die Maſſe der Kolben und der Stange bei Seite geſetzt) die beſchleunigende Kraft

$$= \frac{P}{\mathfrak{M} + \mathfrak{N}} = \frac{P}{\mathfrak{M} + \frac{q^2}{r^2}\Omega}$$

4. Da nun K dieſelbe Bewegung annehmen muß, wenn er mit dem Kolben p (ſtatt des K) in Verbindung bleibt, ſo ergiebt ſich

die anfängliche Beſchleu-

nigung von p $= \frac{q}{r} \cdot \frac{P}{\mathfrak{M} + \frac{q^2}{r^2}\Omega}$.

Zuſ.

§. 33. Würde die Röhrenleitung λ mit dem Behältniß A unmittelbar verbunden, wie (fig. 15), ſo würde ſich die Sache völlig ſo wie im vor. §. für fig. 14 verhalten, wenn dort $\frac{q}{r} = \frac{W}{w}$ gemacht wird und E, e die dortigen Werthe behalten. Für dieſen Fall wird für den Anfang der Bewegung

$$P = E.W - \frac{W}{w} e.w = (E - e).W$$
$$= H.W$$

wenn

wenn die Waſſerhöhe in der bisherigen Bedeutung (§. 25) $= H$ geſetzt wird. Setzt man die Länge der centriſchen Linie $\delta\varepsilon = a$, ſo hat man $\mathfrak{M} = a . W$ für ein gleichweites Behältniß, und wenn λ die Länge der angeſetzten gleichweiten Röhre iſt, ſo hat man $\mathfrak{Q} = \lambda w$, alſo

die beſchleunigende Kraft für das Waſſer in A $= \dfrac{P}{\mathfrak{M} + \dfrac{q^2}{r^2}\mathfrak{Q}}$

$$= \frac{H . W}{a . W + \frac{W^2}{w^2} . \lambda w} = \frac{H}{a + \frac{W}{w}\lambda}$$

und

die beſchleunigende Kraft für das Waſſer in der Röhrenleitung $=$

$$\frac{W}{w} . \frac{H}{a + \frac{W}{w}\lambda} = \frac{H}{\frac{w}{W} . a + \lambda}$$

Dabei iſt auf den Widerſtand der Röhrenwände keine Rückſicht genommen worden, der auch am Anfange der Bewegung noch $= 0$ geſetzt werden kann.

Daß die beſchleunigende Kraft allmälig abnehmen müſſe, erhellet ſchon aus (§. 25). Die folgende Aufgabe führt auf nähere Beſtimmungen.

Aufg. 13.

§. 34. Es ſey A (fig. 15) ein beträchtlich weites Gefäß oder Behältniß, deſſen Weite W iſt und mit dem eine Röhrenleitung von der Länge λ

und Weite w in Verbindung ſteht: man ſoll die Druckhöhe und die beſchleunigende Kraft f, welche auf das Waſſer in der Röhrenleitung wirkt, für jede ſchon erlangte Geſchwindigkeit des Waſſers beſtimmen, unveränderliche Waſſerhöhe H vorausgeſetzt.

Aufl. 1. Ein Theil der Waſſerhöhe H wird verwendet, den Widerſtand der Röhrenwände zu überwinden, ein anderer Geſchwindigkeit hervorzubringen.

Soviel von der Waſſerhöhe ſchon auf hervorgebrachte Geſchwindigkeit verwendet worden iſt, geht von der noch übrigen Druckhöhe verlohren.

Wenn alſo zu irgend einer ſchon erlangten Geſchwindigkeit die Widerſtandshöhe $\mathfrak{H}$ gehört, deren Werth mit der zunehmenden Geſchwindigkeit wächſt, und $\mathfrak{X}$ den von der Waſſerhöhe zur Hervorbringung jener Geſchwindigkeit ſchon verwendeten Theil bezeichnet, ſo iſt (vor. §.)

$$f = \frac{H - (\mathfrak{H} + \mathfrak{X})}{\frac{w}{W} a + \lambda}$$

2. Die in einem willkührlich angenommenen Augenblick vorhandene Geſchwindigkeit des Waſſers beim Einfluß in die Röhrenleitung ſey $= z$, ſo iſt die hierzu gehörige Höhe $= \frac{z^2}{4g}$, und wenn das Waſſer nicht ſchon mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit in das Behältniß kommen müßte, ſo daß jene Geſchwindigkeit

bloß

bloß von der vorhandenen Waſſerhöhe bewirkt werden müßte, ſo wäre

$$\mathfrak{X} = \frac{z^2}{4g}$$

Da aber das Waſſer, um beſtändig in der Höhe H erhalten zu werden, ſchon mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit zuflieſſen muß, vermög der die Theilchen in der Oberfläche des Behältniſſes A ſchon die Geſchwindigkeit $\frac{\gamma w}{W} . z$ erhalten, ſo wird iene Geſchwindigkeit z nicht ganz von der im Behältniß vorhandenen Waſſerhöhe, ſondern ſchon zum Theil auſſerhalb dem Behältniß durch einen Fall bewirkt, vermöge dem das Waſſer ſchon einen Theil der Geſchw. z mit ins Behältniß bringt, nämlich den Theil $\frac{\gamma w}{W} . z$, dem die Höhe $\frac{(\frac{\gamma w}{W} . z)^2}{4g}$ zugehört.

Daher bleibt der von der Waſſerhöhe H auf hervorgebrachte Geſchwindigkeit verwendete Theil nur noch

$$\mathfrak{X} = \frac{z^2}{4g} - \frac{\frac{\gamma^2 w^2}{W^2} . z^2}{4g}$$

und die bei dieſer Geſchwindigkeit z noch vorhandene

$$\text{Druckhöhe} = H - \left(\mathfrak{H} + \frac{z^2}{4g} - \frac{\gamma^2 w^2}{W^2} . \frac{z^2}{4g}\right)$$

$$= H - \mathfrak{H} - \frac{(W^2 - \gamma^2 w^2) . z^2}{4g W^2}$$

 alſo

alſo

$$f = \frac{H - \mathfrak{H} - \frac{W^2 - \gamma^2 w^2}{W^2} \cdot \frac{z^2}{4g}}{\frac{w}{W} \cdot a + \lambda}$$

3. Für den Beharrungsſtand muß $f = 0$ ſeyn, folglich auch $(\frac{w}{W} a + \lambda) . f = 0$, daher der Dividend

$$H - \mathfrak{H} - \frac{W^2 - \gamma^2 w^2}{W^2} \cdot \frac{z^2}{4g} = 0$$

Demnach für den Beharrungsſtand

$$\frac{z^2}{4g} = \frac{W^2}{W^2 - \gamma^2 w^2} \cdot (H - \mathfrak{H})$$

welches alſo die nach eingetretener gleichförmiger Bewegung der Geſchwindigkeit des Waſſers beim Einfluſſe in die Röhren zugehörige Höhe wäre. Die Geſchwindigkeit dieſes Einfluſſes wäre

$$z = \sqrt{\left(\frac{(H - \mathfrak{H}) . W^2}{W^2 - \gamma^2 w^2} \cdot 4g\right)}$$

4. Iſt C des Waſſers Geſchwindigkeit in der Röhrenleitung, ſo hat man

$$C = \gamma w . z = \sqrt{\left(\frac{(H - \mathfrak{H}) . \gamma^2 W^2}{W^2 - \gamma^2 w^2} \cdot 4g\right)}$$

und, wenn die zu C gehörige Höhe h heißt,

$$h = \frac{C^2}{4g} = \frac{(H - \mathfrak{H}) . \gamma^2 W^2}{W^2 - \gamma^2 w^2}$$

5. Setzt

5. Setzt man $\frac{C}{\gamma}$ ſtatt z, alſo $\frac{C^2}{\gamma^2 . 4g}$ oder $\frac{h}{\gamma^2}$ ſtatt $\frac{z^2}{4g}$, ſo hat man auch (no. 2)

$$f = \frac{H - \mathfrak{H} - \frac{W^2 - \gamma^2 w^2}{\gamma^2 W^2} . h}{\frac{w}{W} . a + \lambda}$$

alſo, wenn die der Geſchwindigkeit in der Röhrenleitung zugehörige Höhe h heißt,

die noch vorhandene Druckhöhe $= H - \mathfrak{H} - \frac{W^2 - \gamma^2 w^2}{\gamma^2 W^2} . h$

$$= H - \left(0{,}03 . \frac{\lambda}{d} + \frac{W^2 - \gamma^2 w^2}{\gamma^2 W^2}\right) . h$$

(§. 31)

6. Für den Beharrungsſtand muß dieſe = 0 ſeyn, alſo

$$H = \left(0{,}03 . \frac{\lambda}{d} + \frac{W^2 - \gamma^2 w^2}{\gamma^2 W^2}\right) . h$$

und

$$h = \frac{H}{0{,}03 . \frac{\lambda}{d} + \frac{W^2 - \gamma^2 w^2}{\gamma^2 W^2}} \text{ *)}$$

*) Man erhält hieraus h wie (§. 30), wenn man im Zähler und Nenner mit $\gamma^2 = 0{,}65$ multiplicirt, und $\frac{w^2}{W^2}$ für

Aufg. 14.

§. 35. Druckhöhe und beſchleunigende Kraft f, welche auf das Waſſer in der Röhrenleitung wirkt, für iede ſchon erlangte Geſchwindigkeit auch in den Fällen zu beſtimmen, wann die Röhrenleitung nicht durchaus gleich weit iſt, oder Schiedwände mit Oeffnungen darin vorkommen, wie α, β, β', β'', β''' (fig. 16).

Aufl. 1. Wäre bloß vor der Einflußöffnung eine Platte mit einer Oeffnung $= \alpha$ angebracht, übrigens aber die Weite der Röhrenleitung durchaus $=$ w, ſo müßte man im Werthe von f (vor. §. no. 2) fürs erſte $\gamma\alpha$ ſtatt γw ſchreiben; auſſerdem wäre auch C (vor. §. no. 4) nicht $= \frac{\gamma w}{w} . z$, ſondern $= \frac{\gamma\alpha}{w} z$, alſo $\frac{z^2}{4g} = \frac{w^2}{\gamma^2\alpha^2} . \frac{C^2}{4g} = \frac{w^2}{\gamma^2\alpha^2} . h$, und nun (vor. §. no. 2)

$$f = \frac{H - \mathfrak{H} - \frac{W^2 - \gamma^2\alpha^2}{W^2} . \frac{w^2}{\gamma^2\alpha^2} . h}{\frac{w}{W} . a + \lambda}$$

oder

für Null annimmt. Dort wurde auf die Zuflußgeſchw. im Behältniß keine Rückſicht genommen, welches auch für einen ſehr kleinen Werth von $\frac{w^2}{W^2}$ verſtattet iſt. Der ietzige Ausdruck iſt genauer.

oder auch

$$f = \frac{H - \mathfrak{H} - \left(\frac{w^2}{\gamma^2 \alpha^2} - \frac{w^2}{W^2}\right) . h}{\frac{w}{W} . a + \lambda}$$

und die Druckhöhe, welche auf das Waſſer in der Röhrenleitung λ wirkte, wäre alſo, wenn die Röhrenleitung durchaus und ſo auch ihre Ausflußöffnung die Weite w hätte,

$$= H - \mathfrak{H} - \left(\frac{w^2}{\gamma^2 \alpha^2} - \frac{w^2}{W^2}\right) . h$$

2. Man ſetze, die ganze Röhrenleitung ſey zwar durchaus gleich weit = w, aber am Ende ihrer ganzen Länge λ befinde ſich eine Platte mit einer Oeffnung von der Weite β, ſo muß das Waſſer durch β mit einer Geſchw. $= \frac{w}{\gamma \beta} . C$, die zur Höhe $\frac{w^2}{\gamma^2 \beta^2} . h$ gehört, ausflieſſen, indem es längſt der Röhrenleitung λ die Geſchw. C hat.

Zur Hervorbringung der Ausflußgeſchw. C brauchte vorhin nur die Druckhöhe $\left(\frac{w^2}{\gamma^2 \alpha^2} - \frac{w^2}{W^2}\right) . h$ verwendet zu werden. Aber iezt ſoll die Ausflußgeſchwindigkeit C in die $\frac{w}{\gamma \beta} . C$ verwandelt, alſo um $\frac{w}{\gamma \beta} . C - C$ vergröſſert werden; es muß daher zur Hervorbringung dieſer neuen Ausflußgeſchw. von der vorhin gebliebenen Druckhöhe wiederum ein Theil $= \left(\frac{w^2}{\gamma^2 \beta^2} - 1\right) . h$ verwendet werden.

Dieſer bloß auf Geſchw. verwendete Theil geht für den ferneren Druck verlohren, und es bleibt alſo die noch übrige Druckhöhe

$$= H - \mathfrak{H} - \left(\left(\frac{w^2}{\gamma^2 \alpha^2} - \frac{w^2}{W^2} \right) + \left(\frac{w^2}{\gamma^2 \beta^2} - 1 \right) \right) . h$$

Dieſes wäre alſo die auf die Waſſertheilchen in der Röhrenleitung von α bis β (fig. 16) noch wirkende Druckhöhe, wenn ihr Geſchwindigkeitshöhe $= h$ geworden wäre und die Röhrenleitung bei β ſich endigte, da dann zugleich $\mathfrak{H} = 0{,}03 . \frac{\lambda}{d} . h$ wäre.

3. Wären nun an β wiederum Röhren von gleicher Weite w' und von der Länge λ' angeſetzt, deren Ausflußöffnung am Ende auch $= w'$ wäre, ſo müßte, wenn kein Widerſtand wegen der Röhrenwände auf die Länge λ' einträte, das Waſſer in dieſen angeſetzten Röhren ganz ungehindert ſo fortflieſſen, wie es durch β in dieſelben ſtröhmte, alſo in der Dicke $\gamma\beta$, und es würde die Anſetzung dieſer Röhren für die vorige Bewegung des Waſſers ganz gleichgültig ſeyn, alſo die noch wirkende Druckhöhe die vorige bleiben.

Aber wegen der Hinderniß der Röhrenwände füllt das Waſſer die ganze Röhre λ' aus, und es iſt hiermit bloß die Folge verbunden, daß $\mathfrak{H}$ ſeinen Werth ändert, und iezt $= 0{,}03 . \left(\frac{\lambda}{d} + \left(\frac{w}{w'} \right)^2 . \frac{\lambda'}{d'} \right) . h$ wird, wo h immer die Geſchwindigkeitshöhe des Waſſers in der Röhre λ bezeichnet.

Für dieſe Geſchwindigkeitshöhe bleibt alſo auch noch iezt die Höhe des durch β fortgepflanzten Drucks,

d. i.

d. i. die ietzige Druckhöhe

$$= H - \mathfrak{H} - \left(\left(\frac{w^2}{\gamma^2 \alpha^2} - \frac{w^2}{W^2} \right) + \left(\frac{w^2}{\gamma^2 \beta^2} - 1 \right) \right) . h$$

nur daß ietzt $\mathfrak{H} = 0{,}03 . \left(\frac{\lambda}{d} + \left(\frac{w}{w'} \right)^2 . \frac{\lambda'}{d'} \right) . h$ iſt.

4. Befände ſich aber am Ende der Röhrenſtrecke λ' wiederum eine Schiedwand mit einer Oeffnung β', ſo müßte die vorige Ausflußgeſchwindigkeit, die ich C' nennen will, in die $\frac{w'}{\gamma\beta'}$ verwandelt, alſo um $\frac{w'}{\gamma\beta'} C' - C'$ $= \left(\frac{w'}{\gamma\beta'} - 1 \right) . \frac{w}{w'} C = \left(\frac{w}{\gamma\beta'} - \frac{w}{w'} \right) . C$ vergröſſert werden. Hierzu wird alſo wiederum von der zuvor gebliebenen Druckhöhe ein Theil $= \left(\frac{w^2}{\gamma^2 \beta'^2} - \frac{w^2}{w'^2} \right) . h$ verwendet, und es bleibt ietzt die noch übrige Druckhöhe =

$$H - \mathfrak{H} - \left(\left(\frac{w^2}{\gamma^2 \alpha^2} - \frac{w^2}{W^2} \right) + \left(\frac{w^2}{\gamma^2 \beta^2} - 1 \right) + \left(\frac{w^2}{(\gamma\beta')^2} - \frac{w^2}{(w')^2} \right) \right) h$$

ſo daß $\mathfrak{H}$ den (no. 3) erwähnten Werth hat.

5. Käme ietzt noch eine neue Röhrenſtrecke von der Länge λ'' hinzu, deren Weite und Ausflußöffnung $= w''$ wäre, ſo bliebe der Ausdruck für die Druckhöhe der vorige, nur daß darin $\mathfrak{H}$ einen gröſſeren Werth =

$$0{,}03 . \left(\frac{\lambda}{d} + \left(\frac{w}{w'} \right)^2 . \frac{\lambda'}{d'} + \left(\frac{w}{w''} \right)^2 . \frac{\lambda''}{d''} \right) . h$$

erhielte (§. 31).

Wäre aber ietzt die Ausflußöffnung am Ende $= \beta''$, ſo gäbe ſich wie vorhin die bei der Geſchwindigkeitshöhe h (in der erſten Röhrenſtrecke) noch vorhandene Druckhöhe =

$$H - \mathfrak{H} - \left(\left(\frac{w^2}{\gamma^2\alpha^2} - \frac{w^2}{W^2}\right) + \left(\frac{w^2}{\gamma \cdot \beta^2} - 1\right) + \left(\frac{w^2}{(\gamma\beta')^2} - \frac{w^2}{(w')^2}\right) + \left(\frac{w^2}{(\gamma\beta'')^2} - \frac{w^2}{(w'')^2}\right)\right) . h$$

wo $\mathfrak{H}$ den erwähnten Werth hätte.

Der Fortgang für noch mehrere Röhren fällt gleich in die Augen.

6. Heißt nun die ſo beſtimmte Druckhöhe, welche noch auf Beſchleunigung zu verwenden in dem Augenblick übrig iſt, da die Geſchwindigkeit des Waſſers in der erſten Röhrenſtrecke $\lambda = h$ iſt, zur Abkürzung K, ſo wirkt bei α den Druck K. w.

Die Kraft, die dieſen Druck bewirkt, hat die Maſſen a. W, λw, $\lambda w'$, $\lambda w''$ ꝛc. in Bewegung zu ſetzen, wo die Höhe des Waſſerſpiegels über der Mitte von $\alpha = a$ geſetzt wird.

Dieſe verſchiedenen Maſſen werden zu gleicher Zeit mit verſchiedenen Geſchwindigkeiten in Bewegung geſetzt

die Maſſe λw mit der Geſchw. z

aW . . . $\frac{w}{W} . z$

$\lambda w'$ . . . $\frac{w}{w'} . z$

$\lambda w''$ . . . $\frac{w}{w''} . z$ u. ſ. f.

Es

Es iſt daher für die wirkende Kraft daſſelbe, wenn ſie mit derſelben Geſchwindigkeit z die Maſſen λw, $\frac{w^2}{W^2} . aW$, $(\frac{w}{w'})^2 . \lambda w'$, $(\frac{w}{w''})^2 . \lambda w''$ u. ſ. w. in Bewegung ſetzen ſollte (§. 32).

Man hat daher die beſchl. Kraft

$$f = \frac{K . w}{\lambda w + \frac{w^2}{W^2} . aW + (\frac{w}{w'})^2 . \lambda w' + (\frac{w}{w''})^2 . \lambda w''}$$

$$= \frac{K}{\frac{w}{W} . a + \lambda + \frac{w}{w'} \lambda' + \frac{w}{w''} . \lambda''}$$

wo K die (no. 5) angegebene Druckhöhe iſt.

Anm. Zur Abkürzung werde ich in der Folge

$\mathfrak{B}$ ſtatt $(\frac{w^2}{\gamma^2 \alpha^2} - \frac{w^2}{W^2}) + (\frac{w^2}{\gamma^2 \beta^2} - 1) + (\frac{w^2}{(\gamma \beta')^2} - \frac{w^2}{(w')^2})$ ꝛc.

$\mathfrak{A}$ ſtatt $0{,}03 . (\frac{\lambda}{d} + (\frac{w}{w'})^2 . \frac{\lambda'}{d'} + (\frac{w}{w''})^2 . \frac{\lambda''}{d''}$ ꝛc.)

und

$\mathfrak{M}$ ſtatt $\frac{w}{W} . a + \lambda + \frac{w}{w'} \lambda' + \frac{w}{w''} \lambda''$ ꝛc

(§. 31) gebrauchen.

Zuſ.

§. 36. Für den Beharrungsſtand muß $K = 0$ ſeyn, alſo $H - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) . h = 0$. Dieſes giebt für den Beharrungsſtand

$$h = \frac{H}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}$$

unter

unter h, wie bisher, die Höhe verſtanden, welche zur Geſchwindigkeit des Waſſers in derienigen Röhre gehört, deren Durchmeſſer d oder deren Weite w und Länge λ iſt.

Daraus giebt ſich alſo die Ausflußmenge für iede Sekunde =

$$\sqrt{\frac{4gH}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}}$$

Aufg. 15.

§. 37. Alle Abmeſſungen der Röhrenleitung (§. 35. fig. 16) ſind gegeben; ihre Ausflußöffnung iſt anfänglich verſtopft und die ganze Röhrenleitung mit Waſſer angefüllt; in einem gewiſſen Augenblick wird ſie geöffnet, ſo daß nun die Bewegung anfängt; das Waſſer wird alſo in der Röhre, deren Weite w iſt, nach einer gewiſſen Zeit t eine gewiſſe Geſchwindigkeit z erlangt haben: man ſucht eine Gleichung zwiſchen t und z.

Aufl. 1. Aus (§. 35) hat man

$$f = \frac{H-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).h}{\mathfrak{M}}$$

wo $h = \frac{z^2}{4g}$ iſt.

Für ein Zeittheilchen dt erhält man die zu dieſer veränderlichen Kraft gehörige kleinſtmögliche Geſchwindigkeitsänderung = dz.

2. Die freie Wirkung unſerer natürlichen Schwere bringt in der Zeit t eine Geſchwindigkeit = 2 gt (Dyn. §. 85.

§. 85. no. 6) hervor, alſo für daſſelbe Zeittheilchen dt die Geſchwindigkeitsänderung 2 gdt.

Die beſchleunigende Kräfte verhalten ſich aber wie die in gleichen Zeiten bewirkte Geſchwindigkeiten; wird alſo unſere natürliche Schwere zur Einheit angenommen oder = 1 geſetzt, ſo hat man

$$f : 1 = dz : 2gdt$$

oder die zweite Gleichung für f

$$f = \frac{dz}{2gdt}$$

3. Die beiden Gleichungen (no. 1 u. 2) geben

$$\frac{dz}{2gdt} = \frac{H - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}).h}{\mathfrak{M}}$$

$$= \frac{H - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}).\frac{z^2}{4g}}{\mathfrak{M}}$$

und

$$2\mathfrak{M}.dz = \left(4gH - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}).z^2\right).dt$$

wo bloß z und t veränderliche Größen ſind.

Nun ſetze man (Alg. §. 77. Anm. 1)

$2\mathfrak{M}$ ſtatt α

$4gH$ — β

$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ — δ

z — x

t — y

ſo

ſo erhält man

$$\frac{t}{2\mathfrak{M}} = \frac{1}{2\sqrt{4gH.(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}} \times$$

$$\text{logn}\,\frac{z+\sqrt{\frac{4gH}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}}}{-z+\sqrt{\frac{4gH}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}}}$$

oder, wenn man

$$\frac{\mathfrak{M}}{\sqrt{4gH(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}} = \eta$$

ſetzt,

$$t = \text{logn}\left(\frac{z+\sqrt{\frac{4gH}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}}}{-z+\sqrt{\frac{4gH}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}}}\right)^{\eta}$$

oder auch, wenn die zu H gehörige Geſchwindigkeit C heißt,

$$t = \eta.\text{logn}\,\frac{C+z.\sqrt{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}}{C-z..\sqrt{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}}$$

4. Iſt t gegeben, ſo kann man $\frac{t}{\eta}$ unter den natürlichen Logarithmen aufſuchen, und die zugehörige Zahl, die ich durch $(N)\frac{t}{\eta}$ ausdrucken will, nehmen, da dann

$$(N)\frac{t}{\eta} = \frac{C+z.\sqrt{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}}{C-z.\sqrt{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}}$$

wird.

Hier-

Hieraus giebt ſich

$$-(N)\frac{t}{\eta}.z.\surd(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})+(N)\frac{t}{\eta}.C=C+z.\surd(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})$$

alſo

$$z=\frac{((N)\frac{t}{\eta}-1).C}{((N)\frac{t}{\eta}+1).\surd(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}$$

Zuſ.

§. 38. Weil $\eta=\frac{\mathfrak{M}}{C.\surd(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}$ gewöhnlich ſchon keine groſſe Zahl iſt, ſo daß ſie ſelten auf 20 ſteigen wird, ſo wird für t = 60 Sek. beinahe in allen Fällen der Ausübung $\frac{t}{\eta}$ ſchon gröſſer als 4 und daher $(N)\frac{t}{\eta}$ ſchon eine bedeutende Zahl, ſo daß für die kurze Zeit von einer Minute der Bruch $\frac{(N)\frac{t}{\eta}-1}{(N)\frac{t}{\eta}+1}$ ſchon beinahe = 1, alſo Z ſchon beinahe $=\frac{C}{\surd(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}=\surd\frac{4gH}{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}$ iſt.

Die·

Dieſes iſt aber die Geſchwindigkeit des Waſſers im Beharrungsſtande (§. 36), dem ſich alſo die Bewegung ſehr ſchnelle nähert.

Aufg. 16.

§. 39. Im Falle (§. 37) die in einer gegebenen Zeit t, vom Anfange der Bewegung an, ausgefloſſene Waſſermenge M zu beſtimmen.

Aufl. 1. Die Waſſertheilchen irgend eines Querſchnittes in der Röhre λ ſollen in dem Zeittheilchen dt vermöge der beſchleunigenden Kraft f den Weg dx durchlaufen, ſo iſt

$$f = \frac{dh}{dx} \quad \text{(Dynam. §. 90*)}$$

Es iſt aber auch (§. 35)

$$f = \frac{H - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) . h}{\mathfrak{M}}$$

alſo

$$\frac{dh}{dx} = \frac{H - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) . h}{\mathfrak{M}}$$

und

$$\frac{dh}{H - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) . h} = \frac{dx}{\mathfrak{M}}$$

oder

$$- \frac{d(H - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) . h)}{H - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) . h} = \frac{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) . dx}{\mathfrak{M}}$$

Dem-

Demnach

$$-\,\text{logn}\,(H - (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).h) = \frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).x}{\mathfrak{M}}$$

und

$$x = -\frac{\mathfrak{M}.\,\text{logn}\,(H-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).h)}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}} + \text{Const.}$$

Nun ſoll für h = o auch x verſchwinden, alſo

$$o = -\frac{\mathfrak{M}.\,\text{logn}\,H}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}} + \text{Const}$$

und daher

$$x = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}\left(\text{logn}\,H - \ln(H-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})h)\right)$$

$$= \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}.\,\text{logn}\left(\frac{H}{H-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).h}\right)$$

2. Aus (§. 37. no. 4) hat man

$$h = \frac{z^2}{4g} = \frac{\left((N)^{\frac{t}{\eta}} - 1\right)^2.C^2}{4g.\left((N)^{\frac{t}{\eta}}+1\right)^2.(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}$$

alſo, H ſtatt $\frac{C^2}{4g}$ geſetzt,

$$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).h = \frac{\left((N)^{\frac{t}{\eta}} - 1\right)^2.H}{\left((N)^{\frac{t}{\eta}}+1\right)^2}$$

und daher (no. 1)

$$x = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}} . \operatorname{logn} \frac{1}{1 - \frac{\left((N)\frac{t}{\eta} - 1\right)^2}{\left((N)\frac{t}{\eta} + 1\right)^2}}$$

$$= \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}} . \operatorname{logn} \frac{\left((N)\frac{t}{\eta} + 1\right)^2}{\left((N)\frac{t}{\eta} + 1\right)^2 - \left((N)\frac{t}{\eta} - 1\right)^2}$$

3. Hieraus giebt ſich die geſuchte Ausflußmenge

$$M = \frac{\mathfrak{M}.w}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}} . \operatorname{logn} \frac{\left((N)\frac{t}{\eta} + 1\right)^2}{\left((N)\frac{t}{\eta} + 1\right)^2 - \left((N)\frac{t}{\eta} - 1\right)^2}$$

Oder

$$M = \frac{\mathfrak{M}.w}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}} . \operatorname{logn} \frac{\left((N)\frac{t}{\eta} + 1\right)^2}{4.(N)\frac{t}{\eta}}$$

$$= \frac{\mathfrak{M}.w}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}} . \left(2 \ln\left((N)\frac{t}{\eta} + 1\right) - \ln 4 - \frac{t}{\eta}\right)$$

wo $\eta = \frac{\mathfrak{M}}{\sqrt{4 g H} (\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}$ iſt (§. 37. no. 3).

Anm. Da man nicht erwarten kann, Reſultate zu finden, die mit der wirklichen Erſcheinung bis auf $\frac{1}{100}$ zuſammen-

ſtim-

ſtimmen, ſo daß z. B. nicht um $\frac{1}{100}$ M in Berechnung der Ausflußmenge gefehlt würde, und da ſelbſt die Umſtände, die man als unveränderlich vorausſetzt (z. B. unveränderliche Waſſerhöhe, unveränderliche Röhrenweite u. d. g.), in der Ausübung nie in ſolcher Schärfe gleich und unveränderlich angeſehen werden können, daß von Augenblick zu Augenblick in aller Schärfe dieſelbe Waſſermenge ausflieſſen könnte, ſo fällt von ſelbſt in die Augen, daß bei allen Röhrenleitungen nach wenigen Minuten der Beharrungsſtand ſchon in der Schärfe erreicht ſeyn wird, in welchem er hier überhaupt eintreten kann. Wird aber das Waſſer mittelſt Maſchinen durch Röhren getrieben, ſo verhält ſich die Sache ganz anders, inſoferne dabei die Bewegung etwa nur eine geringe Anzahl von Sekunden ohnunterbrochen fortdauert und dann immer wieder von neuem angefangen wird, ſo daß die Bewegung dabei immer im beſchleunigten Zuſtande bleibt.

Aufg. 17.

§. 40. **Aus der Waſſerhöhe H, der Länge λ einer durchaus gleich weiten Röhrenleitung und der Waſſermenge M, die in ieder Sekunde abgeleitet werden ſoll, die erfoderliche Weite w oder den zugehörigen Durchmeſſer d zu beſtimmen.**

Aufl. Die Geſchwindigkeit des Waſſers heiſſe c, ſo iſt in Par. Zollen (§. 30) $M = c \,.\, w =$

$$0{,}785 \,.\, d^2 \,.\, \sqrt{\frac{470 \,.\, H}{1 + \frac{0{,}02 \,.\, \lambda}{d}}}$$ und

$$\left(1 + \frac{0{,}02 \,.\, \lambda}{d}\right) . M^2 = 0{,}616 \,.\, d^4 \,.\, 470 \,.\, H$$

 oder

oder

$$M^2 . d + 0{,}0 . \lambda . M^2 = 290 . H . d^5$$

Daher

$$d^5 = \frac{0{,}02 . \lambda . M^2}{290 . H} + \frac{M^2 . d}{290 . H}$$

und

$$d = \sqrt[5]{\left(\frac{0{,}00007 . \lambda M^2}{H} + \frac{M^2}{290 . H} . d\right)}$$

Da nun bei einiger Långe der Rôhrenleitung λ in Zollen ſchon eine betråchtliche Zahl iſt, ſo iſt $\sqrt[5]{\frac{0{,}00007 . \lambda M^2}{H}}$ nicht viel von vorſtehendem Werth verſchieden. Man kann alſo $\delta = \sqrt[5]{\frac{0{,}00007 . \lambda . M^2}{H}}$ ſchon beinahe ſtatt d brauchen, und erhålt nun mit ſoviel grôſſerer Genauigkeit

$$d = \sqrt[5]{\left(\frac{0{,}00007 . \lambda . M^2}{H} + \frac{\delta M^2}{290 . H}\right)}$$

wobei die Logarithmen bequem zu gebrauchen ſind.

In der Ausûbung thut man wohl, wenn man den ſo berechneten Durchmeſſer um $\frac{1}{5}$ grôſſer nimmt.

Anm. Hier kann ich mich in weitere den Gegenſtand dieſes Kap. betreffende Unterſuchungen nicht einlaſſen. Ich bemerke nur noch, daß ich zwar die Dûbûatſchen Verſuche im Vorſtehenden zum Grunde gelegt habe, ûbrigens aber meinen eigenen Weg gegangen bin, um mit den ſonſt ſchon erwieſenen Geſetzen der Bewegung in beſtåndigem Zuſammenhange zu bleiben. Auſſerdem verdienen hier vorzûglich die neueren ſehr lehrreiche und mit groſſer Sorgfalt angeſtellte Verſuche gerûhmt zu werden, womit Hr. Eytelwein in dem unten angezeigten Handbuche zur Erweiterung

rung hierher gehöriger Kenntniſſe die Experimental-Hydraulik bereichert hat.

Hierher gehörige Schriften.

: Karſten Lehrbegr. der geſamt. Mathem. V Th.

Käſtner Anfangsgr. der Hydrodynamik (2te Ausg. Gött. 1797)

Boſſût Lehrbegr. der Hydrodyn. Frankf. a. M. 1792.

Venturi Recherches experimentales ſur le principe de la communication laterale du mouvement dans les fluides — ins Teutſche überſetzt in Hrn. Gilberts Annalen der Phyſ. im 2ten u. 3ten B. Halle 1799.

Principes d'Hydraulique verifiés par un grand nombre d'Experiences faites par ordre du Gouvernement. Par M. le Chevalier du Buat T. I et II. Paris 1786. — Der beſonders hierher gehörige 1te Band iſt doppelt ins Teutſche überſetzt worden, von Hrn. Kosmann mit Anmerk. und Zuſätzen von Hrn. Eytelwein, und auſſerdem von Hrn. Lempe gleichfalls mit Zuſätzen.

Langsdorf Lehrb. der Hydraulik Altenb. 1794.

Deſſ. Handb. der Maſchinenlehre 1 B. Altenb. 1797. 2 B. Altenb. 1799.

Eytelwein Handb. der Mechanik feſter Körper u. der Hydraulik Berlin 1801.

Leupold Theatrum Machinarum Hydrotechnicarum. Leipz. 1724.

Belidor Architectura Hydraulica I Th. 4 Buch.

M. Vitruvius Pollio Baukunſt, aus der röm. Urſchrift überſetzt von Rode 2 Bd. Leipz. 1796.

Fünftes Kapitel.
Von natürlichen Springwerken.

Erfahrung.

§. 41. Waſſer, das aus einem Behältniß W (fig. 23) mittelſt Röhren bis zu einer Ausflußöffnung β geleitet wird, die dem ausſtröhmenden Waſſer eine lothrechte Richtung giebt, ſteigt vermöge der Geſchwindigkeit, mit der es durch β ſtröhmt, unter ſonſt gleichen Umſtänden am höchſten, wenn man

$$\delta = \frac{\sqrt{(2\sqrt{H'})}}{12}$$

macht, wo δ den Durchmeſſer der Oeffnung β und H die ganze Fallhöhe $n\beta$ bedeutet, beide in Pariſer Zollen.

Inzwiſchen bleibt auch bei dieſer Gröſſe der Sprungöffnung die Strahlhöhe βo allemal kleiner als die Fallhöhe βn, und es wird unter ſonſt gleichen Umſtänden $\beta n - \beta o$ deſto kleiner, ie enger die Röhrenleitung iſt.

Nur wenn ſie ſoweit iſt, daß die Widerſtandshöhe wegen der Röhrenwände einen unbedeutenden Theil der ganzen Fallhöhe βn beträgt, findet man bei der vortheilhafteſten Gröſſe von β, wenn dieſe Sprungöffnung in einer dünnen Platte angebracht iſt, mit Mariotte für die Fallhöhe von 61 Zollen eine Strahlhöhe von 60 Zollen.

Und nur unter dieſen Einſchränkungen gilt das allgemeine Reſultat der Mariottiſchen Verſuche, wonach

nach überhaupt zu einer Strahlhöhe von $n.5$ Fußen eine Fallhöhe von $(n.5 + n^2.\frac{1}{12})$ Fußen gehört.

Zuſ. 1.

§. 42. Setzt man alſo in Fußen die Strahlhöhe $= h$, die Fallhöhe $= H$, ſo iſt, wenn $h = n.5$ Fuße iſt, $n = \frac{h}{5}$ und nun unter den Einſchränkungen des vor. §.

$$H = h + n^2.\frac{1}{12} = h + \frac{h^2}{25}.\frac{1}{12}$$

$$= h + \frac{h^2}{300}$$

woraus ſich zugleich

$$h = -150 + \surd(300.H + 22500)$$

ergiebt.

Zuſ. 2.

§. 43. Iſt die Widerſtandshöhe nicht unbedeutend, ſo muß beſondere Rückſicht darauf genommen und für H eine gehörig verminderte Höhe in die Formel geſetzt werden.

Man hat nämlich für das Waſſer in einem Röhrenſtück, deſſen Weite w iſt, die Geſchwindigkeitshöhe

$$\frac{H}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}} \quad (\S.\ 36)$$

Bezeichnet man alſo den Querſchnitt des ausſtröhmenden Strahls mit Φ, ſo iſt

Geſchwindigkeitshöhe des ausſtröhmenden Strahls $= \frac{\frac{w^2}{\Phi^2} . H}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}$

wenn 𝔄 und 𝔅 nach (§. 35) für die Röhrenweite w berechnet werden. Man erhält daher allgemein für alle Fälle, wenn nur β nach (§. 41) genommen wird,

$$h = -150 + \sqrt{\left(\frac{300 . H}{\frac{\Phi^2}{w^2} . (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})} + 22500\right)}$$

Nach den obigen Lehren iſt für eine gleich weite Röhrenleitung

$$\mathfrak{A} = \frac{0,03 . \lambda}{d}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{w^2}{\gamma^2 \alpha^2} - \frac{w^2}{W^2} + \left(\frac{w^2}{\gamma^2 \beta^2} - 1\right)$$

ſo daß

- λ die Länge der Röhrenleitung
- w die Weite der Röhrenleitung
- d ihren Durchmeſſer
- α die Einflußöffnung, die auch eine Oeffnung in einer vorgelegten Platte, alſo $< \alpha$ ſeyn könnte.
- W die Weite des Behältniſſes
- β die Weite der Sprungöffnung oder der Sprungröhre

bedeutet.

Iſt β die Ausmündung eines Sprungrohres, ſo hat man

$$\gamma\beta = 0,81 . \beta$$

Für

Für eine dünne Platte iſt $\gamma\beta = 0,62 . \beta$. Auch iſt im erſten Falle $\Phi = \beta$, im letzteren $\Phi = 0,62 . \beta$.

Faſt immer iſt $\alpha = w$ und $\frac{w^2}{W^2}$ für Null zu achten und daher

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \frac{0,03 . \lambda}{d} + \frac{1}{0,81^2} + \frac{w^2}{\gamma^2 \beta^2} - 1$$

oder, weil $\frac{1}{0,81^2} - 1$ hier auſſer Acht gelaſſen werden kann,

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \frac{0,03 . \lambda}{d} + \frac{w^2}{\gamma^2 \beta^2}$$

Alſo

$$h = -150 + \sqrt{\left(\frac{300 . H}{\frac{\Phi^2}{w^2} . \left(\frac{0,03 . \lambda}{d} + \frac{w^2}{\gamma^2 \beta^2}\right)} + 22500\right)}$$

Dabei wird doch noch erfodert, daß die Röhrenleitung zu unterſt durch allmälige Krümmung die Richtung des Waſſers in die lothrechte verwandle, und daß überdas die wagrechten Querſchnitte des Waſſers unterhalb β in dem letzten Röhrenſtück ſehr vielmal gröſſer ſeyen, als die Oeffnung β, damit die Geſchwindigkeit des Waſſers nirgends durch ſchnelles Anſtoſſen geſchwächt werde.

Jemehr alſo dafür geſorgt wird, daß $\frac{0{,}03 \cdot \lambda \cdot \gamma^2 \beta^2}{w^2 d}$ keine groſſe Zahl werde, deſto höher muß der Strahl ſteigen.

Wäre aber auch β gröſſer genommen worden als nach (§ 41), ſo wäre die davon herrührende Verminderung der Strahlhöhe doch nicht ſehr bedeutend.

Uebrigens wird die Strahlhöhe um etwas vergröſſert, wenn man ſeine Richtung ein wenig von der lothrechten ablenkt.

Anm. Die vorſtehende Formel paßt auf alle Springwerke, die Sprungöffnung mag Oeffnung in einer dünnen Platte oder Ausmündung einer Röhre ſeyn; nur iſt in ihr im erſten Falle $\gamma = 0{,}63$, im andern $\gamma = 0{,}81$.

Eigentlich wäre aber

$$h = -150 + \sqrt{\left(\frac{300 \cdot H}{\frac{\Phi^2}{w^2} \cdot \left(\frac{0{,}03 \cdot \lambda}{d} + \frac{w^2}{\gamma^2 \beta^2} + \frac{1}{0{,}81^2} - 1\right)} + 22500\right)}$$

und iene Gleichung findet nur ſtatt, wenn $\frac{1}{\gamma^2} - 1$ in Vergleichung mit den beiden andern Gliedern weggelaſſen werden darf.

Es ſey aber z. B. $\frac{0{,}03 \cdot \lambda}{d}$ für Null zu achten, ſo hätte man

1. für den Sprung durch eine dünne Platte, wo $0{,}62 \cdot$ für γ und $0{,}62 \cdot \beta$ für Φ geſetzt wird

$h =$

$$h = -150 + \sqrt{\left(\frac{300.H}{\frac{0,62^2.\beta^2}{w^2}\left(\frac{w^2}{0,62^2.\beta^2} + \frac{1}{0,81^2} - 1\right)} + 22500\right)}$$

$$= -150 + \sqrt{\left(\frac{300.H}{1 + \frac{0,62^2.\beta^2}{0,81^2.w^2} - \frac{0,62^2\beta^2}{w^2}} + 22500\right)}$$

oder, wenn $\frac{\beta}{w}$ ſehr klein iſt,

$$h = -150 + \sqrt{(300.H + 22500)}$$

wie (§. 42).

II. Für den Sprung durch eine Röhre, wo 0,81 für γ und β für Φ geſetzt wird,

$$h = -150 + \sqrt{\left(\frac{300.H}{\frac{\beta^2}{w^2}\left(\frac{w^2}{0,81^2.\beta^2} + \frac{1}{0,81^2} - 1\right)} + 22500\right)}$$

$$= -150 + \sqrt{\left(\frac{300.H}{\frac{1}{0,81^2} + \frac{\beta^2}{w^2} - \frac{0,81^2.\beta^2}{w^2}} + 22500\right)}$$

oder, wenn $\frac{\beta}{w}$ ſehr klein iſt,

$$h = -150 + \sqrt{(0,81^2.300.H + 22500)}$$

Hier-

Hierher gehörige Schriften.

Mariotte, Grundlehren der Hydroſtatik und Hydraulik, aus dem Franzöſ. von Meinig, Leipz. 1723.

Boſſût, angef. Lehrbegr. der Hydrod.

Dûbûat, angef. Grundl. der Hydraul. in der Ueberſ. von Eytelwein.

Eytelwein, angef. Handbuch der Mechanik ꝛc.

Langsdorf, angef. Lehrb. der Hydraul.

Sechstes Kapitel.

Vom Stoſſe des Waſſers und der Luft.

Erklärung 3.

§. 44. Waſſer kann auf verſchiedene Weiſe benutzt werden, durch ſeinen Stoß auf eine Fläche als bewegende Kraft zu wirken

I. als iſolirter Strahl, indem der Strahl, bevor er die Stoßfläche erreicht, ringsum bloß von der Luft begrenzt wird.

II. als begrenztes Waſſer, wenn es in einem Gerinne gegen eine Fläche geleitet wird, die ihm den freien Abfluß ganz oder größtentheils verſperrt.

III. als unbegrenztes Waſſer, wenn es in einem Bette gegen eine Fläche geleitet wird, die vielmal kleiner als der Querſchnitt des fortſtröhmenden Waſſers iſt.

Wenn übrigens von der Richtung des ſtröhmenden Waſſers oder von der Richtung ſeiner Bewegung die

die Rede iſt, ſo wird darunter allemal diejenige Richtung verſtanden, welche der Bewegung des Waſſers ohne Bezug auf die erſt durch die Stoßfläche verurſachte Ablenkung zukommt.

Erklärung 4.

§. 45. Waſſerſtoß, Gröſſe des Waſſerſtoſſes, Wirkung des Waſſerſtoſſes auf eine Ebene ſind hier gleichgeltende Ausdrücke. Sie bezeichnen die Gröſſe einer bewegenden Kraft oder eines Drucks Q, die oder der auf die Stoßebene (welche hier mit dem ſtröhmenden Waſſer allemal nur in einer Durchſchnittsebene vorgeſtellt wird) AB (fig. 17, 18) angebracht, mit der entgegengeſetzten Wirkung des Waſſers auf dieſe Stoßebene im Gleichgewicht wäre. Ich werde die Wirkung nach ſenkrechter Richtung genommen in der Folge auch den Normalſtoß nennen. Wirkung des Stoſſes auf die Ebene nach der Richtung des Strahls ſoll Parallelſtoß; Wirkung nach einer Linie, die auf die Richtung des Strahls ſenkrecht iſt, Seitenſtoß heiſſen. Der Stoß heißt ſenkrecht oder ſchief, nachdem die Richtung mn des ſtröhmenden Waſſers (§. 44) mit der Stoßebene einen rechten Winkel macht wie fig. 17, oder einen ſchiefen wie fig. 18.

Für den ſenkrechten Stoß iſt allemal Normalſtoß und Parallelſtoß einerlei, und der Seitenſtoß wird da Null.

Der Stoß auf eine ſchon in Bewegung geſetzte Ebene heißt auch insbeſondere ein relativer Stoß.

I. Senk-

I. Senkrechter Stoß des iſolirten Strahls.

Aufg. 18.

§. 46. Die Ebene MN (fig. 19) empfange von dem aus dem Behåltniß V ſtrôhmenden iſolirten Strahl einen ſenkrechten Stoß; die Stoßebene ſoll nach der Richtung des Strahls qr mit einer Geſchwindigkeit = c ausweichen; die Geſchwindigkeit des frei ausſtrôhmenden Waſſers bei de ſey = C, in irgend einem unbeſtimmten Querſchnitte op ſey ſie wegen der entgegengeſetzten Ebene MN nur noch = z, man ſoll den Erfolg, insbeſondere die Grôſſe des Waſſerſtoſſes, beſtimmen.

Aufl. 1. Wenn die Entfernung der Stoßebene von der Oeffnung, wie ich vorausſetze, wenigſtens nur einigemal grôſſer als der Durchmeſſer der Oeffnung iſt, ſo låuft bei entgegengeſetzter Ebene vermôge der Erfahrung in einer beſtimmten Zeit ebenſoviel Waſſer aus dem Behåltniß, als wenn die Ebene ganz weggenommen wird, ohne daß der Strahl ſogleich bei de merklich aufſchwillt. Es behålt alſo das ausflieſſende Waſſer die Geſchwindigkeit C bis zu einem gewiſſen Querſchnitte mn ohne merkliche Verminderung, und bis zu dieſem Querſchnitte ůben daher auch die Waſſertheilchen noch keinen merklichen Druck aus. Allemal aber liegt mn nahe an dem Anfang des Strahls.

2. Ueber mn hinaus fangen die Waſſerſchichten an, ſich langſamer zu bewegen, die vorausgehenden werden von den ſchneller nachfolgenden gedruckt, und die vorangehenden můſſen ſich immer mehr ausbreiten. Die Geſchwindigkeit, mit der die an der Ebene ankom-

kommenden Theilchen ſich weiter nach qr fortbewegen, muß mit der Geſchwindigkeit der Ebene ſelbſt einerlei ſeyn, iſt alſo = c; von der Ebene rückwärts nach mn müſſen die Geſchwindigkeiten der Waſſertheilchen in den nach einander folgenden Schichten allmälig zunehmen, bis man in mn kommt, wo die Geſchwindigkeit = C iſt.

3. So entſteht alſo hier eigentlich nicht Stoß, ſondern Druck; ieder Querſchnitt druckt auf den nächſtanliegenden, und ein unbeſtimmter Querſchnitt wie op leidet die Summe aller Preſſungen von mn bis op.

4. Die Verzögerung der Geſchwindigkeit von mn bis MN rührt von dem Widerſtande MN oder von der Kraft her, welche angewendet werden muß, um dieſen Widerſtand zu überwinden. Man hat alſo die Bewegung ſo zu betrachten, als wenn in iedem Querſchnitte wie op eine verzögernde oder eine der Bewegung entgegengeſetzte beſchleunigende Kraft in die Waſſertheilchen wirkte, die von m, n aus vermöge der Trägheit mit ihrer urſprünglichen Geſchwindigkeit C ſich fortzubewegen ſtreben.

5. Die Waſſermenge, welche den Raum mnpo ausfüllt, zwiſchen mn und einem unbeſtimmten Querſchnitte op, heiſſe M, ſo wird allemal eine gewiſſe Zeit t erfodert, bis die ganze Waſſermenge M aus dieſem Raum mnpo ab- und ebenſoviel wieder zufließt, um denſelben Raum im Beharrungsſtande beſtändig mit Waſſer angefüllt zu erhalten.

Iſt nun die Geſchwindigkeit der Waſſertheilchen im Querſchnitte op = z, die Summe der Preſſungen von mn bis op = p, ſo würden ſich in der Zeit t + dt die Gröſſen M, p und z in M + dM,

p +

$p + dp$, $z - dz$ verwandlen, d. i. es gehören zu dt die Differentialien dM, dp und $- dz$.

6. Bezeichnet nun f die beſchleunigende Kraft, welche den Waſſertheilchen in ihrer von mn aus vermöge der Trägheit fortgeſetzten Bewegung entgegenwirkt, ſo hat man wie (§. 37. no. 2) hier

$$f : 1 = - dz : 2gdt$$

7. Des Elements dM bewegende Kraft dp iſt $f . dM$, alſo aus (no. 6)

$$dp = - \frac{dz}{2gdt} . dM = - \frac{dz}{2g} . \frac{dM}{dt}$$

8. Weil der Beharrungsſtand vorausgeſetzt wird, ſo fließt in demſelben Verhältniſſe mehr Waſſer hinzu, in welchem er länger dauert, oder der Zufluß iſt der Zeit proportional, alſo

$$dM : dt = M : t$$

und daher (no. 7)

$$dp = - \frac{dz}{2g} . \frac{M}{t}$$

9. Die in einer Sekunde beifließende Waſſermenge heiſſe A, ſo iſt

$$\frac{M}{t} = A$$

alſo

$$dp = - \frac{dz}{2g} . A$$

und

$$p = \text{Const} - \frac{A}{2g} . z$$

Für

Für $z = C$ iſt $p = 0$ (no. 1), alſo

$$\text{Conſt} = \frac{A}{2g} . C$$

und nun

$$p = (C - z) . \frac{A}{2g}$$

10. Nimmt man den unbeſtimmten Querſchnitt op an der Ebene MN, ſo verwandelt ſich z in c, und es wird alſo für die Summe aller Preſſungen von mn bis an die Ebene MN

$$\text{I.} \quad p = \frac{A}{2g} . (C - c)$$

11. Der natürliche Querſchnitt bei mn ſey $= w$, die zu C gehörige Höhe $= H$, die zu c gehörige $= h$, ſo hat man

$$\text{II.} \quad p = \frac{C . w}{2g} . (C - c)$$

und

$$\text{III.} \quad p = \frac{2(\sqrt{gH}) . w}{2g} . (2\sqrt{gH} - 2\sqrt{gh})$$
$$= 2 . (H - \sqrt{Hh}) . w$$

Zuſ. 1.

§. 47. Es ergiebt ſich hieraus für $h = 0$, d. i. für eine unbewegliche Stoßebene

$$p = 2 . Hw$$

Dazu würde aber erfodert, daß in dieſem Falle die Geſchwindigkeit der Waſſertheilchen nach qr bis zur Ebene MN allmälig bis auf Null abnähme, daß

 ſich

ſich alſo der Strahl ſelbſt bei MN über eine unendliche Ebene verbreitete.

Daß aber dieſe unendliche Verbreitung aus ſehr vielen Urſachen nicht wirklich erfolgen könne, fällt von ſelbſt in die Augen.

Inzwiſchen erfolgt auf einer hinlänglichen Ebene eine beträchtliche Verbreitung des Strahls, und die Hinderniſſe, welche die gröſſere Verbreitung verhindern, muß doch durch die Preſſungen der nach einander folgenden Waſſerſchichten überwunden werden, ſo daß die hierauf verwendeten Preſſungen zugleich auf die Stoßfläche wirken müſſen.

Wäre z. B. der verbreitete Querſchnitt ſehr nahe an MN = 12.w, alſo an dieſer Stelle das z (§. 46) $= \frac{1}{12}C$, ſo wäre nach der Formel (vor. §. no. 9)

$$p = (C - \frac{1}{12}C) . \frac{A}{2g} = \frac{11}{12} . \frac{A}{2g},$$

oder

$$p = \frac{11}{12} . 2Hw$$

Erwägt man nun, daß die fernere Verbreitung auf der Ebene ſelbſt mit Widerſtand verbunden iſt, den die Waſſertheilchen beim Abgleiten über die Ebene überwinden müſſen, ſo kann die Ueberwindung dieſes Widerſtandes dieſelbe Kraft erſchöpfen, welche ſonſten noch zur gröſſeren Verbreitung verwendet werden müßte; und da die hierauf verwendeten Preſſungen auf die Ebene ſelbſt mitwirken müſſen, ſo kann auch bei einer ſo eingeſchränkten Verbreitung des Strahls der

Waſſer-

Waſſerſtoß $p = 2 H . w$ dennoch genau genug erreicht werden.

Anm. Die von mir angeſtellten und im Lehrbuche der Hydraulik umſtändlich erzählten Verſuche beſtättigen die Uebereinſtimmung des Satzes $p = 2 . Hw$ für den ſenkrechten Stoß auf eine ruhige Ebene mit der Erfahrung aufs vollkommenſte, wenn die Ebene auch nur etwa 10mal ſo groß als w wäre.

Umſoweniger iſt die Uebereinſtimmung der allgemeineren Formel

$$p = 2w (H - \sqrt{Hh})$$

für bewegte Ebenen zu bezweifeln. Wäre z. B. $c = \frac{1}{3} C$, ſo würde, alle ſonſtige Hinderniſſe für die Bewegung des Waſſers bei Seite geſetzt, der Querſchnitt des Waſſers bei MN dreimal ſo groß als w ſeyn müſſen, eine Verbreitung, die ſehr wohl eintreten kann.

Zuſ. 2.

§. 48. Indem ſich die Ebene MN zu bewegen anfängt, ſey ihre Entfernung von mn = a, ſo läßt ſich das Waſſer von MN bis mn rückwärts als von der Kraft f beſchleunigt anſehen, wie ein durch a fallender Körper, der bei MN ſchon die Geſchw. c hätte und in den die beſchl. Kraft f wirkte.

Man hat ihn alſo in MN ſo zu betrachten, als wenn er ſchon den Raum $\frac{c^2}{4fg}$ durchloffen hätte, und in mn wird ſeine Geſchw. $C = 2\sqrt{fg . (a + \frac{c^2}{4fg})}$.

Es durchlauft aber die Ebene MN in der Zeit t den Raum $t . c$, ſo daß nach dieſer Zeit ihr Abſtand

 von

von mn $= a + t.c$ iſt; demnach erhält man nach der Zeit t

$$C = 2\sqrt{fg.\left(a + t.c + \frac{c^2}{4fg}\right)}$$

$$= 2\sqrt{\left((a + t.c).fg + \tfrac{1}{4}c^2\right)}$$

und

$$C^2 = 4\,(a + t.c).fg + c^2$$

Alſo

$$f = \frac{C^2 - c^2}{4.(a + tc)g}$$

W ſey nach Verfluß der Zeit t ein Querſchnitt zwiſchen MN und mn in der Entfernung x von MN und die Geſchw. des Waſſers in dieſem Querſchnitt $= z$, ſo iſt

$$A = z.W = W.2\sqrt{fg\left(x + \frac{c^2}{4fg}\right)}$$

$$= 2W.\sqrt{\left(\frac{C^2 - c^2}{4g\,(a + tc)}\,gx + \tfrac{1}{4}c^2\right)}$$

Die Entfernung des Querſchnittes W von mn ſey $= u$, ſo iſt

$$u + x = a + t.c$$

alſo

$$x = a + t.c - u$$

und

$$A = 2W.\sqrt{\left(\frac{C^2 - c^2}{4(a + tc)}.(a + tc - u) + \tfrac{1}{4}c^2\right)}$$

$$= 2W.\sqrt{\left(\frac{C^2 - c^2}{4} - \frac{(C^2 - c^2).u}{4.(a + tc)} + \tfrac{1}{4}c^2\right)}$$

$$= W.\sqrt{\left(C^2 - \frac{(C^2 - c^2).u}{a + t.c}\right)}$$

Dem.

Demnach

$$W = \frac{A}{\surd\left(C^2 - \frac{(C^2 - c^2).u}{a + t.c}\right)}$$

Auch hat man

$$z = \frac{A}{W} = \surd\left(C^2 - \frac{(C^2 - c^2).u}{a + t.c}\right)$$

eine Gleichung für die Geſchwindigkeit z in der Entfernung u von mn nach Verfluß der Zeit t.

Anm. Die wegen der Schwere mit dem Fortſtröhmen des Strahls verbundene Aenderung ſeiner Richtung wird hier bei Seite geſetzt.

Zuſ. 3.

§. 49. Alſo kommt mit dem Fortrücken der Stoßebene die Geſchwindigkeit des Waſſers in beſtimmten Entfernungen vom Anfange des Strahls (von mn) dem Werth von C immer näher, weil der Werth von $\frac{(C^2 - c^2).u}{a + t.c}$ mit der Vergröſſerung von t, d. h. mit der längeren Dauer der Bewegung immer kleiner wird.

Ebendarum muß aber auch die Preſſung in beſtimmten Querſchnitten bei dem Fortrücken der Stoßebene immer kleiner werden, denn ſie iſt (§. 46)

$$p = (C - z).\frac{A}{2g}$$

ein Werth, der mit der Vergröſſerung von z abnimmt.

Um ebenſoviel aber die Summe der Preſſungen von mn bis zu einem Querſchnitt W in der Entfernung u von mn abnimmt, um ebenſoviel muß die Summe der Preſſungen von W bis zur Stoßebene zu gleicher Zeit zunehmen. Nämlich letztere iſt

$$(z-c)\cdot\frac{A}{2g}$$

und beider vereinte Summe bleibt allemal =

$$(C-c)\cdot\frac{A}{2g}.$$

Zuſ. 4.

§. 50. Würde, ſtatt der Stoßebene MN in q, plötzlich eine andere in op angebracht, wo die Geſchwindigkeit z wäre, ſo litte ſolche in dieſem Augenblick den Druck $p=(C-z)\cdot\frac{A}{2g}$, und ein Theil des Drucks $=(z-c)\cdot\frac{A}{2g}$ gienge für dieſen Augenblick verlohren. Der Werth von z gäbe ſich aus (§. 48), der dann deſto kleiner würde, oder dem von c deſto näher käme, je gröſſer u, d. i. je kleiner der Abſtand qs in Vergleichung mit der ganzen Länge des Strahls wäre.

II. Schiefer Stoß des iſolirten Strahls.

Aufg. 19.

§. 51. AB (fig. 20) ſtelle eine Ebene vor, ab einen Waſſerſtrahl, der ſie unter dem ſchiefen

Win-

Winkel Bba = α trifft, AC ſey eine andere Ebene, welche der Strahl ab verlängert unter einem rechten Winkel in k treffen würde, ſo daß die Gröſſe dieſes ſenkrechten Stoſſes, wenn der Strahl unmittelbar in k anſtoſſen könnte, = 𝔓 ſeyn würde.

Die Gröſſe des Normalſtoſſes auf AB heiſſe N, die des Parallelſtoſſes P, die des Seitenſtoſſes S: man ſoll die Verhältniſſe N : 𝔓, P : 𝔓 und S : 𝔓 beſtimmen.

Aufl. Man drucke 𝔓 durch die Linie bd aus, fälle aus d auf AB das Perpendikel de und verzeichne das Parallelogramm debc, ſo iſt (Dyn. §. 49)

$$N = \mathfrak{P} . \sin \alpha$$
$$P = \mathfrak{P} . \sin \alpha^2$$
$$S = \mathfrak{P} . \sin \alpha . \cos \alpha$$

Anm. Dieſe Werthe hängen ſo zuſammen, daß einer den andern zur Folge hat. Es iſt aber der $P = \mathfrak{P} . \sin \alpha^2$ durch Verſuche, die ich im Lehrb. der Hydraul. umſtändlich erzählt habe, vollkommen beſtättiget worden; man kann alſo die vorſtehenden Ausdrücke mit vollem Vertrauen auf ihre Uebereinſtimmung mit der Erfahrung beibehalten.

III. Senkrechter Stoß des begrenzten Waſſers (§. 44. II.)

Aufg. 20.

§. 52. Es ſey alles wie (Aufg. §. 46), nur daß iezt das Waſſer in einem Schußgerinne fortſtröh-

ſtröhme und in dieſem Schußgerinne eine Stoßebene dem ſtröhmenden Waſſer entgegen geſetzt ſey, die an Boden und Wände, ohne Reibung zur verurſachen, genau anſchlieſſe, auch hoch genug ſey, damit ſich das Waſſer nach oben verbreiten könne: man ſoll, wie dort, den Erfolg, insbeſondere die Gröſſe des Stoſſes beſtimmen (fig. 21).

Aufl. 1. Es giebt hier einen gewiſſen Querſchnitt mn, bis zu welchem das beiſtröhmende Waſſer von oben herab beſchleunigt wird. Bis zu dieſem Querſchnitt kann kein gegenſeitiger Druck der Waſſerſchichten ſtatt finden, weil die vorausgehenden Waſſertheilchen bis zu dieſem Querſchnitt ſich ſchneller bewegen als die ihnen nachfolgenden, alſo dieſe auf iene nicht wirken können. Die Geſchwindigkeit, welche von oben herab bis zur Schichte mn erzeugt wird, dient alſo nur, die aus mn nach MN fortſtröhmenden Waſſertheilchen in iedem Augenblick wieder zu erſetzen.

2. Was nun von dem Waſſer zwiſchen mn und MN (§. 46) geſagt worden, gilt auch hier, inſoferne neue Hinderniſſe, die im ietzigen Falle hinzukommen mögen, bei Seite geſetzt werden. Ohne Rückſicht auf dieſe hat man alſo auch hier

$$\text{I.}\quad p = \frac{A}{2g}.(C-c)$$

$$\text{II.}\quad p = \frac{C.w}{2g}.(C-c)$$

$$\text{III.}\quad p = 2(H-\sqrt{Hh}).w$$

für die Gröſſe des Stoſſes in MN.

3. Nun

3. Nun kommt hier insbeſondere in Betrachtung, daß durch die Ausbreitung die Waſſermaſſe genöthiget wird, an der Ebene MN hinaufzuſteigen. Wenn daher c in Vergleichung mit C ziemlich klein, z. B. c $= \frac{1}{6}$ C oder auch $= \frac{1}{5}$ C wäre, ſo daß das Waſſer bei MN 6- oder 5 mal ſo hoch als bei mn ſtehen ſollte, ſo wäre die erfoderliche Ausbreitung bei MN nicht zu erwarten und der Stoß würde geringer ausfallen, als ihn die Formeln ergeben. Dieſes wird umſoviel mehr der Fall ſeyn, wenn (die Höhe mn $= \mathfrak{h}$ geſetzt) $\frac{H}{\mathfrak{h}}$ nicht wenigſtens ein paarmal ſo groß als $\frac{C}{c}$, oder $\frac{H^2}{\mathfrak{h}^2}$ nicht wenigſtens 4 mal ſo groß als $\frac{H}{h}$ iſt.

Auſſerdem leidet das Waſſer ſelbſt beim Fortflieſen im Gerinne von mn bis MN, auch ohne Rückſicht auf die entgegengeſetzte Ebene MN einige Hinderniſſe der Bewegung, wodurch p geſchwächt wird.

Man muß daher in der Ausübung für H in den vorſtehenden Formeln allemal eine Höhe ſetzen, die kleiner als die wirkliche Waſſerhöhe de des Waſſerſpiegels über der Mitte von mn iſt.

Die Höhe, welche der Geſchwindigkeit zugehört, womit das Waſſer bei B ins Gerinne trit, heiſſe k; das ganze Gefälle des Gerinnbodens, um wieviel er nämlich bei B höher liegt als bei M, heiſſe a; der Winkel, welchen eine durch B und M gelegte ſchiefe Ebene mit der lothrechten Bb macht, ſey $= \alpha$, ſo hat man bei der groſſen Schwierigkeit oder Unmöglich-

keit einer genauen Berechnung doch für die gewöhnlichen Fälle der Ausübung eine beiläufige Beſtimmung für den Werth von H, den man ſtatt der ganzen Waſſerhöhe (k + a) ſetzen darf, nämlich

$$k - a . \left(\frac{1 - \operatorname{Cos} \left(\frac{1}{14} \alpha + 78^\circ \right)}{\operatorname{Cos} 84^\circ} \right)$$

Zuſ.

§. 53. Die Sätze §. 48 — 50 laſſen ſich auch hier anwenden.

IV. Schiefer Stoß des begrenzten Waſſers (§. 44. II.)

Aufg. 21.

§. 54. Es ſey alles wie in der Aufgabe (§. 52), nur ſey die Ebene ſchief unter dem Winkel α dem ſtröhmenden Waſſer entgegengeſetzt: man ſoll die Gröſſe des ſchiefen Stoſſes beſtimmen.

Aufl. Vermöge (Dyn. §. 49. no. 2) iſt (hier §. 51)

$$P = \mathfrak{P}$$

alſo

$$N = \frac{P}{\sin \alpha} = \frac{\mathfrak{P}}{\sin \alpha}$$

und

$$S = N . \operatorname{Cos} \alpha = \mathfrak{P} . \operatorname{Cot} \alpha$$

V. Senk.

V. Senkrechter und ſchiefer Stoß des unbegrenzten Waſſers (§. 44. III.)

Aufg. 22.

§. 55. Den ſenkrechten Stoß des unbegrenzten Waſſers (fig. 22) gegen die Ebene MN zu beſtimmen, wenn die Ebene ganz untergetaugt iſt.

Aufl. Der Stoß kann hier nur einen aliquoten Theil von dem nach (§. 52) berechneten Stoſſe betragen, wenn man dabei den Querſchnitt mn, wo die Preſſungen gegen die Stoßebene anfangen, = MN ſetzen will, weil mn allemal nur ein aliquoter Theil von MN ſeyn kann. Da aber hier die Gröſſe des Querſchnittes mn, deſſen Theilchen auf MN wirken oder ihre Preſſungen bis MN fortpflanzen, unbekannt iſt, ſo iſt man genöthiget, bis ietzt bei der Beſtimmung ienes aliquoten Theils die Erfahrung zu Rathe zu ziehen. Bis dieſe nähere Beſtimmungen giebt, kann man, wenn der ganze Waſſerquerſchnitt von r bis s = 𝔚 und die Gröſſe der Ebene MN = W geſetzt wird, die Beſtimmung

$$\mathfrak{P} = P = N = \left(1 + \frac{W^2}{\mathfrak{W}^2}\right) . (H - \sqrt{Hh}) . W$$

hier beibehalten, wo H und h die Höhen ſind, welche der Geſchwindigkeit des ſtröhmenden Waſſers und der Geſchw. der Ebene zugehören. Eigentlich lehrt die Erfahrung dieſe Formel nur für h = 0. (ſ. unten die Maſchinenlehre §. 109. Anm.)

Aufg.

Aufg. 23.

§ 56. Den ſchiefen Stoß des unbegrenzten Waſſers gegen eine Stoßebene NO (fig. 22) zu beſtimmen.

Aufl. MN ſey die Ebene, welche den ſenkrechten Stoß = 𝔓 aufnehmen würde, wenn die NO nicht im Wege wäre.

Könnten die Waſſerfäden wie bei dem iſolirten Strahl längſt ON frei abgleiten, ſo hätte man wie (§. 51), wenn der Werth von 𝔓 aus (§. 55) genommen wird

$$\text{I.}\quad \begin{cases} N = \mathfrak{P} \,.\, \sin\alpha \\ P = \mathfrak{P} \,.\, \sin\alpha^2 \\ S = \mathfrak{P} \,.\, \sin\alpha \,.\, \operatorname{Cos}\alpha \end{cases}$$

Aber das Waſſer, welches hier den Strahl begrenzt oder ihn umgiebt, vertrit zum Theil die Stelle eines Gerinnes. Könnte man dieſerhalben den Stoß wie §. 54. betrachten, ſo hätte man

$$\text{II.}\quad \left.\begin{cases} P = \mathfrak{P} \\ N = \dfrac{\mathfrak{P}}{\sin\alpha} \\ S = \mathfrak{P} \,.\, \operatorname{Cot}\alpha \end{cases}\right\}$$ wo nur 𝔓 wiederum aus (§. 55) genommen werden muß.

Weder I noch II wäre der Natur der Sache ganz angemeſſen.

I gäbe $P = \mathfrak{P} \,.\, \sin\alpha^2$ zu klein,
II . . . $P = \mathfrak{P}$ zu groß.

Der

Der wahre Werth von P muß zwiſchen I und II liegen.

In der That kommt man, ſolange α nicht unter 10° fällt, der Erfahrung gemäß, der Wahrheit immer ſehr nahe, wenn man für P das Mittel zwiſchen

$$(1-\sin\alpha).\mathfrak{P} \text{ und } (1+\sin\alpha).\mathfrak{P}.\sin\alpha^2$$

nimmt, alſo

$$\text{III. } P = \frac{(1-\sin\alpha).\mathfrak{P} + (1+\sin\alpha).\mathfrak{P}.\sin\alpha^2}{2}$$

ſetzt.

Anm. Die Theorie der Bewegung flüſſiger Maſſen iſt noch zu unvollkommen, als daß durch ſie geradezu die vorſtehende Aufgabe mit Genauigkeit aufgelöſt werden könnte. Man thut ihr aber auch ſehr unrecht, wenn man den Satz (I) $P = \mathfrak{P}.\sin\alpha^2$ als das Reſultat betrachtet, das ſie für den gegenwärtigen Fall liefere, und nun den Unterſchied zwiſchen den Reſultaten wirklicher Verſuche und denen dieſer Formel als Abweichungen der Theorie von der Erfahrung betrachtet, da wir im Gegentheil aus der Theorie ſchon einſehen können, daß im ietzigen Falle P keineswegs durch dieſe Formel beſtimmt werden könne. Wir hätten gleiches oder noch gröſſeres Recht, P aus II zu beſtimmen, aber es läßt ſich ebenſo gut aus der Theorie einſehen, daß auch die Formel in II hier nicht gebraucht werden könne, ſondern daß die Wahrheit zwiſchen I und II liegen müſſe. Nur die eigentliche Stelle zwiſchen I und II beſtimmt die Theorie nicht. Die mitgetheilte Formel (III) giebt ſie für Winkel, die nicht unter 10° fallen ziemlich genau an; ſie iſt geradezu aus der Natur der Sache geſchöpft und dabei äuſſerſt einfach. Sie erinnert, daß P kleiner ſeyn müſſe als $\mathfrak{P}$, aber gröſſer als $\mathfrak{P}.\sin\alpha^2$, und daß das Gröſſer- und Kleinerſeyn ſelbſt von dem Winkel α abhänge.

Eins

Eine mehr zuſammengeſetzte, aber mit den Boſſütſchen Verſuchen über alle Erwartung genau zuſammenſtimmende Formel findet man in meinem Lehrbuch der Hydraulik. Die von Boſſüt verdient keinen Beifall; die von Hrn. Eytelwein iſt genauer und einfacher. Die von dem Admiral Chapmann gegebene Beſtimmung ſteht mit keiner Theorie im Zuſammenhange, erinnert auch nicht an die Natur der Sache und kann wenigſtens inſoferne nicht als genaue Bezeichnung des ſtetigen Gangs der Natur angeſehen werden, als er zwei ganz verſchiedene Formeln nöthig hat, die eine für Winkel von 0 bis 45°, die andere für Winkel von 45° bis 90°. Inzwiſchen wird hiermit keineswegs über die Brauchbarkeit der Chapmannſchen Formeln abgeurtheilt. Sie verdienen die größte Aufmerkſamkeit und ſorgfältigſte Prüfung, und ihr verdienſtvoller Urheber für ſeine mühſamen Beobachtungen den größten Dank.

Eine genauere Formel als die obige (III) hat man für die Anwendung auf Stoßebenen nicht nöthig. Nur zur Beſtimmung des Stoſſes auf krumme Flächen muß die Formel auf jeden Winkel genau paſſen, und bloß in dieſer Hinſicht wäre ihr noch mehr Schärfe zu wünſchen. Vielleicht entſpricht ſie aber der Natur des Stoſſes noch genauer als man vermuthen mögte, indem ſelbſt ſo genaue Verſuche, als zu einer ſolchen Prüfung gehören, äuſſerſt ſchwer anzuſtellen ſind, und die Boſſütiſchen Verſuche nicht einmal zur genauen Prüfung einer Formel gebraucht werden können, wie Hr. Clemens in ſeiner ſehr leſenswerthen Schrift mit Recht erinnert.

Auſſerdem iſt noch wohl zu erwägen, daß Widerſtand, dem Waſſer einer bewegten Ebene entgegenſetzt, mit dem Stoß fortſtröhmenden Waſſers nicht ganz einerlei iſt. Boſſüt und Chapmann haben aber nur über den Widerſtand Beobachtungen angeſtellt.

Umſtänd-

Umſtändlichere Unterſuchungen können hier nicht beigebracht werden.

Zuſ.

§. 57. Da der Wind oder bewegte Luft als eine unbegrenzte flüſſige Maſſe angeſehen werden kann, deren ſpec. Schwere etwa $\frac{1}{850}$ von der des Waſſers beträgt, ſo wendet man die Formeln für den Waſſerſtoß (§. 56) auch auf den Windſtoß an, nur daß man den dortigen Werth von P mit 850 dividirt. Inzwiſchen fällt nach angeſtellten Beobachtungen der Werth von P (§. 55), welcher in den Formeln (§. 56) ſubſtituirt werden muß, doch gröſſer aus als beim Waſſer, ſo daß man den (§. 55) angegebenen Werth beiläufig mit 1,4 multipliciren muß.

Hierher gehörige Schriften.

Prony Architektura Hydraulika.

Nouvelles expériences ſur la réſiſtance des fluides, par M. d'Alembert, le Marquis de Condorcet et l'Abbé Boſſut, Paris 1777.

Boſſût, angef. Lehrbegr. der Hydrodyn. 2ter B.

Langsdorf angef. Lehrb. der Hydr.

Examen maritime theorique et pratique, ou Traité de méchanique appliqué à la conſtruction et à la manoeuvre des vaiſſaux. Par Don George Juan. Traduit de l'Eſpagnol avec des additions par M. Levêque, Nantes 1783.

Ab,

Abhandl. der königl. Schwed. Akad. der Wiſſenſch. 1795. 2tes Quartbl.

Gerſtner, Theorie des Waſſerſtoſſes in Schußgerinnen, mit Rückſicht auf Erfahrung und Anwendung. Abhandl. der königl. Böhmiſchen Geſellſch. der Wiſſ. 2ter Bd. Prag 1795.

Clemens Darſtellung und Beſchreibung der Verſuche, des Vice-Admirals von Chapmann in Karlskrona zu Beſtimmung des Widerſtandes flüſſiger unbegränzter Maſſen, Berlin 1797.

Eytelwein angef. Handbuch der Mechanik.

Maſchi-

Maſchinenlehre.

Maſchinenlehre.

Erſtes Kapitel.

Von den Maſchinen überhaupt.

Erklärung 1.

§. 1. Jede Vorrichtung, wodurch Kräfte beſtimmt werden, auf irgend eine andere Weiſe zu wirken als ohne dieſe Vorrichtung geſchehen würde, heißt eine Maſchine.

In der Maſchinenlehre wird nicht nur gezeigt, wie der Effekt beſtimmter Maſchinen von den allgemeinen Geſetzen des Gleichgewichts und der Bewegung abhängt, ſondern auch gezeigt, wie Maſchinen insbeſondere eingerichtet ſeyn müſſen, um durch ſie auf die vortheilhafteſte Weiſe Gleichgewicht oder Bewegung zu beſtimmten Zwecken hervorzubringen.

Erfahrung.

§. 2. Wir können keine Kraft für ſich allein, von Materie abgeſondert, darſtellen. Daher findet auch keine unmittelbare Anwendung irgend einer Kraft bei Maſchinen ſtatt, ſondern wir müſſen überall Ma-

terien gebrauchen, um Kraft zu erhalten. Dieſe wirken

1.) vermöge der Schwere

z. B. bei dem oberſchlächtigen Waſſerrade, dem Laufrade, dem Tretrade, der Tretſcheibe, der Waſſerſäulenmaſchine.

2.) vermöge des Stoſſes

z. B. bei dem unterſchlächtigen Waſſerrade, bei den Windmühlenflügeln.

3.) vermöge der Expanſivkraft

z. B. bei der Dampfmaſchine, bei Maſchinen, die durch Federn betrieben werden.

4.) vermöge der bei der Bewegung hinzukommenden Schwungkraft

z. B. beim Segneriſchen Waſſerrade.

5.) vermöge der Nervenkraft belebter Geſchöpfe. Dieſe wird häufig

z. B. bei dem Keil, der Walze, der Schraube, dem Hebel, den Haſpeln, den Flaſchenzügen, den Pumpen, der archimediſchen Schnecke, den Feuerſpritzen, den Kaſtenkünſten, den Schaufelwerken u. a. angewendet, obgleich mehrere von dieſen auch durch andere Kräfte in Bewegung geſetzt werden können.

Erklärung 2.

§. 3. Bei jeder Maſchine unterſcheidet man im Allgemeinen zwei Punkte, den von der Kraft angegriffenen und den von der Laſt angegriffenen, nämlich diejenigen Punkte der Maſchine, auf welche Kraft und Laſt zunächſt wirken.

Erklä-

Erklärung 3.

§. 4. Jede Maſchine hat ihre beſtimmte Verrichtungen, die ſie bei fortdauernder Bewegung nur immer wiederholt. Derienige Zuſtand einer Maſchine, bei welchem ſie die ihr vorgeſchriebenen verſchiedenen Verrichtungen immer wieder in derſelben Zeit wiederholt, heißt ihr Beharrungsſtand. Er iſt gleichförmig oder ungleichförmig, nachdem die Bewegung des von der Kraft angegriffenen Punktes gleichförmig oder ungleichförmig iſt. Die Zeit, in welcher die Maſchine iedesmal dieſelben Verrichtungen von neuem wiederholt, will ich die Wirkungsperiode der Maſchine nennen.

Die Maſchinen ſelbſt laſſen ſich hiernach in gleichförmig wirkende und ungleichförmig wirkende eintheilen.

Erklärung 4.

§. 5. Wenn der von einer Laſt Q angegriffene Punkt auch nicht einerlei Geſchwindigkeit mit dem von der Kraft angegriffenen hat, ſo läßt ſich doch allemal eine Laſt Q′ an einem Punkte, der mit dem von der Kraft angegriffenen einerlei Geſchwindigkeit hat, angebracht denken, die der Kraft völlig ſo widerſteht, wie vorher die Laſt Q. Dieſe Laſt Q′ nenne ich die auf die Geſchwindigkeit der Kraft reducirte Laſt, auch, wenn von keinem andern Reducirungspunkte ausdrücklich die Rede iſt, ſchlechtweg die reducirte Laſt.

Erklärung 5.

§. 6. Derienige Widerſtand, deſſen Ueberwindung Zweck der Maſchine iſt, heißt de Nutzlaſt. Der Inbegriff aller übrigen Hinderniſſe, deren Wälti-

gung nicht zum eigentlichen Zweck der Maſchine gehört, und die erſt zufällig durch die Art der Maſchine entſtehen, macht die Nebenlaſt oder Hindernißlaſt aus.

Dahin gehören Reibung, Widerſtand der Luft, Steifigkeit der Seiler ꝛc.

Die geſammte Laſt oder Laſt ſchlechtweg begreift beide unter ſich, Nutzlaſt und Nebenlaſt.

Erklärung 6.

§. 7. Der Unterſchied zwiſchen der Kraft und der geſammten reducirten Laſt heißt die Ueberwucht.

Lehrſ. 1

§. 8. Ungleichförmig wirkende Maſchinen bedarfen, wo nicht beſtändig, doch von Zeit zu Zeit einer Ueberwucht; bei gleichförmig wirkenden ſind Kraft und reducirte Laſt während der Bewegung gleich groß.

Bew. Gleichförmig fortdauernde Bewegung ſetzt voraus, daß in die einmal in Bewegung geſetzten Theilchen der Maſchine weder eine beſchleunigende noch eine verzögernde Kraft wirke, ſondern daß die Bewegung aller Maſſen bloß vermöge des Geſetzes der Trägheit die einmal erlangte Bewegung unverändert beibehalten. Hieraus folgt alſo der zweite Theil des Lehrſatzes.

Ebendarum kann aber auch die Bewegung im ungleichförmigen Beharrungsſtande nicht bloß vermöge der Trägheit fortdauern, ſondern es muß in dieſem Zuſtande nothwendig entweder eine beſchleunigende oder eine verzögernde Kraft vorhanden ſeyn. Letztere kann nicht

nicht fortdauernd ſtatt finden, weil ſonſten der Gang der Maſchine nach und nach immer mehr verzögert werden müßte, alſo der angenommene Beharrungsſtand nicht ſtatt finden könnte.

Ebenſo wenig kann beſchleunigende Kraft fortdauernd ſtatt finden, weil ſonſten von Zeit zu Zeit die Maſchine in immer ſchnellere Bewegung kommen müßte, alſo wiederum kein Beharrungsſtand eintreten könnte.

Da nun ohne Geſchwindigkeitsänderung doch kein ungleichförmiger Gang möglich iſt, und wegen des vorausgeſetzten Beharrungsſtandes weder Geſchwindigkeitsverminderung allein, noch Geſchwindigkeitsvergrößerung allein in den einzelen Bewegungsperioden eintreten kann, ſo müſſen beide Aenderungen nothwendig abwechſelnd eintreten, und die Maſchine bedarf alſo, wenn ſie ungleichförmig wirkend iſt, von Zeit zu Zeit immer wieder einer beſchleunigenden Kraft um die von Zeit zu Zeit verlohren gehende Geſchwindigkeit wieder zu gewinnen und ſo den Beharrungsſtand möglich zu machen. Beſchleunigende Kraft ſetzt aber allemal Ueberwucht voraus.

Zuſ.

§. 9. Wenn die Maſchine von der Art iſt, daß in einem gewiſſen Augenblick die Geſchwindigkeit plötzlich oder doch in einem unmerkbaren Zeittheilchen periodiſch vermindert wird, ſo muß gleich nach dieſem Augenblick die Bewegung vermöge einer Ueberwucht bis zu dem wieder eintretenden Augenblick der plötzlichen Geſchwindigkeitsverminderung ſo beſchleunigt werden, daß der am Anfang einer ſolchen periodiſchen Bewegung eintretende Geſchwindigkeitsverluſt am Ende derſelben wieder erſetzt iſt. Widrigenfalls könnte kein Beharrungsſtand ſtatt finden.

 Erklä-

Erklärung 7.

§. 10. Der Effekt einer Maſchine hängt von der Geſchwindigkeit ab, mit der ein gegebener Widerſtand von einer gegebenen Kraft überwunden wird. Er kann alſo als Verhältnißzahl durch das Produkt aus dem Widerſtand in die Geſchwindigkeit des vom Widerſtande angegriffenen Punktes ausgedruckt werden.

Dieſes Produkt des Widerſtandes oder der Laſt in ihre Geſchwindigkeit heißt das mechaniſche Moment der Laſt, ſo wie das Produkt aus der angebrachten Kraft in ihre Geſchwindigkeit (d. h. in die Geſchw. des von ihr angegriffenen Punktes) das mechaniſche Moment der Kraft.

Zuſ.

§. 11. Weil ſich die mechaniſchen Momente der Kraft und der Laſt wie die auf einerlei Umdrehungspunkt gebrachten ſtatiſchen verhalten, und beides nur Verhältnißzahlen ſind, ſo können auch letztere, wo ſie vorhanden ſind, ſtatt der erſteren gebraucht werden. Weil aber nicht überall Umdrehungsbewegung ſtatt findet, ſo iſt der Begriff vom mechaniſchen Moment allgemeiner als der vom ſtatiſchen.

Erklärung 8.

§. 12. Man muß den Totaleffekt einer Maſchine von ihrem Nutzeffekt unterſcheiden.

Der Totaleffekt iſt das mechaniſche Moment der geſammten Laſt; der Nutzeffekt iſt das mechaniſche Moment der Nutzlaſt allein.

In der Ausübung iſt es allemal um den größten Nutzeffekt zu thun.

Zuſ. 1.

§. 13. Bei gleichförmig wirkenden Maſchinen iſt der Totaleffekt dem mechaniſchen Moment der zur Betreibung der Maſchine angebrachten Kraft gleich (Dyn. § 80[a]).

Bei ungleichförmig wirkenden Maſchinen iſt das mechaniſche Moment der Laſt für die Periode der vorhandenen Ueberwucht allemal kleiner als das mechaniſche Moment der Kraft.

Folglich übertrifft bei allen Maſchinen das mechaniſche Moment der Kraft den Nutzeffekt, aber bei einem ungleichförmigen Beharrungsſtand während der Periode der vorhandenen Ueberwucht mehr als bei einem gleichförmigen.

Zuſ. 2.

§. 14. Bei ſolchen ungleichförmig wirkenden Maſchinen, bei welchen ohne merklichen Zeitaufwand plötzliche Geſchwindigkeitsverminderungen eintreten, iſt die Periode der vorhandenen Ueberwucht von einer ganzen Wirkungsperiode der Maſchine auch nicht merklich verſchieden, alſo in ſolchen Fällen der Satz von den ungleichförmig wirkenden Maſchinen (vor. §.) für jede ganze Wirkungsperiode der Maſchine gültig. Solche Maſchinen ſind alſo allemal unvollkommener, leiſten weniger, als gleichförmig wirkende.

Wird aber die in eine ganze Wirkungsperiode der Maſchine fallende Abnahme der Geſchwindigkeit eine Zeitlang fortdauernd, ſo daß die Zeitdauer dieſer Abnahme einen beträchtlichen Theil von der ganzen Wirkungsperiode der Maſchine ausmacht, ſo muß während dieſer Verzögerungsperiode das ſtatiſche Moment der Laſt gröſſer ſeyn als das der Kraft, ſo daß während

dieſer Zeit umgekehrt der Effekt gröſſer iſt als das mechaniſche Moment der Kraft.

In dieſem letzteren Falle könnte alſo der Totaleffekt der Maſchine für die ganze Wirkungsperiode, dem ungleichförmigen Gange ungeachtet, dem Totaleffekt gleich ſeyn, welcher bei gleichförmigem Gange ſtatt finden würde.

Es haben daher nicht nothwendig alle ungleichförmig wirkende Maſchinen einen gröſſeren Totaleffekt als die gleichförmig wirkenden, ſondern nur die am Anfang dieſes §. erwähnten.

Erklärung 9.

§. 15. Die im vor. §. zuerſt erwähnten Maſchinen will ich ungleichförmig wirkende der ſchlechtern Art, die zuletzt erwähnten ungleichförmig wirkende der beſſern Art nennen.

Zuſ.

§. 16. Gleichförmig wirkende Maſchinen müſſen in allen ihren Theilen ſo leicht als es die Feſtigkeit erlaubt erbaut werden. Bei den ungleichförmig wirkenden müſſen von den in beſtändiger Umlaufsbewegung beharrenden Theilen diejenigen, welche ſich am ſchnellſten bewegen, eine beſtimmte Maſſe haben, um den gröſten Effekt zu leiſten. Oft kann durch beſonders angebrachte Räder oder Ringe derſelbe Zweck noch beſſer erreicht werden. Die Beſtimmung der Gröſſe dieſer Umlaufsmaſſen iſt bei den verſchiedenen Arten (§. 15) verſchieden.

Erklärung 10.

§. 17. Umlaufsmaſſen, die bloß zur Vergröſſerung der Schwungbewegung bei einer Maſchine angebracht

bracht werden, heiſſen, nach Verſchiedenheit ihrer Geſtalt, Schwungkolben, Schwungſcheiben, Schwungringe; beide letztere auch Schwungräder. Die Schwungkolben ſind die ſchlechteſten, die Schwungringe die beſten Schwungmaſſen.

Erklärung II.

§. 18. Eine Maſchine heißt überſetzt, wenn ſie irgendwo mehr Maſſe hat, als Feſtigkeit des Baues und größter Effekt der Maſchine erfodern.

Allgemeine Erinnerung.

§. 18*. In der Maſchinenlehre hat man ſein vorzüglichſtes Augenmerk auf Erleichterung der Berechnungen zu richten, ſoweit Aufopferung der Genauigkeit im Ausdrucke dem Grade der Genauigkeit, welcher für die Ausübung nöthig iſt, nicht ſchadet.

In Feſtſetzung der allgemeinen mechaniſchen Grundlehren, mit welchen man es in der Dynamik zu thun hatte, war allerdings die größte Schärfe nöthig, eben um einen ſicheren Prüfſtein zu haben, an den wir uns halten können, wenn es auf die Frage ankommt, wie weit wir uns in der Ausübung der Wahrheit zu nähern im Stande ſind, oder wieviel wir beim Gebrauche dieſer oder iener Formel in der Ausübung etwa fehlen können? Sobald Beſtimmungsſtücke in eine mechaniſche Formel aufgenommen werden müſſen, deren Abhängigkeit von dem Werthe eines gewiſſen Ausdrucks nur beiläufig angegeben werden kann, ſo wäre es beinahe lächerlich, um die Genauigkeit dieſes Ausdrucks ängſtlich beſorgt zu ſeyn, inſoferne es dabei nur um die Ableitung ienes Beſtimmungsſtücks zu thun wäre. Ein ſolches Verfahren würde in der Maſchinen-

nenlehre noch mehr Tadel verdienen, wenn ſelbſt eine merkliche Abweichung im Werthe eines ſolchen Beſtimmungsſtücks von der Wahrheit keinen merklichen Einfluß auf das Reſultat haben könnte, welches eigentlich geſucht wird. Groſſentheils iſt dieſes der Fall bei Friktionsbeſtimmungen.

Auch in Rückſicht auf die Art, wie aus den ſcharf erwieſenen dynamiſchen Grundlehren nützliche Reſultate für die Maſchinenlehre abgeleitet werden ſollen, hat man Urſache, dieſem praktiſchen Theile, iede Erleichterung zu verſchaffen, deren er fähig iſt, und die übrigens durch ienen theoretiſchen Theil ſelbſt gerechtfertiget wird. Dahin gehört insbeſondere der Gebrauch des Carteſiſchen Princips (Dyn. §. 80[a]), vermöge deſſen Kräfte an Punkten eines Syſtems gleichviel leiſten, woferne im Falle einer entſtehenden Bewegung die Produkte aus den Kräften in die Geſchwindigkeit der angegriffenen Punkte gleichgroß ſind, alſo woferne die Kräfte gleichgroſſe mechaniſche Momente haben.

Zweites Kapitel.

Von der Nebenlaſt bei Maſchinen.

Vorerinnerung.

§. 19. Zur Nebenlaſt können auſſer den unvermeidlichen Hinderniſſen, die vermöge der eigenthümlichen Einrichtung einer ieden Maſchine von ihr unzertrennlich ſind, noch dieienigen Nebenhinderniſſe hinzu-

hinzugerechnet werden, die etwa nur durch ſchlechte Wahl der Materialien oder durch ſonſtige Ungeſchicklichkeit des Werkmeiſters hinzukommen können. Aber von ſolchen vermeidlichen Nebenhinderniſſen iſt hier nicht die Rede. Wir betrachten bloß Reibung, Steifigkeit der Seiler und Widerſtand der Luft.

I. Reibung.

Erfahrung.

§. 20. Allemal leidet eine Kraft, die einen feſten Körper nach einer gewiſſen Richtung zu bewegen ſtrebt, einen merklichen Widerſtand, wenn dieſer Körper irgendwo an ſeiner Oberfläche mit einer merklichen Kraft nach einer Richtung, die auf iene ſenkrecht iſt, an die äuſſere Fläche irgend eines andern feſten Körpers angedruckt wird, die ſich berührenden oder an einander gedruckten Flächen mögen noch ſo glatt polirt ſeyn.

Erklärung 12.

§. 21. Den im vor. §. erwähnten Widerſtand nennt man den Widerſtand der Reibung, auch ſchlechtweg die Reibung oder die Friktion. Sie heißt insbeſondere gleitende Reibung, wenn die Punkte, welche der Reibung ausgeſetzt ſind, bei der Bewegung nicht in einer cylindriſchen Fläche liegen, die ſich um eine Axe dreht; drehende Reibung oder Zapfenreibung, wenn die reibenden Punkte (des einen oder des andern Körpers) in einer cylindriſchen Fläche liegen, die ſich um eine unbewegliche Axe dreht; und fortwälzende Reibung oder Walzenreibung, wenn die reibenden Punkte in einer cylindriſchen Fläche liegen, die ſich um

um eine Axe dreht, welche ſich ſelbſt nach einer auf ihr ſenkrechten Richtung fortbewegt.

Anm. Man hat ſich ſchon ſeit dem Ende des 17ten Jahrhunderts um die genauere Beſtimmung dieſes bei allen Maſchinen vorkommenden Hinderniſſes der Bewegung viele Mühe gegeben. Das wichtigſte verdankt man den Franzoſen. Schon Amontons (Hiſt. de l'Acad. roy. des ſc. 1699) folgerte aus ſeinen Verſuchen: die Reibung ſey ein beſtimmter aliquoter Theil (nach ihm $\frac{1}{3}$) des ſenkrechten Drucks, die ſich an einander reibenden Flächen mögen groß oder klein ſeyn. Parent fand (a. a. O. vom J. 1700) durch Schlüſſe $\frac{7}{20}$; Bülfinger (Comment. Acad. imp. petrop. T. II) $\frac{1}{4}$.

Die praktiſchen Schriftſteller ſind beinahe durchgängig bis zum Ende des 18ten Jahrh. bei der Amontonſchen Beſtimmung ſtehen geblieben, weil Belidor ſie beibehalten hatte.

Bei genaueren Unterſuchungen hierüber war man auf alle Umſtände aufmerkſamer, die auf die Gröſſe dieſes Hinderniſſes Einfluß haben können.

Man unterſchied die Reibung bei fortſchreitender Bewegung ohne Umdrehung als Reibung der erſtern Art (le frottement de la prémière eſpece) von der Reibung bei fortſchreitender Bewegung mit Umwälzung als von Reibung der andern Art (le frottement de la ſeconde eſpece), indem man letztere bei weitem kleiner fand.

Man unterſchied die verſchiedenen Materien der Körper, Reibung trockener Flächen von Reibung geſchmierter Flächen, Reibung im Zuſtande der Ruhe (die dem Anfange der Bewegung widerſteht) von Reibung im Zuſtande der Bewegung (welche der Fortſetzung der Bewegung widerſteht).

Am meiſten trug zur Vervollkommnung dieſer Lehre die von der Akad. d. W. zu Paris in den Jahren 1779 und

1781

1781 aufgeworfene Preißfrage bei, welche die Theorie der einfachen Maſchinen zum Gegenſtand hatte. Hr. Coulomb, damaliger Ingenieurhauptmann erhielt den verdoppelten Preiß. Die Reſultate ſeiner trefflichen Verſuche hat Hr. Prony in ſeiner Architekt. Hydraul. mitgetheilt. Er hat auf alle obige Beſtimmungsſtücke Rückſicht genommen; auch iſt er meines Wiſſens der Erſte, welcher auf die Zapfenreibung beſonders aufmerkſam geweſen iſt, die weder zur Reibung der erſtern noch zu der andern Art gehört.

Gröſſe der reibenden Flächen hat bei Flächen von gleichförmiger Beſchaffenheit keinen für die Ausübung merklichen Einfluß auf die Gröſſe der Reibung, wenn nur, wie vorausgeſetzt wird, keine der reibenden Flächen ſo ſchmal iſt, daß ſie in die des andern Körpers einſchneiden könnte. Uebrigens hängt die Gröſſe der Reibung auch von dem Grade der Rauhigkeit der ſich reibenden Flächen ganz vorzüglich ab. In dieſer Rückſicht würde es eine ganz vergebliche Bemühung ſeyn, auch nur beiläufige allgemeine Beſtimmungen der Reibung feſtſetzen zu wollen.

Bei Maſchinen iſt aber auch immer von Maſſen die Rede, deren reibende Flächen entweder bei Erbauung der Maſchinen die erfoderliche Politur ſchon erhalten oder ſich durch die Reibung ſelbſt nach und nach glatt abgeſchliffen haben, welches immer ſehr bald erfolgt.

Auf dieſe Vorausſetzung gründen ſich nachfolgende aus dem Pronyſchen Werke genommene Angaben des Hrn. Coulomb.

Erfahrung.

§. 22. Wenn die Zahl, welche mit der Gröſſe des Drucks multiplicirt die Gröſſe der Reibung giebt, der Reibungskoefficient heißt, ſo hat man beiläufig

1. Für

	Reibungskoefficient Trocken	Mit erneuerter Unſchlittſchmiere
I. Für gleitende Reibung		
Eichenholz auf Eichenholz . . .	0,1 . .	(a) 0,036
		(b) 0,047
		(c) 0,130
Eiſen auf Eiſen	0,276 .	(d) 0,097
		(e) 0,099
		(f) 0,160
Eiſen auf Kupfer	0,24 . .	(g) 0,091
		(h) 0,093
		(i) 0,125

II. Für Zapfenreibung

Bei trockener Reibung iſt der Reibungskoeff. etwa um $\frac{1}{4}$ kleiner als bei der gleitenden Reibung.

Bei Schmiere iſt er etwa $\frac{1}{13}$ kleiner als bei der gleitenden Reibung.

III. Für Walzenreibung

kann, es mag von trockenen oder geſchmierten Flächen die Rede ſeyn, der Reibungskoefficient bei einer 12zölligen Walze zu $\frac{1}{20}$ von

(a) bei einem Druck von 50 Pfund.
(b) — — — — 450 Pf.
(c) — — — — 3250 Pf.
(d) — — — — 1653 Pf.
(e) — — — — 453 Pf.
(f) — — — — 53 Pf.
(g) — — — — 1652 Pf.
(h) — — — — 452 Pf.
(i) — — — — 52 Pf.

von der gleitenden Reibung trockener Flächen angenommen werden. Bei einer 6 zölligen Walze beträgt ſie beiläufig $\frac{1}{10}$ von der gleitenden Reibung trockener Flächen.

Druckt man den Durchmeſſer der Walze in Zollen aus und ſetzt ihn = d, ſo kann man, wenn die gleitende Reibung trockener Flächen derſelben Materie = F wäre, die Walzenreibung, bis man mehrere Verſuche darüber angeſtellt hat,

$$= \frac{d + 1}{(d^2 + 1) . 1,8} . F$$

ſetzen.

Anm. 1. Die vorſtehenden Angaben beziehen ſich durchaus auf Reibung im Stande der Bewegung, um die es bei den Maſchinen eigentlich zu thun iſt. Im Stande der Ruhe iſt ſie gröſſer, beſonders wenn Holz an Holz ſich reibt. Auch iſt, wenn Reibung zwiſchen Holz und Metall vorkommt, die Reibung bei gröſſerer Geſchwindigkeit gröſſer. Reibt ſich aber Holz an Holz, oder Metall an Metall, welches die gewöhnlichen Fälle bei den Maſchinen ſind, ſo hat die Verſchiedenheit der Geſchwindigkeit keinen merklichen Einfluß auf die Gröſſe der Reibung.

Nach Muſchenbröck hat man für die

Reibung des Stahls	Reibungskoefficient trocken	Reibungskoefficient eingeöhlt
an Stahl	$\frac{11}{40}$	$\frac{12}{30}$
an Kupfer	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{40}$
an Zinn	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{23}$
an Blei	$\frac{2}{13}$	$\frac{5}{37}$
an Meſſing	$\frac{8}{35}$	$\frac{2}{15}$

Aber dieſe Beſtimmungen beziehen ſich auf kleinere Preſſungen und auf den Ruheſtand.

Anm. 2. Es verdient hier noch beſonders angemerkt zu werden, daß bei den Coulombſchen Verſuchen die Geſchwindigkeit der reibenden Punkte nicht über 6, 6, 10 Zolle in einer Sekunde betrug. Weil man nun bei Maſchinen ſelten und in Anſehung der Zapfenreibung wohl nie mit gröſſeren Geſchwindigkeiten der reibenden Punkte zu thun hat, ſo wird man ſich faſt immer damit begnügen können, zu wiſſen, daß ſolche Geſchwindigkeiten auf die Gröſſe der Reibung keinen merklichen Einfluß haben. Er könnte aber bei gröſſeren Geſchwindigkeiten dennoch merklich werden, und es iſt wohl keinem Zweifel unterworfen, daß ſich die Sache wirklich ſo verhalte. Die intereſſanteſten Unterſuchungen hierüber findet man in den am Ende dieſes Kap. angezeigten Schriften von v. Segner und Karſten.

Uebrigens muß der Satz, daß Reibung im Stande der Ruhe gröſſer ſey als im Stande der Bewegung, auch nur von Geſchwindigkeiten verſtanden werden, welche die oben erwähnten nicht viel übertreffen.

II. Steifigkeit der Seilen.

Vorerinnerung.

§. 23. An dem einen Ende eines dicken noch ganz neuen Seils (fig. 24) ſey eine Laſt Q angebracht, das andere Ende hänge über eine Rolle herab und es ziehe daran eine Kraft P niederwärts, ſo wird das in einem kleinen Zeittheile aufſteigende und an die Rolle ſich anlegende kurze Seitenſtückchen mo ſeiner Beugung widerſtehen, deſtomehr bei einerlei Laſt, ie dicker es iſt und ie ſtärker die Krümmung oder ie kleiner der Halbmeſſer der Rolle iſt. Und da die Steifigkeit des Seils überdas deſto gröſſer werden muß, ie ſtärker ſeine Theile nach gerader Richtung mw angeſpannt werden, ſo muß mit Vergröſſerung der Laſt Q auch der Widerſtand wachſen, mit welchem das Seil-

ſtück-

ſtückchen mo ſich ſeiner Beugung um die Rolle widerſetzt. Daher wirkt der Zug der Kraft P bei o nach einer ſchiefen Richtung vo, anſtatt nach ox der geraden mw gleichlaufend zu ziehen, ſo daß nur ein Theil von P = P. ſin ovx parallel mit mw wirkt.

Erklärung 13.

§. 24. Dieſe bloß von der Steifigkeit des Seils herrührende Verminderung der Kraft oder ihrer Wirkung auf die Laſt heißt der Widerſtand wegen der Steifigkeit des Seils, auch abgekürzt ſchlechtweg die Steifigkeit des Seils. Sie kann nur bei demjenigen Seilſtück ſtatt finden, welches aufgewunden wird, das andere Ende bc, welches ſich abwickelt, verliehrt die nun einmal erhaltene Krümmung bei b ohne weiteren Kraftverluſt oder geht ohne Kraftverluſt bei b nach der Tangente bc fort, nach welcher die Kraft P zieht, woferne es ſich nicht etwa vermöge einer gewiſſen Elaſticität bei e wieder geradaus nach ed zu ſtrecken ſtrebt.

Zuſ.

§. 25. Es ſey δ der Durchmeſſer des Seils, r der Halbmeſſer der Rolle oder der Walze, beides in Linien, Q die ſpannende Kraft in Pfunden, und S der Widerſtand der Steifigkeit in Pfunden, ſo lieſſen ſich die Umſtände, von welchen S abhängt, etwaige Elaſticität des Seils bei Seite geſetzt, ſo ausdrucken

$$S = \frac{\delta^m}{r} . (A + B . Q)$$

Denn S kann vielleicht von einer Potenz von δ abhängen; $\frac{\delta^m}{r}$. A zeigt die Abhängigkeit von der urſprüng-

lichen Steifigkeit des Seils an, und $\frac{\delta^m}{r}$. B . Q die Abhängigkeit von der Spannkraft P, von der ein gewiſſer aliquoter Theil B.Q in Anſchlag kommen kann.

Dieſe hypothetiſche Formel enthält drei unbekannte Gröſſen m, A, B. Um nun zu unterſuchen, ob ſich dafür unveränderliche Zahlen ſetzen laſſen, muß man eine Reihe angeſtellter Verſuche vor ſich haben, aus welchen δ, r, P und S bekannt ſind, da ſich dann iedesmal aus drei ſolchen Verſuchen drei Gleichungen ergeben, aus welchen ſich die drei unbekannten Gröſſen m, A, B finden laſſen.

Erfahrung.

§. 26. Verſuche, die Hr. Coulomb mit neuen ungepichten Seilen vom beſten Hanf zu 4 bis 9 Par. Linien im Durchmeſſer bei Walzen von 1 bis 6 Zollen im Durchmeſſer und bei Spanngewichten von 25 bis zu 1025 ℔ angeſtellt hat, gaben ohne bedeutende Abweichung

$$m = 1,7$$
$$A = 2,45$$
$$B = 0,053$$

woferne die Seilen trocken waren.

Bei Seilen von minderer Güte und bei ſolchen, die ſchon eine Zeitlang im Gebrauche geweſen ſind, wird m immer kleiner. Doch fällt nach vielfachen Verſuchen des Hrn. Coulomb der Werth von m niemals unter 1,4.

Erfahrung.

§. 27. Auch mit naſſen, die 5 bis 6 Stunden im Waſſer gelegen hatten, hat Hr. C. Verſuche angeſtellt. Es ergab ſich

bei Seilen von 8 Linien im Durchmeſſer kein merklicher Unterſchied der Steifigkeit, in Vergleichung mit trockenen.

bei Seilen von weniger als 8 Linien im Durchmeſſer die Steifigkeit etwas geringer als bei trockenen.

bei Seilen von mehr als 8 Linien die Steifigkeit gröſſer als bei trockenen, ſo daß für $\delta = 9$ Lin.

$$A = 6{,}6$$

geſetzt werden kann; m und B behalten ihre vorige Werthe.

Dabei war es nicht nöthig, auf die Elaſticität beſonders Rückſicht zu nehmen; ſie iſt ſehr unbedeutend und kann in der Ausübung ganz bei Seite geſetzt werden, ſo daß von bc herab nichts merkliches von der Kraft P verlohren geht, ſondern aller Verluſt auf das andere Seilſtück fällt.

Zuſ.

§. 28. Man hat alſo für trockene ungepichte Seilen

I. Wenn ſie noch neu ſind

$$S = \frac{\delta^{1,7}.(2{,}45 + 0{,}053.Q)}{r}$$

II. Wenn ſie ſchon ſtark gebraucht ſind

$$S = \frac{\delta^{1,4}.(2{,}45 + 0{,}053.Q)}{r}$$

 und

und für Seilen, die ganz im Waſſer getränkt ſind
S etwas gröſſer oder kleiner als für trockene, nachdem ihr Durchmeſſer mehr oder weniger als 8 Linien beträgt.

Dabei beziehen ſich δ und r auf Par. Linien, S und Q auf Pfunde.

Anm. Wollte man die hypothetiſche Formel

$$S = \frac{\delta}{r} . B . Q$$

mit der Erfahrung vergleichen, um $B = \frac{r . S}{\delta . Q}$ auf ſolche Weiſe zu beſtimmen, ſo hätte man zwar eine einfachere Formel für S, aber dann geben mannigfaltige Werthe von r, S, δ und Q, d. i. mannigfaltige Verſuche auch mannigfaltige Werthe von B, ſo daß für B in dieſer Formel keine feſtgeſetzte unveränderliche Zahl gebraucht werden könnte.

Karſten leitet auf dieſe Weiſe aus Amontons Verſuchen eine Regel ab, bei welcher B = 0, 187 zum Grunde liegt, und ſo iſt nach ihm

$$S = \frac{0,187 . \delta}{r} . Q$$

Aber die hier erläuterte Pronyſche Formel iſt weit genauer.

Z. B. δ = 9 Lin.; r = 12 Lin. und Q = 625 ℔ giebt bei einem neuen Seil

nach Prony

$$S = \frac{9^{1,7} . (2,45 + 0,053 . 625)}{12}$$
$$= 134,2 \text{ ℔}$$

nach Karſten

$$S = \frac{0,187 . 9}{12} . 625$$
$$= 8,76 \text{ ℔}$$

Die

Die Erfahrung gab s = 134 ℔ ſehr genau den berechneten Werth.

Freilich beweißt dieſes Reſultat nur ſoviel, daß die aus den Coulombſchen Verſuchen hergeleitete Beſtimmung gerade auf die von Hrn Coulomb gebrauchten Seile ſo gut paſſe, hingegen auf Seile von anderem Hanf aus anderen Werkſtätten angewendet keine ſo genaue Uebereinſtimmung mit der Erfahrung geben könne.

So gegründet aber auch dieſe Erinnerung iſt, ſo iſt doch offenbar die Geſtalt der Formel der Natur der Sache angemeſſener als die von Karſten. Und wenn ſie gleich auch nur als Näherungsformel angeſehen werden kann, ſo wird man ſie doch umſoviel zuverſichtlicher zu einer beiläufigen Beſtimmung dieſes Widerſtandes in der Ausübung gebrauchen können, als die dabei aus der Erfahrung genommenen Beſtimmungsſtücke gerade von Seilen hergenommen ſind, die eine vorzügliche Steifigkeit hatten, ſo daß man nach dieſer Beſtimmung den Widerſtand allemal eher zu groß als zu klein finden wird, welches zur Sicherheit der Rechnung dient.

III. Widerſtand der Luft.

Allgemeine Erinnerung.

§. 29. Aus dem, was oben (Hydraul. VI. K. §. 57) vorgekommen iſt, weiß man ſchon im Allgemeinen, daß der Widerſtand der Luft nur bei beträchtlichen Flächen und Geſchwindigkeiten, die für eine Sekunde nicht unter 8 Fuſſe betragen, von Bedeutung ſeyn kann. Daher er ſelten als Widerſtand einer beſonderen Berechnung werth iſt. Bei unterſchlächtigen Rädern verdient er nicht ganz auſſer Acht gelaſſen zu werden.

Hierher gehörige Schriften.

Muſchenbröck, Inſtit. Phyſ. und Introd. ad Phil. Nat.

Nollet, Leçons de Phyſ Expe.im.

v. Segner, Diſput de adfrictu ſolidorum in motu conſtitutorum, Halae 1758.

Euler, ſur le frottement — Mem. de l'Acad. de Pruſſe 1748.

Karſten, Lehrbegr. der geſ. Math. IV. Th.

Lambert, ſur le frottement — Nouv. Mem. de l'Acad. Berl. 1772.

Metternich, Diſſ, de frictione, Erford. 1786.

Deſſelben Abhandl. vom Widerſtande der Reibung, eine gekrönte Preißſchrift Frankf. u. Mainz 1789.

Prony angef. Archit. Hydraul. Ueberſ. I. Th. 2ter B.

Auch die oben (§. 21. Anm.) ſchon erwähnten Schriften.

Drittes Kapitel.

Kraft und Gewicht, ingleichem Geſchwindigkeit und Stellung belebter Geſchöpfe bei Maſchinen.

Vorerinnerung.

§. 30. Alle Maſchinenberechnungen ſind nur als beiläufige Ueberſchläge zu betrachten, die ſich von der Wahrheit bald mehr bald weniger entfernen; zwar deſto weniger, ie mehr man richtige Erfahrungen mit der Theorie zu verbinden weiß; aber doch immer wird die mögliche Abweichung von der Wahrheit ziemlich merklich bleiben, und man wird eine ſehr nahe Uebereinſtimmung mit ihr allemal als Sache des Zufalls anzuſehen haben, für die man zum voraus nicht ſtehen kann. Der Grund dieſer Ungewißheit liegt nicht nur in der groſſen Verſchiedenheit zufälliger phyſiſcher Eigenſchaften, welche nur eine beiläufige Beſtimmung der Nebenlaſt geſtattet, ſondern auch in der Verſchiedenheit mannigfaltiger phyſiſcher Eigenſchaften, von welchen bewegende Kräfte verſchiedener Art abhängen, und die wir zum Theil gar nicht kennen und deßhalb auch nicht genau in Rechnung bringen können, oder die zum Theil von der Art ſind, daß die davon abhängende bewegende Kräfte bald gröſſer bald kleiner werden und nur durch Grenzen beſtimmt werden können, zwiſchen die ſie fallen. Wenn daher auch bei einer gewiſſen Art bewegender Kräfte Ungewißheiten irgend einer Art wegfallen, ſo treten faſt immer andere an ihre Stelle, ſo daß wir die Genauigkeit der Reſultaten

im einen Falle ſelten mit mehr Zuverläſſigkeit verbürgen können als in einem andern Falle beim Gebrauch anderer Kräfte. Dieſes iſt z. B. der Fall, wenn wir Maſchinen, die durch belebte Geſchöpfe betrieben werden, mit Maſchinen vergleichen, welche das Waſſer betreibt. Die Berechnungen über erſtere ſind ungleich einfacher als die über letztere, aber demungeachtet die Reſultate von ienen im allgemeinen nicht zuverläſſiger als die von dieſen, weil die Natur ſelbſt für die Beſtimmung der Kraft, des Gewichts und der Geſchwindigkeit belebter Geſchöpfe keine ſo ganz nahe Grenzen feſtgeſetzt hat.

Erfahrung.

§. 31. Wenn von anhaltender Arbeit die Rede iſt, ſo daß ein Menſch oder ein Thier täglich (d. h. in Tag und Nacht oder 24 Stunden) überhaupt 12 Stunden arbeiten ſoll, ſo laſſen ſich der Erfahrung gemäß die hierher gehörigen Beſtimmungen ſo feſtſetzen, wie ſie in nachſtehender Tafel angegeben ſind:

Für

	Kraft zum Ziehen oder Drucken in Nürnb. Pfd.	Gewicht in Nürnb. Pfd.	Geſchwindigk. in Rhl. Fußen	Schiefe Stellung, welche den verſchied. Geſchöpfen ſtatt einer Laſt zugemuthet werden darf
Für Menſchen	25 — 30	120 — 150	2 — $2\frac{1}{4}$	20° gegen den Horiz.
Eſel	36 — 40	220 — 300	2 — $2\frac{1}{2}$	22°
Maulthiere	80 — 120	450 — 600	3 — $3\frac{1}{2}$	22°
Ochſen	200 — 250	500 — 800	$1\frac{1}{3}$ — $1\frac{1}{4}$	23°
teutſche Pferde	170 — 230	600 — 850	$3\frac{3}{4}$ — $4\frac{1}{4}$	20°

Anm.

Anm. Es verſteht ſich, daß nicht von ohnunterbrochener 12ſtündiger Arbeit die Rede ſeyn kann. Am beſten wechſelt man mit den Thieren, die bei den Maſchinen arbeiten ſollen, von 3 zu 3 Stunden ab.

Uebrigens weiß man wohl, daß der Menſch und ſo auch die Thiere bei geringerer Laſt (die ſich auf horizontalen Gang der Geſchöpfe bezieht) einer beträchtlichen Vergröſſerung ihrer Geſchwindigkeit, und bei einer geringeren Geſchwindigkeit einer merklich gröſſeren Kraft fähig ſind. Ja es kann, wo nur wenige Minuten lang gearbeitet und immer wieder abgewechſelt werden ſoll, beträchtlich gröſſere Geſchwindigkeit ſelbſt mit viel gröſſerer Laſt verbunden werden, welches z. B. der Fall bei Feuerſpritzen iſt, die von Menſchenhänden in Bewegung geſetzt werden.

Aber bei dieſen Beſtimmungen der gröſtmöglichen Kraft mit der gröſtmöglichen Geſchwindigkeit, oder des Geſetzes, nach welchem Aenderung eines dieſer beiden Beſtimmungsſtücke (Geſchw. und Kraft) Aenderung des andern zur Folge habe, woferne die Anſtrengung des Thieres ungeändert bleiben ſolle, beruht doch alles wiederum nur auf beiläufigen Ueberſchlägen, die für iedes Individuum anders ausfallen und durch keine mathematiſche Theorie beſtimmt werden können. Ich halte es daher auch nicht der Mühe werth, hier die verſchiedenen Hypotheſen und darauf gegründete allgemeine Formeln beizubringen, womit man dieſen Theil der Mechanik hat bereichern wollen.

Hierher gehörige Schriften.

Euler, Diſcuſſion plus particulière de diverſes manieres d'élever de l'eau par le moyen des pompes avec le plus grand avantage, in Hiſtoire de l'Acad. de Berlin 1752.

Id. De machinis in genere, in den Comment. Nov. Petrop. T. III.

Karſten, Lehrbegr. der geſ. Math. IV. Th.

Käſt-

Käſtner, Anfangsgr. der höhern Mechanik 2te Ausg. S. 10 u. f.

Lempe, Lehrbegriff der Maſchinenlehre,

Viertes Kapitel.

Der phyſiſche Hebel und die Wagen.

Aufg. 1.

§. 32. AB (fig. 26) ſey ein horizontal liegender durchaus gleichdicker Balken, ſeine ganze Länge = l, ſein Gewicht = G, bei c ſey er unterſtützt, hingegen bei p, q, r Kräfte nach lothrechten Richtungen angebracht, die ſich durch Gewichte P, Q, R ausdrucken laſſen; die Entfernungen Ap, Aq, Ar ſollen mit e, e′, e″ bezeichnet werden: man ſucht die Bedingungen des Gleichgewichts.

Aufl. Weil das Gewicht des ſchweren Hebels ſo wirkt, als wenn es im Schwerpunkt beiſammen angebracht wäre, ſo kann man ſich ſtatt des Balkens einen nicht ſchweren mathematiſchen Hebel AB denken, in deſſen Mitte g das Gewicht G angebracht wäre, und man hat $Ag = \frac{1}{2} l$, alſo für das Gleichgewicht

$$cp.P + cg.G = cq.Q + cr.R$$

oder, $cA = u$ geſetzt

$$(u-e).P+(u-\tfrac{1}{2}l).G=(e'-u).Q+(e'-u).R$$

oder

oder

$$(P+G+Q+R).u=P.e+\tfrac{1}{4}G.l+Q.e'+R.e''$$

und

$$u=\frac{P.e+Q.e'+R.e''+\frac{1}{2}G.l}{P+G+Q+R}$$

Anm. 1. Hieraus kann iede einzele Gröſſe gefunden werden, wenn die übrigen gegeben ſind. Z. B.

$$P=\frac{\frac{1}{2}G.l+Q.e'+R.e''-(G+Q+R)u}{u-e}$$

u. ſ. w.

Anm. 2. Ueberhaupt erhellet, daß iede Aufgabe über den phyſiſchen Hebel auf die im 3ten Kap. der Dyn. betrachteten Fälle zurückgebracht wird, indem man ſich eine dem Gewicht des Hebels gleiche Kraft in ſeinem Schwerpunkt beſonders angebracht denkt, und nun den Balken oder die ſchwere Stange als eine von Kräften angegriffene nicht ſchwere ſteife Linie betrachtet. Die vorſtehende Aufgabe dient nur zur Erläuterung dieſes Verfahrens. Mehr darüber zu ſagen, wäre hier überflüſſig.

Erklärung 14.

§. 33. Eine vorzügliche und im Allgemeinen ſehr bekannte Anwendung des Hebels iſt die Wage. Man unterſcheidet dabei insbeſondere die gemeine oder Krämerwage von der Schnellwage. Bei erſterer dient ein gleicharmiger Hebel und für verſchiedene Abwägungen auch verſchiedene Gewichte die verhältnißmäſſige Gröſſe verſchiedener Gewichte anzugeben, bei letzterer dient ein ungleicharmiger Hebel und für verſchiedene Abwägungen einerlei Gewicht in verſchiedenen Entfernungen. Die Hebelſtange heißt der Wagbalken, wie AB (fig. 27), der auf beiden Seiten mit einem angeſchmiedeten dreiſeitigen prismatiſchen Zäpfchen c ver-

verſehen iſt, das auf ieder Seite des Balkens mit ſeiner unteren Schärfe auf einem kleinen in einer Scheere angebrachten Pfännchen ruht.

In der Mitte des Wagbalkens iſt bei d ein hoher in eine ſcharfe Spitze ſich endigender Steft, die Zunge de, ſenkrecht eingeſchroben, die im Falle des Gleichgewichts zwiſchen den beiden Theilen der Scheere genau inne ſteht. Die Abweichung des Wagbalkens von der horizontalen Lage oder die der Zunge von der lothrechten beim Abwägen heißt der Ausſchlag. Eine Wage heißt ſchnell oder empfindlich, wenn ſie bei einem ſehr geringen Uebergewicht auf der einen oder der andern Seite ſchon einen merklichen Ausſchlag giebt; im Gegentheil faul.

Aufg. 2.

§. 34. Die Umſtände zu beſtimmen, von welchen die Grösse des Ausſchlags bei einer Wage abhängt (fig. 27).

Aufl. m ſey der Schwerpunkt der ganzen Wage, wenn ſie ſowohl zur Rechten als zur Linken mit dem Gewicht P beſchwert und im Gleichgewicht iſt; ab ſey die Linie, in welcher die Schärfen beider prismatiſchen Zäpfchen liegen, alſo die Umdrehungsaxe.

Legt man nun zur Linken noch ein Gewicht = q zu, ſo wird dadurch die linke Hälfte ſchwerer als die rechte, der Schwerpunkt rückt alſo von m gegen die Linke, z. B. in v, und v muß niederſinken, bis cv in die lothrechte ecs fällt; es muß alſo cv den Winkel vcm beſchreiben.

Zu gleicher Zeit drehet ſich alſo die punktirte rc um die Axe, und beſchreibt einen Winkel rcd = vcm,

ſo

ſo daß nun der Wagbalken in der Lage dh ruhig liegen bleibt.

Zuſ.

§. 35. Die Wage iſt alſo deſto empfindlicher, ie näher ihr Schwerpunkt an der Umdrehungsaxe ab liegt.

Anm. 1. Falſche Wagen ſind ungleicharmige Krämerwagen, bei welchen die Zunge, wenn die Wagſchalen leer ſind, dennoch genau inne ſteht, weil die Wagſchale mit den Schnüren am kürzern Arm ſchwerer iſt als am längern. Im Falle des Gleichgewichts iſt das Gewicht der Waare in der Wagſchale am längern Arm begreiflich kleiner als das Gewicht in der andern Wagſchale.

Anm. 2. Andere Anwendungen des einfachen Hebels, wohin beſonders verſchiedene Einrichtungen der Hebelade (od. Hebellade) gehören, können hier nicht beigebracht werden. Von zuſammengeſetzten Maſchinen, bei welchen es mit auf die Betrachtung des Hebels ankommt, wird erſt in der Folge geredet.

Hierher gehörige Schriften.

Euler, de bilancibus, Comment. Petrop. T. I.

Karſten, Lehrbegr. der geſ. Math. III. Th.

Schmidt, angef. Anfangsgr. der Mathem. 2. Th. 1te Abth.

Deſſ. Samml. phyſ. math. Abhandl. 1. Th. Gieſen 1793.

Leupold, Theatr. ſtatic.

Kunze, Schauplatz der gemeinnützigſten Maſch. I. B. Hamb. 1796.

Fünf-

Fünftes Kapitel.

Die ſchiefe Ebene und der Keil.

Erklärung 15.

§. 36. Ein Rektangel, wovon die eine Seite in einer horizontalen Ebene liegt, die andere aber mit dieſer horizontalen Ebene irgend einen Winkel macht, heißt eine mathematiſche ſchiefe Ebene. Hier iſt nur von phyſiſchen ſchiefen Ebenen die Rede, wobei die Seiten jenes Rektangels eine von den Auſſenflächen eines Körpers begrenzen.

Aufg. 3.

§. 37. AC (Dynam. fig. 13) ſey eine auf der ſchiefen Ebene den Seitenlinien des Rektangels (§. 36) parallel genommene Linie, die mit der horizontalen Ebene den Winkel BAC = β macht; auf der ſchiefen Ebene liege ein ſchwerer Körper, wovon M eine Schwerebene vorſtellen ſoll, die mit AC in einerlei lothrechten Ebene liegt; man ſoll das Verhältniß zwiſchen Kraft und Laſt für den Fall der Ruhe und für den der Bewegung beſtimmen.

Aufl. I. Des Körpers Schwerpunkt liege in o, ſein Gewicht ſey = P; die Kraft, welche ihn nach der Richtung oz unter einem Winkel opA = p halten ſoll, damit er nicht längſt CA abgleite, heiſſe S; weil von einer phyſiſchen ſchiefen Ebene die Rede iſt, ſo kommt hier Reibung auf der Ebene mit in Betrach-

tung, und wenn der Reibungskoefficient, welcher aus (§. 22. I) genommen werden kann, mit μ bezeichnet wird, ſo hat man aus (Dyn. §. 53) für den Stand der Ruhe

$$S = \frac{P.(\sin\beta - \mu.\mathrm{Cos}\beta)}{\mathrm{Cos}\,p + \mu.\sin p}$$

II. Hingegen für den Stand der Bewegung iſt die nach OZ erfoderliche Kraft zur Aufhebung des Widerſtandes

$$S = \frac{P.(\sin\beta + \mu.\mathrm{Cos}\beta)}{\mathrm{Cos}\,p - \mu.\sin p}$$

Zuſ.

§. 38. Für eine Kraft, welche die Laſt P (fig. 13. Dyn.) der ſchiefen Ebene parallel aufwärts ſchieben ſoll, iſt $p = 0$, alſo $\mathrm{Cos}\,p = 1$, $\sin p = 0$; daher

$$S = P.(\sin\beta + \mu.\mathrm{Cos}\beta)$$

Anm. Die Differentialrechnung giebt für S ein maximum, wenn $\sin\beta = \sqrt{\frac{1}{1+\mu^2}}$ genommen wird, welches bei ordentlich abgeebneten Flächen ſehr genau $\beta = 90°$, alſo $S = P$ giebt.

Erklärung 16.

§. 39. Zwei Rektangeln, als feſte Ebenen gedacht, bilden, wenn ſie an einer ihrer Seiten unter einem gewiſſen Winkel zuſammengeſetzt werden, einen mathematiſchen Keil. Hier kann nur vom phyſiſchen Keil die Rede ſeyn, d. i. von einem feſten Körper, der ein dreieckſtes Prisma bildet; abc (fig. 28) ſtellt

ihn

ihn im Durchſchnitt vor, dc ſenkrecht auf ab iſt ſeine Länge, ab die Breite ſeines Rückens.

Aufg. 4.

§. 40. Auf den Stücken ab des gleichſchenklichten Keils acb (fig. 28) drückt ſenkrecht eine Kraft S, die ihn nach dc zu bewegen ſtrebt; an den Seitenflächen widerſetzt ſich ein Widerſtand, der als eine Kraft P dem Rücken ab gleichlaufend auf die Flächen druckt, der Bewegung des Keils; der Reibungskoefficient iſt μ: man ſucht das Verhältniß zwiſchen S und P, ſowohl für den Stand der Ruhe als für den der Bewegung, woferne P den Keil ebenſo ſtark rückwärts zu treiben ſtrebt als S ihn vorwärts zu treiben ſucht.

Aufl. Weil der Widerſtand P ſowohl bei m als bei n wirkt, und die Kraft S zur Hälfte auf dcb und zur Hälfte auf dca verwendet wird, ſo iſt die Frage einerlei mit der (§. 37). Es ſoll nämlich iezt der Punkt des Widerſtandes oder der Laſt m längſt der ſchiefen Ebene cb fortgleiten, vermöge einer Kraft, die der dc gleichlaufend wirkt. Die AC (§. 37) iſt hier cb, die dortige AB iſt hier cd, das dortige β iſt hier der Winkel dcb $= \frac{1}{2}$acb, die dortige P iſt auch hier P, die dortige S iſt hier $\frac{1}{2}$S, nämlich die Hälfte der ganzen auf den Rücken des Keils wirkenden Kraft, und für den iezigen Fall iſt das dortige p $= \beta$, alſo

I. für den Stand der Ruhe

$$\tfrac{1}{2}S = \frac{P.(\sin\beta - \mu.\cos\beta)}{\cos\beta + \mu.\sin\beta}$$

 und

und

$$S = \frac{2P.(\sin\beta - \mu.\mathrm{Cos}\beta)}{\mathrm{Cos}\beta + \mu.\sin\beta}$$

und ebenſo

II. für den Stand der Bewegung

$$S = \frac{2P.(\sin\beta + \mu.\mathrm{Cos}\beta)}{\mathrm{Cos}\beta - \mu.\sin\beta}$$

Zuſ. 1.

§. 41. Beim Gebrauch der Keile iſt β gewöhnlich ein kleiner Winkel, ſo daß $\mu.\sin\beta$ in Vergleichung mit $\mathrm{Cos}\,\beta$ bei Seite geſetzt werden kann, welches dann (vor. §. II.)

$$S = 2P.(\mathrm{tang}\,\beta + \mu)$$

giebt.

In den meiſten Fällen wird $\mu > \mathrm{tg}\,\beta$. Man ſieht alſo, daß die von der Reibung herrührende Hinderniß beim Keil mehr betragen kann, als die von der Haupt- oder Nutzlaſt herrührende.

Zuſ. 2.

§. 42. Wirkt der Widerſtand nach mv ſenkrecht auf bc, ſo läßt ſich die mv in die cv und die cm zerlegen, wovon die cm ſo ſtark als eine Kraft = cs gerade abwärts der cv entgegen wirkt, ſo daß der Widerſtand nach cd noch = cv — cs = sv iſt, wenn der Widerſtand, die Reibung bei Seite geſetzt, durch mv ausgedruckt wird. Iſt alſo dieſer auf ieder Seite des Keils = Q, ſo hat man

$$\tfrac{1}{2}S : Q = sv : mv = \sin\beta : 1$$

und $$S = 2Q.\sin\beta$$

Hier-

Hierzu noch die zum Gleichgewicht mit der Reibung $\mu . 2Q$ erfoderliche Kraft $\frac{\mu . 2Q}{Coſ\beta}$ addirt, giebt

$$S = 2Q . \left(ſin\beta + \frac{\mu}{Coſ\beta}\right)$$

Iſt β ſehr klein, ſo iſt beinahe $ſin\beta = tang\beta$ und $Coſ\beta = 1$, alſo ſehr nahe

$$S = 2Q . (tang\beta + \mu)$$

wie (§. 41).

Anm. Beſondere Anwendungen dieſer Lehre ergeben ſich bei den Gewölben. Bei Maſchinen kommt ihr Gebrauch nur ſehr ſelten vor, z B. bei den Oehlmühlen. Ich rede vom Gebrauch der Theorie; der Gebrauch des Keils ſelbſten iſt ſehr gemein und bekannt genug.

Hierher gehörige Schriften.

Prony angef. Archit. Hydr. I. Th. 1. B.
Bärmann, Diſput. de cuneo, Wittenb. 1751.
Karſten, angef. Lehrbegr. III. Th.

Sechstes Kapitel.

Die Walze.

Erklärung 17.

§. 43. Zur Erleichterung des Fortſchiebens groſſer Laſten dienen vorzüglich ein Paar parallele Walzen, cylindriſche feſte Körper, deren Axen mit der Richtung des Schubs rechte Winkel machen.

Aufg. 5.

§. 44. Längſt der ſchiefen Ebene AB (fig. 29) ſoll die Maſſe DE über den untergelegten Walzen m, n, deren Durchmeſſer in Zollen = d iſt, durch eine bei D nach DE parallel mit AB angebrachte Kraft S aufwärts geſchoben werden: man ſucht das Verhältniß zwiſchen den verſchiedenen hierbei vorkommenden Geſchwindigkeiten und Kräften.

Aufl. 1. Das Beſtreben der Axen m, n parallel mit AB herabzuſinken, heiſſe B, ſo iſt das ſtatiſche Moment, womit dieſe Kraft B die Halbmeſſer mx, ny um die Bewegungspunkte x, y zu drehen ſtrebt, (für beide zuſammen verſtanden) = B . mx oder B . ny.

Die bei v und w vertheilte Kraft S hat an dieſen Stellen zuſammengenommen das ſtat. Umdrehungsmoment S . vx oder S . wy, alſo für den Fall des Gleichgewichts zwiſchen S und B

$$B . mx = S . vx$$

und

$$B = \frac{vx}{mx} . S = 2 . S$$

2. In iedem Augenblick, da die Axe einer Walze eine neue Ortsänderung beginnt, bewegt ſich der Mittelpunkt m (oder n) im Element eines Bogens, deſſen Halbmeſſer xm und Mittelpunkt x iſt; zu gleicher Zeit muß ſich aber die Stelle v als Endpunkt von xv in dem Elemente eines Bogens fortbewegen, deſſen Halbmeſſer xv und Mittelpunkt der vorige x iſt, und die Ortsänderung von v muß alſo doppelt ſo groß ſeyn als die von m.

Es iſt daher die Geſchwindigkeit der Berührungs-punkte v, w oder der Maſſe DE doppelt ſo groß als die der Axen m, n. Die Maſſe DE iſt z. B. ſchon um 6 Zolle vorwärts gekommen, wenn die Walzen erſt um 3 Zolle fortgerückt ſind.

3. Das Gewicht einer Walze ſey = q, das der Maſſe DE = Q, ſo wäre vermöge no. 2. ohne die Reibung $S = (Q + \frac{1}{2}p) . \sin\beta$, und die Reibung $= (Q + p) . \mu . \mathrm{Cos}\beta$, alſo dieſe addirt

$$S = (Q + \tfrac{1}{2}p) . \sin\beta + (Q + p) . \mu . \mathrm{Cos}\beta$$

weil aber μ ſich auf gleitende Reibung bezieht, und hier Walzenreibung (§. 22) eintritt, ſo hat man

$$S = (Q + \tfrac{1}{2}p) . \sin\beta + (Q + p) . \frac{d + 1}{(d^2 + 1) . 1{,}8} . \mu . \mathrm{Cos}\beta$$

wo μ für gleitende Reibung zu verſtehen iſt.

Zuſ. 1

§. 45. Die Walze könnte auch da, wo die Laſt DE aufliegt, einen kleinern Durchmeſſer haben als da wo ſie über die ſchiefe Ebene AB hinlauft, wie (fig. 30), indem man ihre beiden Ende nur in Scheiben befeſtigen dürfte.

In dieſem Falle ſollen die Buchſtaben ihre vorige Bedeutung behalten, nur der Halbmeſſer der Scheiben ſey = R, ihr Durchmeſſer = D, der Halbmeſſer mv = r, die Geſchwindigkeit der Axen m, n = c, der Berührungsſtellen v, w = C, ſo wird ietzt, wie vor. §. no. 1.

$$\text{I. } B = \frac{vx}{mx} . S$$

$$= \frac{R + r}{R} . S = \frac{D + d}{D} . S$$

und, wie vor. §. no. 2,

$$c : C = R : R + r$$

alſo

$$\text{II. } C = \frac{R+r}{R} . c = \frac{D+d}{D} . c$$

Auch hat man, wie vor. §. no. 3,

$$\text{III. } S = (Q + \frac{D}{D+d} . p) . \sin\beta + \frac{R+r}{2r} . (Q+p) . \frac{D+1}{(D^2+1).1,8} . \mu . \mathrm{Cos}\beta$$

da dann p das Gewicht der Walzen ſamt den Scheiben bezeichnet. Man kann dafür auch

$$S = (Q + \frac{D}{D+d} . p) . \sin\beta + \frac{D+d}{2d} . (Q+p) . \frac{D+1}{(D^2+1).1,8} . \mu . \mathrm{Cos}\beta$$

ſchreiben.

Dieſe Ausdrücke ſind allgemeiner als die des vor. §. und geben jene, indem man $D = d$ ſetzt.

Führt alſo die Walze beſondere Scheiben, ſo iſt die zum Verſchieben erfoderliche Kraft S gröſſer, hingegen der Unterſchied zwiſchen den beiden Geſchwindigkeiten C und c kleiner als bei Weglaſſung der Scheiben.

Der Unterſchied dieſer Geſchwindigkeiten iſt nämlich allgemein

$$C - c = \frac{D+d}{D} . c - c = \frac{d}{D} . c$$
$$= \frac{d}{D} . \frac{D}{D+d} . C = \frac{d}{D+d} . C$$

alſo

alſo deſto kleiner, ie gröſſer D in Vergleichung mit d iſt, aber er kann nie = o werden. Für D = 2d iſt er noch

$$= \frac{d}{2d+d} \cdot C = \tfrac{1}{3} C.$$

Zuſ. 2.

§. 46. Weil C—c oder $\frac{d}{D+d} \cdot C$ die Geſchwindigkeit bezeichnet, mit welcher die Laſt DE bei v und w über die Axen m und n wegrückt, ſo läßt ſich hieraus auch die Stelle z (fig. 30) beſtimmen, bis zu der die Axe m fortrücken muß, bevor das Ende a der Laſt DE über derſelben in α ankommt.

Es ſey nämlich die hierzu erfoderliche Zeit = t, av = λ, vα = x, ſo iſt

$$v\alpha = mz = t \cdot c$$

$$a\alpha = t \cdot C = t \cdot \frac{D+d}{D} \cdot c$$

Es iſt aber auch $a\alpha = av + v\alpha = \lambda + t \cdot c$ alſo

$$t \cdot \frac{D+d}{D} \cdot c = \lambda + t \cdot c$$

und

$$\frac{d}{D} \cdot t \cdot c = \lambda$$

oder

$$x = t \cdot c = \frac{D}{d} \cdot \lambda$$

Demnach

$$a\varkappa = \lambda + x = \frac{D+d}{d}.\lambda$$

Wäre z. B. D = d, ſo hätte man

$$a\varkappa = \frac{2d+d}{d} = 3.\lambda$$

Für D = n.d wäre

$$a\varkappa = (n+1).\lambda$$

Zuſ. 3.

§. 47. Es iſt bei der Fortführung auf Walzen eine Unbequemlichkeit, daß die hintere Walze, ſo oft die Laſt DE um den Weg $a\varkappa$ fortgerückt iſt, wieder von neuem vornen bei E untergeſchoben werden muß. Man kann daher zu wiſſen verlangen, wie groß der Durchmeſſer D der Scheiben genommen werden müſſe, damit $a\varkappa$ eine verlangte Länge $\mathfrak{L}$ erhalte?

Die Gleichung $\mathfrak{L} = a\varkappa = \frac{D+d}{d}.\lambda$ giebt

$$D = \frac{\mathfrak{L}.d}{\lambda} - d = \frac{\mathfrak{L}-\lambda}{\lambda}.d$$

oder auch, wenn $\mathfrak{L} = m.\lambda$ iſt,

$$D = \frac{m.\lambda-\lambda}{\lambda}.d = (m-1).d$$

Wäre die ganze Länge DE = a, und $\lambda = \frac{1}{2}a$, ſo hätte man

$$D = \frac{\mathfrak{L}-\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a}.d = \frac{2\mathfrak{L}-a}{a}.d$$

oder, wenn $\mathfrak{L} = N.a$ ſeyn ſollte,

$$D = (2N-1).d$$

woferne $\lambda = \frac{1}{2}a$ wäre.

Für $\mathfrak{L} = 2.a$ müßte $D = (2.2-1).d = 3.d$ ſeyn, wenn die hintere Walze in der Mitte von der Länge der Laſt angebracht würde.

Anm. Bei unſeren Fuhrwerken ruht die Laſt auf Axen, die an beiden Enden walzenförmig geſtaltet ſind, ſich aber nicht drehen können. Dagegen werden dieſe Endſtücke in Räder eingeſchoben, die um die unbewegliche Axe herumlaufen können. Hier kann ich mich in keine weitere Betrachtungen einlaſſen.

Die Theorie der Walze iſt von andern Schriftſtellern ganz übergangen worden; die hier vorgetragene dient zugleich zur Berichtigung mancher Sätze bei Hrn. Kunze.

Hierher gehörige Schriften.

Kunze, angef. Schauplatz der gemeinnütz. Maſch.

Fuſs, Prof. der höh. Math. in St. Petersburg, Verſuch einer Theorie des Widerſtandes zwey- vnd vierrädriger Fuhrwerke, auf Fahrwegen ieder Art — eine Preiſsſchrift, welche (1797) von der königl. Däniſchen Akad. d. W. zu Kopenhagen den erſten Preiſs erhalten hat. — Ich geſtehe, daß der doppelte Namen Preißſchrift und Fuß in mir Erwartungen erregten, die ich auf keine Weiſe befriedigt gefunden habe.

Eickemeyer Abhandlung über die Preißfrage der Gött. Soc. d. W. „Wie ſind die Heerſtraſſen in „Sandgegenden, wo Steine fehlen, am beſten und „wohlfeilſten anzulegen und zu unterhalten?

Man findet dieſe Abhandl. auch im Hannöver. Magazin 1788. 6—10s St. und in Krünitzens Werke von den Landſtraſſen und Chauſſeen. Berlin 1794.

Sie-

Siebentes Kapitel.

Die Schraube.

Erklärung 18.

§. 48. Man denke ſich ein rechtwinklichtes Dreieck um einen Cylinder, deſſen Umfang der Grundlinie des Dreiecks gleich iſt, ſo herumgelegt, daß die Grundlinie des Dreiecks dem Umfang von der kreisförmigen Grundfläche des Cylinders parallel lauft, ſo bildet die Hypothenuſe bei dieſer Krümmung des Dreiecks eine Schraubenlinie. Denkt man ſich zwei ſolche einander gleichlaufende Schraubenlinien und zwiſchen beiden eine Vertiefung, ſo daß der ſenkrechte Querſchnitt dieſer Vertiefung überall gleichgroß iſt und entweder ein Rektangel oder ein gleichſchenklichtes Dreieck bildet, ſo heißt die Vertiefung ein Schraubengang; der Cylinder, um welchen der Schraubengang geführt wird, heißt auch die Spindel, und eine Spindel mit mehreren ſolchen Schraubengängen eine Schraube. Die ſchraubenförmige Wand, wodurch die verſchiedenen Schraubengänge von einander abgeſondert werden, heißt das Gewinde. Eine cylindriſche Höhlung, die an ihrer cylindriſchen Wand mit ebenſolchen ſchraubenförmigen Vertiefungen verſehen iſt, in welche ienes Gewinde der Schraube paßt, heißt die Schraubenmutter, auch ſchlechtweg Mutter.

Entweder iſt die Schraube unbeweglich und die Mutter dreht ſich um ſie herum, oder es iſt umgekehrt. Beides iſt für die Theorie gleichgültig. Eine in der Mitte der Vertiefung, der äuſſeren Schraubenlinie parallel, auf dem Gewinde gezogene Linie will ich die mitt-

mittlere Schraubenlinie nennen, ihre Entfernung von der Spindelaxe den mechaniſchen Halbmeſſer der Schraube.

Aufg. 6.

§. 49. AB (fig. 31) ſey eine unverſchiebbare feſte Maſſe mit einer Mutter, zu welcher die Schraube M gehört, die durch einen Hebelarm (Dreher) dc herumgedreht werden kann. In der verlängerten Axe de der Schraube iſt eine Laſt Q angebracht, die nach dc zieht; bei c wird eine Kraft P zur Umdrehung der Schraube angebracht, die ſo gedreht werden ſoll, daß dadurch die Schraube ſamt der Laſt Q ſich von e nach d zu bewegen genöthiget wird: man ſoll angeben, wie die hierbei vorkommenden Beſtimmungsſtücke von einander abhängen.

Aufl. 1. Die Höhe eines Schraubenganges heiſſe h, der mechaniſche Halbmeſſer der Schraube r, die Länge des Drehers dc ſey = R, der Reibungskoefficient = μ; ſo verhält ſich die Sache ſo, als ob in iedem Augenblick der Umdrehung eine Laſt auf einer ſchiefen Ebene wie AC (Dyn. fig. 13) aufwärts geſchoben werden ſollte, deren Grundlinie AB = 3,14.2r = 6,28.r und deren Höhe BC = h wäre, deren Neigungswinkel β alſo als gegeben angeſehen werden kann.

Die Kraft, welche ſchiebt, hat hier eine der Grundlinie AB parallele Richtung, und wenn alſo R = r wäre, ſo wäre ſie (§. 37), p hier = β geſetzt und Q ſtatt P geſchrieben,

I. für

I. für den Stand des Gleichgewichts

$$= \frac{Q.(\sin\beta - \mu.\operatorname{Cos}\beta)}{\operatorname{Cos}\beta + \mu.\sin\beta}$$

Man hat alſo

$$P = \frac{r.(\sin\beta - \mu.\operatorname{Cos}\beta)}{R.(\operatorname{Cos}\beta + \mu.\sin\beta)}.Q$$

2. Weil hier $\sin\beta = \frac{h}{\sqrt{(h^2 + 6,28^2.r^2)}}$

und $\operatorname{Cos}\beta = \frac{6,28.r}{\sqrt{(h^2 + 6,28^2.r^2)}}$ iſt, ſo hat man auch

$$P = \frac{r.\left(\frac{h - \mu.6,28.r}{\sqrt{(h^2 + 6,28^2.r^2)}}\right)}{R.\frac{6,28.r + \mu.h}{\sqrt{(h^2 + 6,28^2.r^2)}}}.Q$$

oder

$$P = \frac{r.(h - \mu.6,28.r)}{R.(6,28.r + \mu.h)}.Q$$

und

$$Q = \frac{R.(6,28.r + \mu.h)}{r.(h - \mu.6,28.r)}.P$$

II. Für den Stand der Bewegung wäre dem Widerſtande gleiche Kraft (§. 37)

$$P = \frac{r.(h + \mu.6,28.r)}{R.(6,28.r - \mu.h)}.Q$$

und

$$Q = \frac{R.(6,28.r - \mu.h)}{r.(h + \mu.6,28.r)}.P$$

Zuſ.

Zuſ. 1.

§. 50. Weil vermöge (vorig. §. I. Fall) die Schraube in Ruhe bleibt, woferne bei c (fig. 31) eine Kraft $P = \frac{r.(h - \mu . 6,28 . r)}{R.(6,28 . r + \mu . h)} . Q$ angebracht wird, dieſer Werth von P aber = o wird, wenn h $= \mu . 6,28 . r$ iſt, ſo folgt:

> Wenn längſt der Spindelaxe de ein Druck Q auf die Schraube wirkt, ſo iſt zur Erhaltung der Ruhe oder zur Verhinderung der Umdrehung der Schraube gar keine Kraft bei c erfoderlich, woferne $h = \mu . 6,28 . r$ iſt. Die bloße Reibung verhindert alsdann ſchon die Umdrehung, es mag übrigens Q ſo groß man will genommen werden.

Wäre $\mu . 6,28 . r > h$ oder $\mu > \frac{h}{6,28 . r}$, ſo wäre die Hinderniß der Reibung gröſſer, als ſie zu ſeyn brauchte, um die Bewegung zu verhindern. Daher wird P in dieſem Falle verneint, d. h. es dürfte bei c ſogar eine Kraft

$$= \frac{r.(\mu . 6,28 . r - h)}{R.(6,28 . r + \mu . h)} . Q$$

dem Drucke Q noch zu Hülfe kommen, ohne daß Bewegung erfolgte.

Zuſ. 2.

§. 51. Aus (§. 49. II.) erhellet, daß der Nenner im Werthe von P für den Fall der Bewegung = o wird, wenn $6,28 . r = \mu . h$ iſt. In dieſem Falle müßte alſo $P = \infty$ ſeyn.

Wenn

Wenn demnach $6,28 \cdot r = \mu \cdot h$, oder $\frac{h}{r} = \frac{6,28}{\mu}$, oder auch $\mu = \frac{6,28 \cdot r}{h}$ wäre, ſo könnte keine endliche Kraft die Schraube drehen; um ſo weniger, wenn $\mu > \frac{6,28 \cdot r}{h}$ wäre.

Anm. 1. Die Schrauben werden häufig zu Preſſen gebraucht, da dann die an einander gepreßten Maſſen vermöge ihrer Elaſticität der Bewegung der Schraube widerſtehen und eine entgegengeſetzte Bewegung hervorzubringen ſtreben, wie bei den Preſſen in den Papiermühlen. Soll nun bei dieſen, ſobald die Kraft bei s zu wirken aufhört, die Schraube von ſelbſten zurückweichen, ſo muß

$$\mu < \frac{h}{6,28 \cdot r}$$

ſeyn. Bei nur erwähnten Preſſen iſt dieſes ein gewöhnlicher Fall.

Statt der Umdrehung der Schraubenſpindel kann auch die Umdrehung einer Mutter $\alpha\beta$ (fig. 32) dienen, entweder einen Körper (z. B. AB) niederzudrucken und an einen andern anzupreſſen, oder auch eine Laſt um ein weniges zu erheben. Zur Umdrehung der Mutter dient ein Schlüſſel vwr.

Mit einem Hebel verbunden kann eine ſolche Schraube ungeheure Laſten zu heben dienen. Es ſey z. B. AB ein feſter Balken mit einer Oeffnung mn, durch welche das Gewinde einer Stange sk willig durchgeht; cd ein Balken, der ſich um c drehen läßt, bei s von der Stange ek getragen wird, und bei o mit einer Laſt beſchwert iſt.

Dieſe Laſt wird zugleich mit der Schraube es erhoben, wenn man die Mutter $\alpha\beta$ mit dem Schlüſſel vr ſo dreht, wie geſchehen müßte, um ſie abwärts zu ſchrauben; die Mut-

Mutter folgt bei dieſer Umdrehung den abwärts gehenden Gängen des Gewindes, das daher immer höher über die an einer Stelle bleibende Mutter hervortritt.

Iſt die Laſt bei $z = M$, co die Entfernung ihres Schwerpunkts $= l$, $cs = \mathfrak{L}$, ſo druckt in s eine Laſt Q $= \frac{l}{\mathfrak{L}} . M$, dazu kommt die Reibung, welche die Mutter $\alpha\beta$ an ihrer auf dem Balken AB liegenden Grundfläche leidet, die $= \mu . Q = \mu . \frac{l}{\mathfrak{L}} . M$ iſt.

Die Entfernung qr des Angriffspunkts r von der Spindelaxe ſey $= R$, die mittlere Entfernung der Reibung an der Grundfläche der Mutter von der Spindelaxe $= d$, ſo iſt mit ihr eine Kraft an $r = \frac{d}{R} . \mu Q = \frac{d}{R} \frac{\mu . l}{\mathfrak{L}} . M$ im Gleichgewicht, und man erhält für den Fall der Umdrehung (§. 49. II)

$$P - \frac{\mu . d . l}{R . \mathfrak{L}} . M = \frac{r . (h + \mu . 6{,}28 . r)}{R . (6{,}28 . r - \mu . h)} . \frac{l}{\mathfrak{L}} . M$$

alſo

$$P = \left(\frac{r . (h + \mu . 6{,}28 . r)}{R . (6{,}28 . r - \mu h)} + \frac{\mu . d}{R}\right) . \frac{l}{\mathfrak{L}} . M$$

Solche Vorrichtungen kommen bei Mühlen vor, wo es auf eine geringe Erniedrigung oder Erhöhung der oberen Mühlſteine oder Läufer ankommt.

In unzählichen Fällen dienen die Schrauben bloß, um äuſſerſt kleine Verrückungen durch ſie zu bewirken oder ſehr kleine Maaße ſolcher Verrückungen in groſſer Schärfe zu beſtimmen, ſo daß es dabei auf Vergröſſerung der Kraft gar nicht ankommt. Dann heiſſen ſie Mikrometer.

Anm. 2. Daß die Fläche des Gewindes, die ſich an der Mutter reibt, keine ebene Fläche ſeyn könne, ſieht man ohne vieles Nachdenken ein. Die der Spindelaxe

 näher

näher liegende innere Grenzlinie dieſer Schraubenfläche iſt bei iedem Schraubengang kleiner als die weiter von der Axe abliegende äuſſere Grenzlinie derſelben Fläche. Die äuſſere braucht eine gröſſere Länge um mit der inneren auf einerlei Höhe zu ſteigen, ſie ſteigt alſo unter einem kleineren Winkel. So hat alſo die Schraubenfläche in ieder von der Spindelaxe weiter entfernten Stelle eine andere und zwar eine geringere Neigung gegen eine auf die Axe ſenkrechte Fläche als in einer der Spindelaxe näher liegenden Stelle.

Inzwiſchen ändert dieſer Umſtand die obige Theorie nicht ab. Wird nämlich die Reibung bei Seite geſetzt, ſo behält man (§. 49. I u. II)

$$P = \frac{r.h}{R.6{,}28.r}.Q = \frac{h}{6{,}28.R}.Q$$

daß alſo der Werth von r auf die Beſtimmung von P gar keinen Einfluß hat, wenn die Reibung bei Seite geſetzt wird.

Mit Rückſicht auf die Reibung würde die Formel für P freilich eine andere Geſtalt erhalten. Es iſt dann nicht ganz gleichgültig, ob man den Werth von P, welchen der mittlere Halbmeſſer giebt oder das Mittel aus allen Werthen von P nimmt, welche zu den verſchiedenen Halbmeſſern, die man ſtatt r zu ſetzen hätte, gehören. Letzteres ſollte eigentlich geſchehen.

Aber dieſes wäre für die Maſchinenlehre eine ganz unnütze Korrektion. Hier iſt allemal μh nur ein kleiner Theil von 6,28.r und daher für die beiden Fälle (§. 49) beinahe

$$P = \frac{r.(h \pm \mu.6{,}28.r)}{R.6{,}28.r}$$

$$= \frac{h \pm \mu.r}{R}$$

wo es gleichgültig iſt, ob man P für alle verſchiedene Halbmeſſer berechnet und dann das Mittel aus allen gefun-

fundenen Werthen von P nimmt oder ob man P ſogleich nach dem mittleren Halbmeſſer r berechnet.

Wenn aber der mittlere Halbmeſſer ſtatt r gebraucht den wahren Werth von P ſchon ſo genau giebt, wann im Nenner das Glied μh ganz wegbleibt, ſo müſſen die Formeln (§. 49) der Wahrheit noch um ſoviel näher kommen. Hierzu kommt nun noch die Betrachtung, daß dieſe Korrektion bloß den Einfluß der Reibung, alſo ein Beſtimmungsſtück betreffen würde, das ohnehin immer nur beiläufig in Rechnung kommen kann.

Schraube ohne Ende.

Erklärung 19.

§. 52. Die Verbindung einer mit drei Schraubengängen verſehenen Welle mit einem verzahnten Rade, deſſen Zähne eine den Schraubengängen angemeſſene ſchiefe Stellung haben, heißt eine Schraube ohne Ende (fig. 33).

Kraft und Laſt können dabei auf mancherlei Weiſe angebracht ſeyn. Hier fig. 33 hat man die einfachſte Einrichtung. Der eine Zapfen der Schraubenſpindel iſt bei n und noch einmal bei m rechtwinklicht gebrochen, woraus ſich die Kurbel nmo ergiebt, an deren Griff mo ein Arbeiter drehen kann. An der Welle des verzahnten Rades iſt bei d die Laſt Q angebracht, die da an einem Seile herabhängt. Indem die Kurbel gedreht wird, wird Q aufgewunden.

Aufg. 7.

§. 53. Das Verhältniß zwiſchen der an der Kurbel bei mo (fig. 33) angebrachten Kraft P und der Laſt M zu beſtimmen.

Aufl. Die Beſtimmung iſt mit obiger (§. 51. Anm. 1) ganz einerlei. Es iſt nämlich

das dortige co hier cd = l
— dortige cs hier cv = $\mathfrak{l}$
der mech. Halbm. der Schraube = r
das dortige rq hier mn = R
das dortige d bezieht ſich hier auf die mittlere Entfernung der Reibung, welche die Spindel wegen des horizontalen Drucks an ab bei xy leidet.
die Buchſtaben h, μ bedeuten auch hier die Höhe eines Schraubengangs und den Reibungskoefficient.

Man hat alſo in dieſer Bedeutung der Buchſtaben auch hier

$$P = \left(\frac{r.(h+\mu.6,28.r)}{R.(6,28.r-\mu h)} + \frac{\mu.d}{R}\right).\frac{l}{\mathfrak{l}}.M$$

Dabei iſt auf die Reibungen, welche die Zapfen der Schraube und des verzahnten Rades in ihren Pfannen leiden, keine Rückſicht genommen worden, welches auch für die Ausübung unnöthig iſt.

Wenn inzwiſchen der Halbmeſſer der Schraubenzapfen mit ϱ, der Halbm. der Zapfen des verzahnten Rades mit ϱ' bezeichnet wird, ſo darf man nur

$$M + \frac{\varrho'}{l}\mu M \text{ ſtatt } M$$

$$P - \frac{\varrho}{R}\mu P \text{ ſt. } P$$

ſchreiben.

So giebt ſich

$$P=\left(\frac{r.(h+\mu.6{,}28.r)}{R.(6{,}28.r-\mu.h)}+\frac{\mu.d}{R}\right).\frac{1+\frac{\varrho'}{l}\mu}{1-\frac{\varrho}{R}\mu}.\frac{1}{\zeta}.M$$

Anm. 1. Der Gebrauch dieſer Formel ſetzt voraus, daß die Kraft bei der Umdrehung immer einerlei ſtatiſches Moment behalte, welches bei Kurbeln eigentlich nicht ſtatt findet. Da aber die Kurbel und überhaupt die (fig. 33) angenommene Anbringung der Kraft und der Laſt gar nicht zum Weſen der Schraube ohne Ende gehört, ſo verſpare ich die beſonderen Bemerkungen in Bezug auf die Veränderlichkeit des ſtat. Mom. bei der Kurbel zur Lehre von den Haſpeln (ſ. §. 56).

Anm. 2. Man kann die Schraube auch in ein verzahntes Rad, das horizontal liegt, alſo ſich um eine lothrechte Axe dreht, eingreifen laſſen. Giebt man dieſer lothrechten Spindel ein Gewinde, das in eine längſt der Spindelaxe verſchiebbare Mutter eingreift, ſo kann durch die Schraube ohne Ende dieſe Mutter mit verſtärkter Kraft lothrecht erhoben werden. Hierauf gründet ſich die von Hrn. Bürja angegebene und nachher von Hrn. Oberländer abgeänderte Wagenwinde.

Hierher gehörige Schriften.

Karſten, angef. Lehrbegr. III. Th.

Kaeſtner, Diſſert. mathem. et phyſ. Altenb. 1771. die 6te.

Id. De ſuperficie cochleae, in der Verſammlung der königl. Soc. d. W. zu Gött. vorgeleſen d. 16ten May 1795. — Göttingiſche Anzeigen von gelehrten Sachen 1795. 89s St. S. 889.

Kunze, angef. Schauplatz I. Band.

Prony, angef. Archit. Hydraul. I. B.

Hoffmann, Beſchreibung und Abbildung einer Wagenwinde von auſſerordentlicher Wirkſamkeit, Leipz. 1800.

Achtes Kapitel.

Von den Haſpeln.

Erklärung 20.

§. 54. Jede Welle mit einem darum gelegten Rade oder mit eingeſteckten Aermen, bei deren Umdrehung ein Seil, woran ſich die Laſt befindet, aufgewunden wird, heißt im allgemeinen Sinne ein Haſpel. In der engern Bedeutung, wovon in dieſem Kap. die Rede iſt, werden nur dieienigen Wellen der vorbeſchriebenen Art hierher gerechnet, welche durch Menſchenhände herumgedreht werden.

Hierhin gehören

der Kreuzhaſpel, eine wagrechte Welle mit zwei kreuzweiß durchgeſteckten Hebelſtangen, welche 4 Aerme bilden. Es können auch zwei ſolche Kreuze an der Welle angebracht ſeyn.

Der Hornhaſpel, eine wagrechte Welle mit einer am einen oder an iedem Ende eingeſteckten Kurbel.

Das Hornrad, eine wagrechte Welle mit einem darum gelegten Rade, in deſſen Kranze ſtarke

ſtarke Zapfen oder Aerme nach der Richtung des Halbmeſſers eingeſteckt ſind.

Das Spillenrad, eine wagrechte Welle mit einem darum gelegten Rade, in deſſen Kranze ſtarke Zapfen oder Spindeln ſenkrecht auf den Halbmeſſer eingeſteckt ſind.

Das Kettenrad, ein Rad an einer Welle, das an ſeinem Umfange mit Zacken verſehen iſt, und durch eine umgelegte Kette ohne Ende herumgedreht wird.

Die Erdwinde, völlig wie der Kreuzhaſpel, nur daß die Welle lothrecht ſteht und die Aerme gewöhnlich länger ſind als am Kreuzhaſpel.

Bei der Erdwinde geht der Arbeiter mit im Kreiſe herum; bei den übrigen Haſpeln bleibt er an einer Stelle ſtehen.

Anm. Die Theorie dieſer einfachen Haſpeln iſt, die des Hornhaſpels ausgenommen, eine ſo leichte Anwendung der Theorie des Hebels, daß es unnöthig iſt, mich in die Betrachtung eines ieden Haſpels insbeſondere einzulaſſen. Nur der Hornhaſpel verdient wegen der Kurbeln und wegen ſeines allgemeinen und beſtändigen Gebrauchs bei den Bergwerken noch einige beſondere Bemerkungen, daher ich mich in den folgenden Sätzen bloß auf dieſen einſchränke. Es wird dabei vorausgeſetzt, daß iedesmal zwei Kübel von gleicher Beſchaffenheit einander entgegengeſetzt ſind, ſo daß der eine allemal leer niedergeht, indeß der andere gefüllt hinauf gehaſpelt wird.

Erklärung 21.

§. 55. Das mit dem Zapfen verbundene rechtwinklicht gebogene Eiſen heißt auch das Horn (die

Kurbel). Der Einmänniſche Haſpel führt, wie fig. 34, nur am einen Zapfen ein ſolches Horn, der zweimänniſche auf ieder Seite ein ſolches, der dreimänniſche führt auf der einen Seite ein doppeltes Horn (fig. 35), ſo daß ein Haſpelknecht an mn und gleich neben ihm ein anderer an op angreifen kann; ieder Griff mn und oq lauft in einem Kreiſe herum, deſſen Halbmeſſer qn = qo iſt. Der viermänniſche führt auf ieder Seite ein ſolches doppeltes Horn.

Die Zapfen laufen in den Einſchnitten zweier Haſpelſtützen, in welche vorher die Pfud- oder Pfadeiſen eingelegt werden.

Die Haſpelſtützen ſtehen auf einem Gevier, deſſen kürzere Hölzer ab, cd, worauf die Stützen ſtehen, die Pfülbäume, die längeren ac, bd die Hängebäume genennt werden. Die Welle heißt hierbei gewöhnlich der Rundbaum.

Anm. Die Länge des Rundbaums beträgt gewöhnlich 1 Lachter; ſein Durchmeſſer bei einem 20 Lachter tiefen Schacht, wenn der Haſpel zweimänniſch iſt, gegen 9 Rhl. Zolle, bei einem 30 Lachter tiefen Schacht gegen 11 Zolle. Im erſtern Falle beträgt die Ladung des Kübels etwa 125 Pfd, im letzteren weniger. Der leere Kübel wiegt etwa 25 Pfd.

Eigentlich muß aus den übrigen Beſtimmungsſtücken iedesmal der Durchmeſſer des Rundbaums beſtimmt werden.

Ein Haſpelſeil zu $\frac{1}{2}$ Zoll im Durchmeſſer wiegt in Freyberg bei 1 Lachter Länge $9\frac{1}{2}$ bis 10 Lothe.

Die Höhe der Haſpelſtützen von der Fußſohle des Arbeiters bis zum Pfudeiſen kann etwa $\frac{2}{3}$ von der ganzen Länge des Arbeiters betragen.

Der platte viereckt-piramidiſche Theil des Zapfens greift etwa 8 Zoll tief in den Rundbaum ein; der Arm oder das Knie oder der Bug ms am Horn iſt etwa $2\frac{1}{2}$ Zolle

Zolle breit und $\frac{1}{2}$ Zoll dick und 16 bis 18 Zolle lang oder hoch. Der Griff mn, op hat etwa $\frac{5}{4}$ Zolle im Durchmeſſer und eine Länge von etwa 18 bis 22 Zollen.

Erfahrung.

§. 56. Es iſt nicht gleichgültig, was die Aerme der Haſpelhörner bei einem zwei- drei- viermänniſchen Haſpel für Winkel mit einander machen. Verſuche haben gezeigt, daß die Einrichtung am vortheilhafteſten ſey, wenn die verſchiedenen Aerme

beim 2männiſchen einen W. von $135° = 90° + 45°$
— 3 —— —— — $120° = \frac{1}{3} \cdot 360°$
— 4 —— —— — $90° = \frac{1}{4} \cdot 360°$

gegen einander machen.

So darf alſo der doppelte Arm no (fig. 35) beim 3männiſchen Haſpel keine geradausgehende Platte oder Stange ſeyn, ſondern qo muß mit qn einen Winkel von 120° machen, wie fig. 25, und das einfache Horn am andern Ende des Haſpels wird ſo eingeſetzt, daß ſein Arm die Lage qr bekommt, die ſowohl mit qn als mit qo gleichfalls 120° macht. Beim 2männiſchen werden die beiden einfachen Hörner ſo eingeſetzt, daß der Arm qn des einen mit dem qr des andern einen Winkel nqr = 135° macht.

Beim 4männiſchen können beide doppelte Aerme no geradausgehen, nur daß ſie kreuzweiß eingeſetzt werden.

Wenn dieſes geſchieht, ſo kann wegen der abwechſelnden Ruhe, welche die Füllungszeit geſtattet, angenommen werden, daß ein Haſpelknecht von mittlerer Stärke mit einer Kraft ſenkrecht auf den Arm des Horns wirke, welche durchaus zu 26 Nürnb. ℔ angeſchla-

 geſchla-

geſchlagen werden kann, und mit einer Geſchwindigkeit am Griffe, welche durchaus $2\frac{1}{4}$ Rhl. Fuße beträgt. ſ. die Anm. zum folg. §.

Aufg. 8.

§. 57. **Eine Gleichung zwiſchen den verſchiedenen Beſtimmungsſtücken am Hornhaſpel zu finden** (fig. 34).

Aufl. Die am Horn wirkende Kraft heiſſe P, das Gewicht eines leeren Kübels $\frac{1}{2}$q, das der Ladung M, welches die Nutzlaſt iſt, das Gewicht des Rundbaums für ſich = A, das der Zapfen und der Hörner = B, das des Seils auf die Länge von 1 Lachter = k, die Tiefe des Schachts von den Pfudeiſen bis zur Sohle des Schachts in Lachtern = N, die Länge des um den Rundbaum beſtändig aufgewundenen Seilſtücks = n in Lachtern, der mechaniſche Halbmeſſer des Rundbaums, d. h. der von der Axe deſſelben bis zur Mittellinie der Seilenden gemeſſen, an welchen die Kübel befeſtigt ſind, = r, die Höhe der Kurbel, d. h. die Armlänge am Horn = R, der Halbmeſſer der Zapfen = ϱ, der Koefficient der Zapfenreibung = μ;

1. ſo hat man, $M + q + A + B + N.k = Q$ geſetzt,

die Reibung an den Zapfen $= \mu . Q$

Es bleibt alſo, die Steifigkeit des Seils bei Seite geſetzt, für die übrige Wirkung der angebrachten Kraft noch übrig

$$P - \frac{\varrho}{R} . \mu . Q$$

die

die vom Druck der Kraft ſelbſt herrührende Reibung ſetze ich bei Seite.

2. Die leeren Kübel erhalten einander im Gleichgewicht, aber die Seilſtücke, woran die Kübel hängen, bleiben während der Bewegung der Kurbel nicht gleichlange, alſo nicht im gegenſeitigen Gleichgewicht. Das Gewicht des Seils kommt der Kraft, ſobald der gefüllte Kübel über die Hälfte ſeines Wegs zurückgelegt hat, ebenſo zu Hülfe, wie es ihr, ſolange er noch nicht die Hälfte zurückgelegt hat, zur Laſt fällt. Inzwiſchen können hier dieſe entgegengeſetzten Wirkungen nicht als einander aufhebend betrachtet werden, weil doch die Arbeiter im Stande ſeyn müſſen, den vollen Kübel aus ſeiner größten Teufe herauf zu ziehen, wobei das ganze Gewicht N . k mit zur Laſt kommt. Die Berechnung muß daher ſo angeſtellt werden, als wäre die Ladung = M + N . k.

3. Soll nun dieſe Laſt mit der Kraft (no. 1) im Gleichgewicht ſeyn, ſo muß

$$r.(M+N.k) = R.(P - \frac{\varrho}{R}.\mu Q)$$

ſeyn.

4. Um Q zu haben, muß man den Werth von A wiſſen, den man aber ſchon zum voraus beiläufig überſchlagen kann, weil es keinen beträchtlichen Fehler gäbe, wenn man auch A = o ſetzte.

5. Man hat alſo

$$r = \frac{P - \frac{\varrho}{R}.\mu.Q}{M+N.k}.R$$

Es

Es iſt aber der wirkliche Halbmeſſer des Rundbaums kleiner als r, nämlich bei einer einfachen Umwindung des Seils $= r - \frac{1}{2}\delta$, wenn δ der Durchmeſſer des Seils iſt. Demnach, wenn die Umwindungen des Seils nicht mehrmalen über einander zu liegen kommen,

der wirkliche Durchmeſſer des Rundbaums $= \frac{P - \frac{\varrho}{R} . \mu Q}{M + N.k} . 2R - \delta$

Ebendieſer Durchmeſſer läßt ſich aber auch für die Fälle beibehalten, da wegen der beträchtlichen Teufe des Schachts das Seil mehrmalen über einander gewunden werden müßte, weil bei der zweiten Lage von Umwindungen gegen die gröſſere Entfernung der Stelle, an welcher das Seil zieht, der Umſtand zu ſtatten kommt, daß alsdann die Laſt auch ſchon um das doppelte Gewicht des ſchon aufgewundenen Seilſtücks erleichtert iſt.

6. Die Steifigkeit des Seils mit betrachtet, muß man bei gebrauchten Seilen, (§. 28) im Mittel genommen,

$$M + \frac{\delta^{1,4}.(2,45 + 0,053.(M + \frac{1}{2}N.k))}{r}$$

im vorigen Ausdruck ſtatt M ſchreiben.

Setzt man dafür der Kürze wegen $M + \frac{E}{r}$, ſo hat man (no. 3)

$$r.(M + \frac{E}{r} N.k) = R.(- \frac{\varrho}{R} . \mu Q)$$

woraus ſich, genauer als vorhin,

r =

$$r = \frac{R.(P - \frac{\varrho}{R}.\mu Q) - E}{M + N.k}$$

Die Steifigkeit des Seilſtücks, woran der leere Kübel hängt, kommt nicht in Betrachtung (§. 24 und 27).

Anm. Für einen Kübel, der 125 Pfd. Ladung bekommt, rechnet man im Durchſchnitt etwa 33 Sek. Füllungszeit.

Auch werden von einer 8 ſtündigen Schichte (Arbeitszeit) nur 7 Stunden in Rechnung gebracht; die eine Stunde wird wegen unvermeidlicher Unterbrechungen während der Arbeit abgezogen.

Je tiefer die Schächte ſind, deſto weniger Zwiſchenruhe haben zwar die Haſpelknechte, weil die Kübel ſeltener zum Füllen kommen, wobei ſie ruhen können; aber um ſoviel gröſſere Erleichterung erhalten ſie auch während der Aufförderung des vollen Kübels, weil ihnen das Gewicht des Seils auf die ganze Schachtteufe zur Laſt gerechnet worden iſt, die doch von Fuß zu Fuß iedesmal um das Gewicht von 2 Fußen Seil abnimmt und bis zur halben Schachtteufe ganz verſchwindet; weiterhin, d. h. in der ganzen oberen Hälfte des Schachts kommt das Gewicht des Seils den Arbeitern ſo gar zu ſtatten, ſo daß dadurch bei einem tiefen Schacht die angenommene Laſt um die Hälfte und noch mehr vermindert werden kann. Daher kann bei Schächten von 40 und mehr Lachtern Teufe die Geſchwindigkeit am Kurbelgriffe im Durchſchnitt wohl zu $2\frac{1}{2}$ Fuſſen angeſchlagen werden.

Es iſt übrigens ein Irrthum, wenn man glaubt, ein Schwungring am Rundbaum ſey unnütz oder gar ſchädlich. Beim viermänniſchen Haſpel wird er wenig nützen, auch kann er noch beim dreimänniſchen entbehrt werden; aber beim zweimänniſchen iſt er allerdings von erheblichem Nutzen, am meiſten aber beim einmänniſchen. Nur muß ein ſol-

ſolcher Schwungring die gehörigen Abmeſſungen haben, auch nahe am äuſſeren Umfange deſſelben eine Premſe angebracht werden, die ſich ſchnell andrucken läßt, um den Umlauf plötzlich hemmen zu können. Dieſes führt auf die hierher gehörige

Theorie des Schwungrades beim Haſpel.

Aufg. 9.

§. 58. Um den Rundbaum eines Hornhaſpels ſoll ein Schwungring gelegt werden, welcher vermögend iſt, von dem Augenblick an, da die Haſpelknechte ganz und gar aufhören am Horn zu drehen, bloß vermöge ſeines Schwunges noch n Umdrehungen zu machen, auch wenn das Seil am gefüllten Kübel noch bis zur Sohle des Schachts herabhängt.

Aufl. 1. Der Halbmeſſer vom inneren Umfange des Schwungrings heiſſe r, der vom äuſſeren R, ſeine Breite parallel mit der Axe des Rundbaums gemeſſen l, die Geſchwindigkeit des Kurbelgriffs in dem Augenblick, da die Haſpelknechte zurücktreten, = C, das Gewicht von 1 K. Fuß oder K. Zoll, überhaupt vom angenommenen kubiſchen Maaſe der Materie, aus welcher der Ring beſteht, = ψ in Pfunden. So hat man (Dyn. §. 104)

Mom. der Tr. des Schwungrings $= \frac{6,28 \,.\, l\psi}{4} (R^4 - r^4)$

Daher ſeine Maſſe, auf den äuſſeren Umfang reducirt,

$$= \frac{6,28 \,.\, l \,.\, \psi}{4 R^2} \,.\, (R^4 - r^4)$$

2. Die

2. Die Maſſe der beiden Kübel ſamt Ladung und Seil in Pfunden ſey = $\mathfrak{M}$, ſo iſt ſolche gleichfalls auf den äuſſeren Umfang des Schwungrings reducirt

$$= \frac{r^2 . \mathfrak{M}}{\mathfrak{R}^2}$$

3. Die Laſt iſt am Ende des mechan. Halbmeſſers des Rundbaums (§. 57. no. 6) =

$$M + \frac{E}{r} + N.k + \frac{\varrho}{R} . \mu (Q + 3{,}14 . (\mathfrak{R}^2 - r^2) . l . \psi)$$

alſo auf den äuſſeren Umfang des Schwungrings reducirt

$$= \frac{r}{\mathfrak{R}} . (\alpha + \beta . l)$$

indem ich

$$M + \frac{E}{r} + N.k + \frac{\varrho}{\mathfrak{R}} . \mu Q = \alpha$$

und

$$\frac{\varrho}{R} . \mu . 3{,}14 . (\mathfrak{R}^2 - r^2) . \psi = \beta$$

ſetze.

4. Demnach die verzögernde Kraft, welche in die Maſſe des Schwungrings wirkt,

$$= \frac{\frac{r}{\mathfrak{R}} . (\alpha + \beta . l)}{\frac{r^2}{\mathfrak{R}^2} . \mathfrak{M} + \frac{6{,}28 . l . \psi}{4 . \mathfrak{R}^2} . (\mathfrak{R}^4 - r^4)}$$

5. Dieſe würde dem äuſſeren Umfang des Schwungrings bei n Umdrehungen eine Geſchwindigkeit

v =

$$v = 2\sqrt{\left(\frac{\frac{r}{\mathfrak{R}}.(\alpha+\beta.1)}{\frac{r^2}{\mathfrak{R}^2}.\mathfrak{M}+\frac{6,28.1.\psi}{4.\mathfrak{R}^2}(\mathfrak{R}^4-r^4)}.g \times n.6,28.\mathfrak{R}\right)}$$

nach der entgegengeſetzten Richtung mittheilen.

6. Es iſt aber nach der Vorausſetzung die anfängliche Geſchw. des Umfangs $= \frac{\mathfrak{R}}{R}.C$, alſo am Ende der nten Umdrehung, welche der Schwungring noch für ſich macht, ſeine Geſchw. $= \frac{\mathfrak{R}}{R}.C - v$.

7. Da die Geſchw. am Ende der nten Umdrehung (no. 6) = o ſeyn ſoll, ſo hat man

$$v = \frac{\mathfrak{R}}{R}.C =$$

$$2.\sqrt{\frac{\frac{r}{\mathfrak{R}}.(\alpha+\beta.1).n.6,28\,\mathfrak{R}.g}{\frac{r^2}{\mathfrak{R}^2}.\mathfrak{M}+\frac{6,28.1.\psi}{4\mathfrak{R}^2}(\mathfrak{R}^4-r^4)}}$$

alſo $\frac{C^2}{R^2} =$

$$4 \times \frac{r.(\alpha+\beta.1).6,28.n.g}{r^2.\mathfrak{M}+\frac{6,28.1.\psi}{4}(\mathfrak{R}^4-r^4)}$$

oder

oder $\frac{C^2}{4R^2} . r^2 \mathfrak{M} + \frac{C^2}{4R^2} . \frac{6,28 . l . (\mathfrak{R}^4 - \mathfrak{r}^4)}{4}$

$$= 6,28 . n . r . g . (\alpha + \beta . l)$$

woraus ſich

$$l = \frac{\left(6,28 . n . r . g . \alpha - \frac{C^2 r^2}{4 R^2} . \mathfrak{M}\right) . 16 . R^2}{6,28 . (\mathfrak{R}^4 - \mathfrak{r}^4) . \psi . C^2 - 6,28 . n . r . g . \beta . 16 . R^2}$$

oder

$$l = \frac{n . r . g . \alpha - \frac{C^2 . r^2}{25,12 . R^2} . \mathfrak{M}}{\frac{\mathfrak{R}^4 - \mathfrak{r}^4) . \psi . C^2}{16 . R^2} - n . g . r . \beta}$$

Ex. Es ſey $M + \frac{E}{r} + N . k = 200$ ℔, $n = \frac{1}{2}$, $r = 0,4$ Fuß, $g = 15,6$ F.; $R = 1,4$ F.; $C = 2,5$ F.; $\mathfrak{R} = 3$ F., $\mathfrak{r} =$ F.; ψ für Eichenholz $= 61$ ℔, $\mathfrak{M} = 210$ ℔, $Q = 300$ ℔, $\frac{\varrho}{R} = 1\frac{1}{4}$ und $\mu = 1\frac{1}{4}$; ſo wird

$$\alpha = 200 + \frac{300}{14 . 4} = 205; \ \beta = 3,14.$$

$$\frac{(9 - 6,25) . 61}{14 . 4} = 9,42; \text{ alſo}$$

$$l = \frac{639 - 4,2}{510,7 - 19,6} = 1,3 \text{ Fuß.}$$

8. Man kann verſichert ſeyn, daß ein ſolches Schwungrad, welches für ſich ſelbſt die Bewegung

ſamt der anhängenden Laſt noch durch eine ganze Umdrehung fortzuſetzen vermag, hinlänglich ſey, bei fortdauernder Arbeit der Haſpelknechte die etwaige Verminderung der Geſchwindigkeit, welche von der periodiſchen Abnahme des Moments der Kraft herrühren könnte, unmerklich zu machen, ſo daß der Arbeiter mit Hülfe dieſes Schwungrades am Kurbelgriff ſchnell über die Stelle wegkommt, wo er wegen unbequemerer Stellung nicht mit voller Kraft auf den Haſpel wirken kann, und dann bei Erreichung vortheilhafterer Stellen den vorhergegangenen ſehr kleinen Verluſt an der Geſchwindigkeit leicht wieder erſetzen kann.

Inzwiſchen muß zugleich darauf geſehen werden, daß die Arbeiter auch durch ihre Kraft dem Fortlaufen des Schwungrades ſchnelle genug Einhalt thun können. Dieſerhalb darf man dem Schwungrad nicht zuviel Maſſe geben und ebendarum n nicht zu groß nehmen. In dieſer Rückſicht iſt $n = \frac{1}{2}$ ein ſehr ſchicklicher Werth. Es iſt aber am beſten, wenn dennoch allemal eine Premſe angebracht wird.

Hierher gehörige Schriften.

Lempe, angef. Lehrbegr. der Maſchinenl.

Kunze angef. Schauplatz.

v. Cancrin Bergmaſchinenkunſt, in ſeiner Berg- und Salzwerkskunde.

Neuntes Kapitel.

Von den Roßkünſten, oder dem Lauf- und Tretrade, der Tretſcheibe und den Pferdegöpeln.

Erklärung 22.

§. 59. Wellen, die mit Zapfen in unbeweglichen Pfannen oder Büchſen laufen und mittelſt durchgeſteckter Aerme oder angelegter Räder von Pferden oder anderen Laſt- und Zugthieren herumgedreht werden, heiſſen allgemein **Roßkünſte**. Dahin gehören:

das Laufrad, das Tretrad, die Tretſcheibe und der Pferdegöpel.

I. Das Laufrad.

Erklärung 23.

§. 60. Man denke ſich um eine horizontale Welle zwei ſtarke parallele Ringe oder Kränze in lothrechter Stellung durch hinlänglich ſtarke Aerme mit der Welle verbunden, und beide Kränze am innern Umfang mit Dihlen oder Bohlen beſchlagen, welche eine feſte cylindriſche Wand bilden, ſo heißt dieſe Roßkunſt insbeſondere ein Laufrad. Zum feſtern Trit der Thiere wird der Dihlboden noch mit Leiſten beſchlagen.

Anm. Am beſten läßt man den mittleren Theil der übrigens rund abgedrehten Welle vierkantig oder parallelepipe-

diſch behauen, und legt die vier Hauptärme an dieſen 4kantigen Theil an, wie (fig. 36, 37). Hiermit werden noch Hülfsärme verbunden: einfache ab, wie (fig. 36), wenn des Rades Durchmeſſer nicht über 16—18 Fuſſe beträgt; doppelte ab, cd, wenn die Räder höher ſind, wie (fig 37). Zur Verſtärkung werden bei höheren Rädern noch beſondere vierkantige Hölzer, Zulagen, an die Hauptärme angeſchroben, wie mn, vw (fig. 37); zwei, wie mn, liegen an der vorderen dem Auge zugekehrten Fläche der Hauptärme; und zwei, deren Länge mit vw bezeichnet iſt, an der hinteren vom Auge abgewendeten Fläche der Hauptärme. Beide Kränze und ihre Radkreuze werden mittelſt durchgeſteckter Schrauben x unter einander verbunden, ſo daß die inneren durch alle einander gegenüber liegende Haupt und Hülfsärme und Zulagen, und die äuſſeren durch beide Radkränze durchgehen.

Die Dihlſtücke, Felchen, woraus die Kränze zuſammengeſetzt werden, werden aus natürlich krummen oder aus krummbehauenen Klötzern geſchnitten, dann auf einem Gerüſte, dem Radſtuhl, um einen in der Mitte eingeſchlagenen Steft im Kreiſe herumgelegt und auf ihnen mittelſt einer um ienen Steft herumgeführten Latte mit einem Röthel die Kreislinie bemerkt, nach welcher die Felchen vollends abgerundet werden müſſen. Damit die ſo zugerichteten Felchen etwa noch $\frac{3}{4}$ Fuß über einander geplattet werden können, ſo läßt man ſie gleich bei dieſer Verzeichnung ſchon an ihren Enden um ſoviel über einander greifen. Weil die bloſſe Befeſtigung dieſer über einander geplatteten Endſtücken nicht hinlänglich ſeyn würde, ſo wird ieder ſo zugerichtete Kranz noch mit Felchen belegt, die etwa $\frac{2}{3}$ ſo dick als die Hauptfelchen ſind, ſo daß die Mitte eines ſolchen Felchens gerade auf die Fuge fällt, in welcher zwei Hauptfelchen zuſammenſtoſſen. Bei groſſen Rädern, die groſſe Gewalt auszuhalten haben, ſtößt man oft ein Hülfsfelchen an das andere an, ſo daß ſie zuſammen ſelbſt einen ganzen Kranz ausmachen, der den Hauptkranz völlig bedeckt. Inzwiſchen kann man in allen Fäl-

Fällen hinlängliche Feſtigkeit erhalten, wenn jene Hülfs-ſe chen auch nur einen Theil, etwa die Hälfte, der Haupt-felchen bedecken, da ſie dann Laſchen heiſſen. Dieſe auf dem Radſtuhle auf die erwähnte Weiſe aufgelegten La-ſchen werden mit den Hauptfelchen zugleich mit einem etwa $\frac{3}{4}$ zolligen Bohrer gemeinſchaftlich durchbohrt und dann mit durchgeſchlagenen ſtarken hölzernen Nägeln zuſam-men verbunden. Dieſe Arbeit heißt die Verlaſchung.

Iſt es beim Baue des Rades nicht bloß auf hinläng-liche Feſtigkeit, ſondern auf Vergröſſerung der Maſſe der Radkränze abgeſehen, damit ſie als Schwungringe gehörige Dienſte leiſten, ſo können die Laſchen den Hauptfelchen völlig gleich genommen werden, da dann ihre gemeinſchaft-liche Dicke von der Theorie der Schwungräder abhängt.

Die Kränze eines Laufrades können, in Rückſicht auf Feſtigkeit, ohne die Laſchen, $2\frac{1}{2}$ bis 3 Zolle dick und 5 bis 6 Zolle (nach der Richtung des Halbmeſſers) breit ſeyn.

Aufg. 10.

§. 61. ABD (fig. 38) ſey der Durchſchnitt einer ſenkrecht durch die Axe gelegten lothrechten Ebene mit der Fläche des Radbodens in dem Qua-dranten, wo das Thier laufen ſoll; C dieſes Qua-drantens Mittelpunkt; der Thiere Gewicht ſey $= P$, der Halbmeſſer $CA = R$: man ſoll die Bedingun-gen des Gleichgewichts zwiſchen Kraft und Laſt be-ſtimmen.

Aufl. 1. m ſey des Thieres Schwerpunkt, mo ein Perpendikel aus dem Schwerpunkt auf den lothrechten Halbmeſſer CA; mn eine lothrechte Linie aus m auf den Radboden, nv der mo gleichlaufend, CB ein Halbmeſſer durch m; die Laſt in der Entfer-

 nung

nung r von der Axe = Q, das Gewicht des leeren Rades = p, der Halbmeſſer der Wellzapfen = ϱ, der Reibungskoefficient = μ; ſo kann man den geſammten lothrechten Druck auf die Zapfen in der Ausübung immer genau genug = $P + p + Q$ annehmen, alſo die

$$\text{Reibung am Umfang der Wellzapfen} = \mu.(P+p+Q)$$

2. Nun denke man ſich durch n eine Berührungslinie na am Kreiſe bis zu dem verlängerten Halbmeſſer CA gezogen, und die ab wagrecht, die nb lothrecht gezogen, ſo ſtellt na eine ſchiefe Ebene über der Grundlinie ab vor, längſt welcher die Stelle n ſich zu bewegen ſtrebt; der lothrechte Druck in n iſt P, alſo der Druck nach na = P . ſin nab = P . ſin ACn, und das ſtatiſche Umdrehungsmoment der Kraft

$$= Cn . P . \sin ACn$$

Iſt nun $ACB = \alpha$, $mB = b$, ſo kann man in der Ausübung

$$ACn = (1 - \frac{b}{R}) . \alpha$$

ſetzen, alſo

$$\text{Mom. der Kraft} = R . P . \sin (1 - \frac{b}{R}) . \alpha$$

3. Die ſtatiſchen Momente der Laſt ſind vermöge (no. 1)

$$Q . r + \varrho\, \mu . (P + p + Q)$$

Demnach für das Gleichgewicht zwiſchen Kraft und Laſt

$$R . P . \sin (1 - \frac{b}{R}) . \alpha = r . Q + \varrho . \mu . (P + p + Q)$$

oder

oder

$$(R.\sin(1-\frac{b}{R}).\alpha-\varrho.\mu).P=(r+\varrho.\mu).Q+\varrho.\mu.p$$

Alſo

$$P=\frac{(r+\varrho.\mu).Q+\varrho.\mu.p}{R.\sin(1-\frac{b}{R}).\alpha-\varrho.\mu}$$

und

$$Q=\frac{(R.\sin(1-\frac{b}{R}).\alpha-\varrho.\mu).P-\varrho.\mu.p}{r+\varrho.\mu}$$

Die Gröſſe des Winkels $\alpha =$ nab nimmt man der Erfahrung gemäß aus (§. 31). Der Halbmeſſer ϱ braucht, auch bei 36′ hohen Rädern, bei bloſſen Wellzapfen nie über 2. und bei Krummzapfen nie über $2\frac{1}{2}$ Rhl. Zolle zu betragen.

Anm. Die Anzahl der iedesmal zum Betrieb der Maſchine erfoderlichen Thiere muß ſo groß ſeyn, daß die Summe ihrer Gewichte = P wird, daher ſich ſolche allemal leicht beſtimmen läßt. Das Rad muß dann nur iedesmal breit genug gebaut ſeyn, damit die erfoderlichen Thiere bequem neben einander ſtehen können.

Zuſ. 1.

§. 62. Die anfängliche Bewegung des Rades kann nur dadurch bewirkt werden, daß die Thiere anfänglich im Rade höher hinauf treten, als zum Gleichgewichte mit der Laſt nöthig wäre. Die vermöge der Ueberwucht entſtehende Bewegung wird nach und nach beſchleunigt, die Thiere werden alſo, um ſich an einer beſtimmten Stelle B zu erhalten, ſelbſt genöthiget, ſich nach und nach geſchwinder zu bewegen. Weil aber

ihrer Geſchwindigkeit ſchon die natürliche Gränze (§. 31) vorgeſchrieben iſt, ſo kann die Beſchleunigung auch nur bis zur Herſtellung dieſer Geſchwindigkeit fortdauern. Die Thiere können ſich alſo nur an der Stelle B erhalten, an der ſie nach Eintretung iener Geſchwindigkeit mit dem geſammten Widerſtande im Gleichgewicht ſind, und die Bewegung des Rades dauert von nun an bloß vermöge der Trägheit fort, woferne immer dieſelben Maſſen in ihrer erlangten Bewegung bleiben und das ſtatiſche Moment der Laſt unveränderlich iſt.

Dieſes iſt z. B. der Fall, wenn die Nutzlaſt am Ende eines um die Welle gewundenen Seils, wie an einem Haſpel, befeſtigt wäre, ſo daß ſie beim Aufwinden immer gleichweit von der Axe wirkte. In dieſem Falle iſt, wenn C die aus (§. 31) genommene Geſchwindigkeit der Thiere bezeichnet,

$$\text{Die Umlaufszeit eines Laufrades} = \frac{6,28 \,.\, R}{C} \text{ Sek.}$$

In dieſer Zeit wird die Laſt auf eine

$$\text{Höhe} = 6,28 \,.\, r$$

erhoben.

Die Geſchwindigkeit der Nutzlaſt iſt

$$\frac{r}{R} \,.\, C$$

Zuſ. 2.

§. 63. Wenn bei unveränderlichen Momenten der Laſt Maſſen von Zeit zu Zeit ihren Zuſtand plötzlich ändern müſſen, ſo daß ſie plötzlich aus der Ruhe in Bewegung gebracht oder plötzlich ſchneller als vorher

her bewegt werden müſſen, ſo wird dadurch die Geſchwindigkeit des von der Kraft angegriffenen Punktes, alſo in ſolchem Falle die Umdrehungsgeſchwindigkeit des Laufrades vermindert. Eine ſolche periodiſche Verminderung müßte aber nothwendig die Maſchine nach und nach zum Stillſtand bringen, wenn dabei nicht nach iedesmaliger Verminderung der Geſchwindigkeit ebenſo wie anfänglich Ueberwucht vorhanden wäre, wodurch der von der Kraft angegriffene Punkt von neuem beſchleuniget und iener verlohrne Theil der Geſchwindigkeit immer wieder erſetzt würde.

Wenn alſo in einem ſolchen Falle die zur Fortſetzung der Bewegung oder zur Erhaltung des ungleichförmigen Beharrungsſtandes erfoderliche Ueberwucht V heißt, ſo hat man für die wirkliche Bewegung keine Gleichheit zwiſchen den ſtatiſchen Momenten der Kraft und der Laſt, wie (§. 62), ſondern.

$$P = \frac{(r + \varrho . \mu) . Q + \varrho . \mu . p}{R . \sin (1 - \frac{b}{R}) . \alpha - \varrho . \mu} + V$$

Die Beſtimmung des Werthes von V ſoll in der Folge gelehrt werden (ſ. unten §. 162 u. f.).

In ebendieſem Falle iſt es alſo unvermeidlich, daß die Thiere, die an der ihnen angewieſenen Stelle mit beſtändiger Ueberwucht auf die Laſt wirken, an dieſer Stelle bald langſamer bald ſchneller laufen (d. i. ſich fortbewegen) müſſen. Ihre Geſchwindigkeit muß alſo bald kleiner bald gröſſer ſeyn, als ihre mittlere (§. 31). Weil ſie inzwiſchen, den Naturkräften der Thiere gemäß, doch die (§. 31) angegebene Gränze nie viel überſchreiten darf, auch überdas unaufhörliche Abwechſelungen der Geſchwindigkeit für die Thiere an

ſich ſchon ermüdend wären, ſo muß dafür geſorgt werden, daß größte und kleinſte Geſchwindigkeit allemal nahe an einander gränzen, daß alſo in iedem Augenblick der Verminderung nur ein kleiner Theil der Geſchwindigkeit verlohren gehe.

Deßhalb muß hier entweder, wie oben bei den Haſpeln, ein beſonderer Schwungring angebracht oder den Kränzen des Laufrades hinlängliche Maſſe gegeben werden.

Wenn nämlich eine Maſſe M mit der Geſchw. C eine ruhige Maſſe 𝔐 durch den Stoß in Bewegung ſetzt, ſo daß nun beide mit gemeinſchaftlicher Geſchwindigkeit c ſich fortbewegen, ſo hat man

$$c.(M + \mathfrak{M}) = C.M$$

alſo

$$c = \frac{M}{M + \mathfrak{M}}.C$$

Die verminderte Geſchwindigkeit c kommt alſo der anfänglichen C deſto näher, ie näher $\frac{M}{M + \mathfrak{M}}$ der Einheit kommt, d. i. ie gröſſer M in Vergleichung mit 𝔐 genommen wird.

Zuſ. 3.

§. 64. Ebendarum haben alſo auch für den ungleichförmigen Beharrungsſtand hohe Räder den Vorzug vor niedrigen, weil ihre Kränze mehr Maſſe haben. Auch bei dem gleichförmigen Beharrungsſtande (§. 62) gewähren ſie den Vortheil, daß kleine Ungleichheiten im Gang der Thiere weniger merkbar werden als bei niedrigen. Man thut wohl, wenn man ſie nicht unter 36 Fuſſe hoch baut.

Zuſ.

Zuſ. 4.

§. 65. Wenn die Laſt Q an der Warze m eines in die Welle eingelaſſenen Krumzapfens (fig. 39) angebracht iſt, deſſen Arm, Knie oder Bug die Höhe vw = r hat, ſo ändert ſich ihr ſtatiſches Moment von Augenblick zu Augenblick; ihr größter Werth iſt r.Q, ihr kleinſter = o.Q = o.

Man denke ſich z. B. den Arm cm (fig. 40) zuerſt wagrecht, an der Warze bei m die Laſt Q lothrecht nach mw herabhängend, ſo iſt ihr ſtat. Moment = cm.Q; gelangt die Warze bei der Umdrehung des Rades in n, ſo daß nun die Laſt noch lothrecht nach nx herabhängt, ſo iſt in dieſem Augenblick das ſtat. Moment = cs.Q; und wenn endlich die Warze in v ankommt, lothrecht über der Axe c, ſo wäre das ſtat. Mom. = o.Q = o.

Der von der Laſt angegriffene Punkt wird hier überall auf kleinen ſchiefen Ebenen fortgeführt, z. B. von n nach k, wo man ſich nk als eine der kleinen Polygonſeiten denken kann, aus welchen die Kreislinie zuſammengeſetzt iſt. Die lothrecht auf kn drückende Laſt Q wirkt hier ebenſo, wie eine nach kn an n ziehende Kraft S, die $= \frac{de}{kn} . Q$ wäre, wenn kd, ne auf vc ſenkrecht gezogen werden.

Denkt man ſich alſo den Quadranten mnv aus N ſolchen gleichen Theilchen wie kn zuſammengeſetzt, und durch alle ſolche Ecken wie k, n dergleichen Linien wie kd, ne, ſenkrecht auf cv gezogen, ſo werden von v bis c N ungleiche Theilchen abgeſchnitten, die ich von v bis c herab mit δ, δ', δ'' u ſ. w. bezeichnen will, und die alle zuſammen die cv ausmachen.

Dieſem-

Dieſemnach iſt die Summe der ſtatiſchen Momente von Q in allen ſolchen Theilchen des Quadranten zuſammengenommen =

$$\frac{\delta}{kn}.cm.Q + \frac{\delta'}{kn}.cm.Q + \frac{\delta''}{kn}.cm.Q + \frac{\delta'''}{kn}.cm.Q + \text{ꝛc.}$$

$$= \frac{\delta + \delta' + \delta'' + \delta''' + \text{ꝛc.}}{kn}.cm.Q$$

$= \frac{cv}{kn}.cm.Q.$ Dieſe Summe von N Momenten mit N dividirt giebt das mittlere ſtat. Moment der Laſt Q für ihre verſchiedene Stellen von m bis v = $\frac{cv}{N.kn}.cm.Q = \frac{cv}{mnv}.cm.Q = \frac{100}{157}.cm.Q$ oder auch $= 0{,}637.cm.Q.$

Es iſt alſo, wenn die Höhe cm vom Arm des Krummzapfens allgemein r heißt, das mittlere ſtatiſche Moment einer an der Warze angebrachten Laſt Q, woferne ihre Richtungen beim Umlaufe der Warze immer dieſelbe parallele Lage behalten,

$$= \frac{100}{157}.r.Q = 0{,}637.r.Q$$

Man hat daher für ein Laufrad mit einem Krumzapfen (§. 63)

$$P = \frac{(0{,}637.r + \varrho.\mu).Q + \varrho.\mu.p}{R.\sin(1 - \frac{b}{R}).\alpha - \varrho.\mu} + V$$

Hier iſt nämlich der Beharrungsſtand nothwendig allemal ungleichförmig und es trit zugleich hier allemal der Fall ein, daß eine Maſſe periodiſch von neuem in Bewegung geſetzt und beſchleuniget werden muß.

Zuſ. 5.

§. 66. Wäre die Laſt Q nicht unmittelbar an der Welle des Laufrades angebracht, ſondern an einer zweiten Welle, ſo daß ſich r auf dieſe oder auf den an ihr angebrachten Krummzapfen bezöge, ſo könnte an iener Hauptwelle ein verzahntes Rad und an der zweiten ein Trilling angebracht ſeyn, in welchen ienes eingriffe. Wäre des verzahnten Rades Halbmeſſer $= \mathfrak{R}$, der des Trillings $= \mathfrak{r}$, ſo wäre ein Druck auf die Stäbe des Trillings $= \frac{r}{\mathfrak{r}} \cdot Q$ mit der am Umfang der Trillingswelle wirkenden Laſt Q im Gleichgewicht.

I. Für den Fall des Gleichgewichts bei unveränderlichen Momenten der Laſt wäre alſo der erfoderliche Druck eines Zahns am Rade $= \frac{r}{\mathfrak{r}} \cdot Q$.

Jetzt hat man alſo in der Entfernung $\mathfrak{R}$ von der Axe des Laufrades eine Laſt $= \frac{r}{\mathfrak{r}} \cdot Q$ ohne Rückſicht auf die Reibung an den Wellzapfen der zweiten Welle und an den Zähnen.

Das Gewicht der zweiten Welle ſamt Trilling heiſſe p', ſo iſt der Druck auf ihre Zapfen $= Q + \frac{r}{\mathfrak{r}} \cdot Q + p'$, alſo die Reibung am Umfange dieſer Zapfen $=$

$$\mu \cdot \left(Q + \frac{r}{\mathfrak{r}} Q + p'\right)$$

Der Halbmeſſer dieſer Zapfen ſey $= \varrho'$, ſo widerſteht dieſe Reibung der Bewegung der

Zäh-

Zähne am verzahnten Rade ſo ſtark als eine Laſt $=$

$$\frac{\varrho' \cdot \mu \cdot (Q + \frac{r}{r} Q + p')}{r}$$

, und man hat alſo mit Inbegriff dieſer Reibung in der Entfernung $\mathfrak{R}$ von der Axe des Laufrades eine Laſt zu überwinden, die

$$= \frac{r}{r} \cdot Q + \frac{\varrho' \cdot \mu \cdot (Q + \frac{r}{r} \cdot Q + p')}{r}$$

$$= \frac{r + \varrho' \cdot \mu \cdot (1 + \frac{r}{r})}{r} \cdot Q + \frac{\varrho' \cdot \mu \cdot p'}{r}$$

wäre.

Dieſer Widerſtand wird noch durch die Reibung an den Zähnen vergröſſert. Gewöhnlich nimmt man in der Ausübung für dieſe Reibung noch $\frac{1}{18}$ des Drucks weiter, und ſo wäre die geſammte Laſt von der zweiten Welle mit den Reibungen an ihren Zapfen und an den Stäben des Trillings auf den Umfang des verzahnten Rades reducirt, $=$

$$\frac{19}{18} \cdot \frac{\left(r + \varrho' \cdot \mu \cdot (1 + \frac{r}{r})\right) \cdot Q + \varrho' \mu \cdot p'}{r}$$

Schreibt man dafür $A \cdot Q + B$, ſo hat nunmehr die Kraft P eine Laſt $A \cdot Q + B$ in der Entfernung $\mathfrak{R}$ von der Axe des Laufrades zu überwinden.

Schreibt man alſo (§. 61) $\mathfrak{R}$ ſtatt r, $A \cdot Q + B$ ſtatt Q, ſo erhält man

$$P = \frac{(\mathfrak{R} + \varrho \cdot \mu) \cdot (A \cdot Q + B) + \varrho \cdot \mu \cdot p}{R \cdot \sin(1 - \frac{b}{R}) \cdot \alpha - \varrho \cdot \mu}$$

wor-

woraus ſich auch Q ergiebt; bezeichnet nämlich N den Nenner des vorſtehenden Bruchs, ſo hat man

$$Q = \frac{N \cdot P - \varrho \cdot \mu \cdot p}{(\mathfrak{R} + \varrho \cdot \mu) \cdot A} - \frac{B}{A}$$

Dabei iſt

$$A = \frac{19}{18} \cdot \frac{r + \varrho' \cdot \mu \cdot (1 + \frac{r}{r})}{r}$$

$$B = \frac{19}{18} \cdot \frac{\varrho' \cdot \mu \cdot p'}{r}$$

$$N = R \cdot \sin(1 - \frac{b}{R}) \cdot \alpha - \varrho \cdot \mu$$

Müßten zugleich von Zeit zu Zeit neue Maſſen in Bewegung geſetzt werden, ſo dürfte man nur P — V ſtatt P ſchreiben.

II. Wäre die Laſt Q an einem Krummzapfen der zweiten Welle angebracht, ſo daß r die Höhe des Arms bezeichnete, ſo dürfte man in vorſtehendem Werthe von A nur 0,637 . r ſtatt r ſchreiben, und man hätte dann (§. 65)

$$P = \frac{(\mathfrak{R} + \varrho \cdot \mu) \cdot A \cdot Q + B + \varrho \cdot \mu \cdot p}{N} + V$$

$$Q = \frac{N \cdot (P - V) - \varrho \cdot \mu \cdot p}{(\mathfrak{R} + \varrho \cdot \mu) \cdot A} - \frac{B}{A}$$

Anm. 1. Wenn das Laufrad als Haſpel dienen ſoll, um mittelſt eines Seils etwa Bergarten oder Erze in Schächten zu Tage zu fördern, ſo können begreiflich die Tonnen weit gröſſer ſeyn, als oben bei dem Hornhaſpel. Inzwiſchen würden ſie bei ſehr beträchtlicher Gröſſe zu manchen Unbe-

Unbequemlichkeiten Anlaß geben, auch wegen der erfoderlichen dickeren Seilen den Koſtenaufwand vergröſſern. Man giebt ihnen daher bei einer geringeren Groſſe lieber eine gröſſere Geſchwindigkeit.

Zu dem Ende kann man entweder die erwähnte Einrichtung mit einem verzahnten Rade an der Hauptwelle und einem Trilling, deſſen Durchmeſſer beträchtlich kleiner als der des verzahnten Rades iſt, an einer zweiten Welle, um die das Seil gewunden wird, anbringen; oder man legt um die Hauptwelle ein paar parallele Scheiben in hinlänglicher Entfernung von einander, und ſteckt durch ſolche, in der Entfernung von 3, 4, oder 5 Fuſſen von der Axe, Stäbe nahe neben einander rings um die Axe herum, wodurch man einen Korb erhält, um welchen das Seil gewunden wird.

Die Einrichtung mit dem Korbe macht das verzahnte Rad und die zweite Welle mit dem Trilling entbehrlich. Sie verdient den Vorzug vor der erſteren, bei der die von der Reibung herrührende Hindernißlaſt beträchtlich gröſſer, auch die Bewegung weniger ſanft iſt und öfter Brüche vorfallen.

Anm. 2. Ich habe in dieſem Kap. den Bau der Haupträder im Allgemeinen ſo angegeben, wie er auch bei Waſſerrädern anwendbar iſt, daher ich bei dieſen in der Folge nur das in Anſehung ihres Baues erwähnen werde, was ihnen eigen iſt. Des verzahnten Rades mit dem Trilling und des Krummzapfens habe ich hier darum erwähnt, um Anfängern bei dieſer Gelegenheit gleich einige Begriffe von zuſammengeſetzten Maſchinen beizubringen und ihnen zu zeigen, wie ſich Laſten und ſelbſt andere Maſchinen mit einem Hauptrade verbinden laſſen, um ſie durch dieſes in Bewegung zu ſetzen. Sie können ſich nun bei den nachher vorkommenden Waſſerrädern ebenſolche Verbindungen denken. Uebrigens verdienen aber ſowohl dergleichen in einander greifende Räderwerke als der Krummzapfen noch eine eigene Betrachtung, die ich weiter unten beibringen werde.

II. Das

II. Das Tretrad.

Erklärung 24.

§. 67. Man denke ſich zwiſchen den zweien parallelen Kränzen eines Rades ſtarke Dihlſtücke unter ſchiefen Winkeln mit dem Halbmeſſer ſo eingeſchoben, daß ſie Staffeln bilden; reicht der obere Rand des Rades bis nahe an einen Boden, der ſo eingeſchnitten iſt, daß z. B. ein Pferd mit ſeinen Vorderfüſſen auf dieſem Boden oberhalb dem Rade aufſtehen und zugleich mit ſeinen Hinterfüſſen auf iene Staffeln auftreten und dadurch das Rad zum Umlaufe bringen kann, indeß das Pferd ſeine Hinterfüſſe von der iedesmal unter ihnen weichenden Staffel immerfort wieder auf die nächſtfolgende aufſetzt, ſo heißt ein ſolches Rad ein Tretrad.

Anm. Ich begnüge mich, hier nur einen Begriff von dieſer Maſchine gegeben zu haben. Sie iſt zur Benutzung thieriſcher Kräfte ſehr übel ausgedacht und verdient kaum eine Erwähnung, noch weniger eine eigene Unterſuchung.

III. Die Tretſcheibe.

Erklärung 25.

§. 68. A (fig. 41) ſey die Oberfläche einer um eine Welle befeſtigten Scheibe, c ihr Mittelpunkt, DE eine Horizontallinie durch b, ab ein Durchmeſſer in derſelben lothrechten Ebene genommen, in welcher die horizontale DE liegt; FG ein anderer Durchmeſſer, welcher den ab ſenkrecht durchſchneidet.

Wird nun die Welle ſo geſtellt, daß ihre Axe in die erwähnte lothrechte Ebene fällt und daß ſie mit der horizontalen DE hier zur Rechten einen ſpitzigen Winkel macht, ſo macht zu gleicher Zeit der Durchmeſ-

ſer ab bei b einen ſchiefen Winkel mit der DE, und die Oberfläche der Scheibe liegt in einer ſchiefen Ebene, die unter dem zuletzt erwähnten Winkel von a nach b gegen den Horizont geneigt iſt.

Eine ſo um eine ſchief geſtellte Welle ſenkrecht auf die Axe befeſtigte Scheibe, die ſich mit der Welle, deren beide Zapfen in Pfannen oder Büchſen laufen, um die gemeinſchaftliche Axe drehen läßt, heißt eine Tretſcheibe, wenn ſie durch auftretende Thiere in Bewegung gebracht wird. ſ. fig. 42.

Anm. Die Bauart kann wie (fig. 37) eingerichtet werden; die auf dieſe Weiſe an die Welle angelegten Hauptärme dürfen mit ihren Hülfsärmen alsdann nur durch Strebhölzer, wie de (fig. 42), die auf beſonders angeſchlagenen Backen m aufſitzen, unterſtützt und hiernächſt mit Diblen beſchlagen werden.

Aufg. 11.

§. 69. Der Neigungswinkel der Scheibe gegen den Horizont oder der Winkel, den der Durchmeſſer ab mit der horizontalen bD macht (fig. 41 u. 42), heiſſe α; eine lothrechte Linie durch des auf der Scheibe ſtehenden Thieres Schwerpunkt treffe die Oberfläche der Scheibe in m (fig. 41), einem willkührlich angenommenen Punkte und es ſey cm = R; des Thieres Gewicht ſey = P, in der Entfernung r von der Axe wirke eine Laſt Q: man ſoll die Bedingungen des Gleichgewichts zwiſchen P und Q beſtimmen.

Aufl. 1. Senkrecht auf GF (fig. 41) oder parallel mit DE ziehe man aus m die mn, ſo macht

nm

nm mit dem Horizont einen Winkel $= \alpha$, und P ſtrebt in m längſt nm mit einer Kraft $= P . \sin \alpha$ abwärts zu gleiten; vermöge der Reibung hängt aber das Thier mit der Bodenfläche zuſammen und es wird daher die Scheibe ſelbſt von n nach m von einer Kraft $= P . \sin \alpha$ gezogen.

2. Das ſtat. Moment dieſer Kraft iſt $cn . P . \sin \alpha = cm . \sin cmn . P . \sin \alpha$, oder, wenn $mcb = cmn = \beta$ geſetzt wird,

$$= R . \sin \beta . P . \sin \alpha$$

3. Die ſtatiſchen Momente der Laſt ſind

das der Nutzlaſt $= Q . r$

das der Reibung genau genug $= \varrho . \mu . (P + p + Q)$

wo ϱ den Halbmeſſer der Wellzapfen und p das Gewicht der Welle mit der Scheibe bedeutet.

4. Demnach für das Gleichgewicht

$$R . \sin \beta . P . \sin \alpha = Q . r + \varrho . \mu . (P + p + Q)$$

5. Die Bequemlichkeit des Thieres erfodert es aber, daß es mit den Füſſen auf der rechten Seite nicht höher ſtehe als mit denen zur Linken; zu dem Ende muß man ihm ſeinen Stand in der Sehne de anweiſen, die dem Durchmeſſer ab gleichlaufend iſt. Fällt nun der vorige Punkt n in v, ſo hat man $\beta = bcv = 90^\circ$ und $\sin \beta = 1$, alſo

$$R . P . \sin \alpha = r . Q + \varrho . \mu . (P + p + Q)$$

da dann α nach (§. 31) genommen werden muß.

6. Es iſt aber bkw (fig. 42) $= 90^\circ - \alpha$, alſo darf die Welle der Tretſcheibe nur unter einem Winkel $= 90^\circ - \alpha$ gegen den Horizont aufgeſtellt

werden, da dann das Thier in der Sehne de (fig. 41) ſeine Stelle findet.

Heißt nun der Winkel, welchen die Axe mit der Horizontalfläche macht, ζ, ſo hat man auch

$$R.P.\mathrm{Coſ}\,\zeta = r.Q + \varrho.\mu.(P+p+Q)$$

da dann (§. 31) ζ 68° bis 70° betragen kann.

7. Man hat alſo

$$P = \frac{(r+\varrho.\mu).Q+\varrho.\mu.p}{R.\mathrm{ſin}\,\alpha-\varrho.\mu}$$

$$Q = \frac{(R.\mathrm{ſin}\,\alpha-\varrho.\mu).P-\varrho.\mu.p}{r+\varrho.\mu}$$

wie beim Laufrade (§. 61), nur $\mathrm{ſin}\,\alpha$ ſtatt $\mathrm{ſin}\,(1-\frac{b}{R}).\alpha$ geſetzt.

Ebendieſe Beſtimmungen gelten nun auch für die Bewegung im gleichförmigen Beharrungsſtande, wenn nur die Maſchine zuerſt durch Ueberwucht in Bewegung geſetzt worden iſt. Um dieſe Ueberwucht hervorzubringen, muß das Thier nur anfänglich näher an den Rand der Scheibe, z. B. in die Sehne $\delta\varepsilon$ treten, um das ſtatiſche Moment ſeines Gewichtes zu vergrößern.

Anm. 1. Alſo iſt bei einerlei Halbmeſſer der Kreislinie, welche das Thier im Laufrade und auf der Tretſcheibe mit ſeinen Füſſen durchwandert, und bei einerlei Werth von p die Laſt, welche das Thier im Laufrade wältigt, kleiner als die bei Betreibung der Tretſcheibe, weil

$$\mathrm{ſin}\,(1-\frac{b}{R}).\alpha < \mathrm{ſin}\,\alpha$$

iſt. Dieſe ſonderbare Folge hat ihren Grund in der angenommenen allgemeinen Vorausſetzung, daß einem in Bewegung

wegung geſetzten Thiere bei einer feſtgeſetzten Geſchwindigkeit allemal nur derſelbe Erbebungswinkel α zugemuthet werde, oder daß für daſſelbe Thier bei derſelben Geſchwindigkeit ſeiner Füſſe der Werth von α auch allemal derſelbe bleibe. Dieſes iſt aber nicht ſo allgemein richtig, insbeſondere nicht für das Laufrad; es kommt nämlich auf gleiche Anſtrengung des Thieres an, und ebendarum nicht auf die Bewegung der Füſſe allein, ſondern auf die Geſchwindigkeit, mit welcher das Thier ſeine ganze Maſſe fortbewegt; es muß alſo auf die Geſchwindigkeit ſeines Schwerpunktes vorzüglich Rückſicht genommen werden.

Dieſe iſt auf der Tretſcheibe der Geſchw. der Füſſe gleich, im Laufrade aber iſt ſie kleiner als die der Füſſe, daher bedarf das Thier im Laufrade einer etwas geringeren Anſtrengung und ebendarum dürfte auch der Werth von α für das Thier im Laufrade verhältnißmäſſig etwas gröſſer genommen werden als für daſſelbe auf der Tretſcheibe. Wollte man aber einen feſtgeſetzten Werth von α beibehalten, ſo könnte man aus demſelben Grunde die Geſchwindigkeit der Füſſe oder die Umdrehungsgeſchwindigkeit des Halbmeſſers R im Laufrade etwas gröſſer annehmen als auf der Tretſcheibe; oder man könnte im Laufrade ſowohl die Geſchw. als den Winkel α zugleich um etwas gröſſer nehmen. Dieſe Betrachtung ergiebt alſo, daß die Effekte beider Räder unter ſonſt gleichen Umſtänden in der Ausübung für einerlei geachtet werden können, wenn die Betreibung nur durch ein einziges Thier geſchieht.

Anm. 2. Zur Betreibung mit mehreren Thieren iſt die Tretſcheibe nicht ſo geſchickt als das Laufrad, in welchem ſie neben einander geſtellt in gleicher Entfernung von der Axe wirken. Bei der Tretſcheibe laſſen ſich gleichartige Thiere nicht neben einander ſtellen, ohne am Effekt zu verliehren. Ungleichartige wählt man aus andern Urſachen nicht gerne, ſonſten könnte man einen Ochſen neben einem Pferd gebrauchen, ſo daß er ſeinen Stand zwiſchen

dem Pferd und der Welle hätte. So würden beide vollſtändig benutzt.

Thiere von einerlei Art (z. B. zwei Pferde oder zwei Ochſen) müßten, um beide ganz zu benutzen, auf der Tretſcheibe hinter einander angeſtellt werden, ſo daß ihre Schwerpunkte in dieſelbe Sehne de (fig. 41) fallen, die den wagrechten Durchmeſſer FG ſenkrecht durchſchneidet.

Zuſ. 1

§. 70. Führt die Welle einen mit der Laſt Q beſchwerten Krummzapfen, deſſen Arm die Höhe r hätte, ſo wird, wie §. 65, für die Bewegung

$$P = \frac{(0,637 . r + \varrho . \mu) . Q + \varrho . \mu . p}{R . \sin\alpha - \varrho . \mu} + V$$

Zuſ 2.

§. 71. Wäre eine ſolche Einrichtung wie (§. 66) mit 2 Wellen getroffen, ſo wäre, wie dort, für die Bewegung

I. Wenn die Laſt mit unveränderlichem Momente in der Entfernung r von der Axe der zweiten Welle wirkt (§. 66. I. am Ende)

$$P = \frac{(\mathfrak{R} + \varrho . \mu) . (A . Q + B) + \varrho . \mu . p}{R . \sin\alpha - \varrho . \mu} + V$$

$$Q = \frac{N . (P - V) - \varrho . \mu . p}{(\mathfrak{R} + \varrho . \mu) . A} - \frac{A}{B}$$

in der dortigen Bedeutung der Buchſtaben, nur α ſtatt $(1 - \frac{b}{R}) . \alpha$ geſetzt.

Wären nicht von Zeit zu Zeit Maſſen von neuem in Bewegung zu ſetzen, ſo wäre $V = 0$.

II. Wäre

II. Wäre die Laſt Q an einem Krummzapfen der zweiten Welle angebracht, ſo wäre (§. 66. II)

$$P = \frac{(\mathfrak{R}+\varrho.\mu).A.Q+B+\varrho.\mu.p}{N} + V$$

$$Q = \frac{N.(P-V)-\varrho.\mu.p}{(\mathfrak{R}+\varrho.\mu).A} - \frac{B}{A}$$

IV. Der Pferdegöpel.

Erklärung 26.

§. 72. Eine lothrechte Welle mit wagrecht eingeſetzten oder durchgeſteckten Aermen oder Zugbäumen, die durch vorgeſpannte im Kreiſe herumgehende Thiere mit der Welle um eine gemeinſchaftliche Axe herumgedreht werden und dadurch zugleich eine mit der Welle auf irgend eine Weiſe in Verbindung geſetzte Laſt zugleich in Bewegung ſetzen, heißt eine Göpelkunſt, ein Göpel, gewöhnlich ein Pferdegöpel, wenn gleich auch Ochſen ſtatt der Pferde gebraucht werden können.

Anm. Aus (fig. 43, 44 und 45) läßt ſich ſehen, wie ein ſolcher Göpel eingerichtet werden kann.

Eine runde oder achteckte Fundamentmauer wird etwa ein Fuß hoch über der dem Boden mit ſtarken Schwellen belegt, die ein Achteck bilden. Auf dieſen werden aus allen Ecken ſchiefe Säulen oder Hauptſparren aufgerichtet, welche oben in einen kurzen cylindriſchen Pfoſten eingreifen, der den Kopf oder Knopf des Gebäudes bildet; man ſieht dieſen bei D (fig. 43) ſamt den eingreifenden Hauptſparren aD, bD, cD u. ſ. w., wo auch die in ein VIIIeck ſich ſchlieſenden Schwellen nebſt der punktirten

ten Fläche der Mauer zu ſehen ſind. In der 45ſten Figur ſieht man zwei einander gegenüber ſtehende Hauptſparren, welche zuerſt aufgerichtet und ſogleich auf ieder Seite durch zwei Hülfsſparren (wie mn, op fig. 45) unterſtützt, oben aber durch ein ſtarkes an beiden Enden eingeſchnittenes Spannholz AB gehörig verſpannt werden. Dieſes Spannholz AB dient nachher dem Kopf D ſowohl als dem ganzen Kreuzgebälke zur Unterlage, wie man fig. 44 deutlich ſehen kann, wo AB das erwähnte ſtarke Spannholz iſt, zwiſchen deſſen Einſchnitten an beiden Enden die erwähnten beiden erſten Hauptſparren durchgehen und mit Schrauben befeſtigt werden. Hiernächſt werden die beiden etwas ausgerundeten Balken cc an den eingeſetzten Knopf unter einem rechten Winkel auf AB aufgelegt, und in dieſe vier Stichbalken n ſo eingezapft, daß ſolche zugleich auf AB aufliegen.

Zwiſchen den beiden Balken ce laufen wiederum zwei Hauptſparren durch; die übrigen vier Hauptſparren werden entweder durch die an den Enden der vier Stichbalken gemachten Einſchnitte durchgeführt, oder es werden dieſe übrigen Hauptſparren gelocht und an den Enden der Stichbalken Zapfen angeſchnitten, die in iene Löcher beim Anlegen der Sparren einpaſſen. Zuletzt werden noch alle Hauptſparren mit den Balken zuſammengeſchroben, dann vom Knopf herab alle Haupt- und Hülfsſparren gelattet und mit Ziegeln oder Schindeln bedeckt, ſo daß die nöthigen Oeffnungen wegen des Lichtes und des Eingangs der Thiere angebracht werden.

Der Balken AB kann in ſeiner Mitte an der Seite zum Anlegen einer halben Büchſe ausgehöhlt werden, vor welche dann noch eine halbe Büchſe (fig. 46), die deßhalb auf beiden Seiten mit durchlochten Lappen oder Flügeln verſehen iſt, angeſchroben wird, nachdem der obere Wellzapfen vorher angelegt worden. Der untere Wellzapfen läuft in einer Pfanne m (fig. 47), die in der Mitte ein hervorſtehendes Zäpfchen hat, das in eine deshalb in dem Zapfen angebrachte Vertiefung eingreift. Die Pfanne iſt

in ein Zapfenklotz ab eingelaſſen, das auf einem im Boden eingemauerten Roſt befeſtiget iſt. Zum Nachtreiben der Welle, wenn ſie ſich mit der Zeit etwas ſenken ſollte, wird das Zapfenklotz nach ſeiner Breite durchlocht und ein rechtwinklichter Keil kn eingeſchoben, auf deſſen horizontaler Fläche die Pfanne ruht, die dann ſamt der Welle aufwärts getrieben wird, wann man den Keil kn tiefer eintreibt.

An iedem Ende des Zugbaums pq kann eine Wage zum Einſpannen, auch ein Sitzſchemmel für die Treiber angebracht werden, wiewohl dieſe Sorgfalt von trägen Menſchen ſehr mißbraucht wird, indem ſie oft genug den Sitzſchemmel zur Schlafſtätte machen.

Aufg. 12.

§. 73. Am Zugbaum (fig. 48) iſt in d ein Thier angeſpannt, das nach der Richtung de unter einem gegebenen Winkel dce $= \alpha$ zieht; die Kraft, womit daſſelbe (oder mehrere zugleich) nach de zieht, heiſſe P; der Halbmeſſer cd ſey $= R$; in der Entfernung cM $= r$ von der Axe c wirke mit unveränderlichem Momente eine Laſt Q nach MN entgegen; man ſoll die Bedingungen des Gleichgewichts zwiſchen P und Q beſtimmen.

Aufl. 1. Man nehme de $= P$, und ziehe aus e die em auf cd ſenkrecht, ſo iſt der auf den Zugbaum ſenkrecht wirkende Theil der Kraft $=$ em $= P . \sin \beta$.

2. Die Laſt Q druckt die Zapfen beſtändig nach ck der MN gleichlaufend, und die Kraft P übt, in der Stellung, welche die Zeichnung iezt angiebt, auſſer dem ſenkrechten me zugleich den nach dc $=$ dm

 $= P$

$= P . \text{Coſ}\beta$ aus; vermöge dieſer beiden Preſſungen entſteht von P ein Druck auf die Zapfen nach der Richtung cn, die der de gleichlaufend und gleich iſt.

Der geſammte horizontale Druck auf die Zapfen iſt alſo aus den Preſſungen

Q nach ck, und P nach cn

in der ietzigen Lage des Zugbaums zuſammengeſetzt.

Weil aber während der Umdrehung die cn in alle mögliche Lagen kommt, ſo daß nck ſich von o bis zu 180° beſtändig abändert, ſo kann man im Mittel nck = 90° ſetzen, und ſo giebt ſich aus P und Q der mittlere Druck $\sqrt{(P^2 + Q^2)}$ am Umfange der Zapfen, und die daher entſtehende Reibung am Umfange der Zapfen $= \mu . \sqrt{(P^2 + Q^2)}$, alſo ihr Moment $= \varrho . \mu . \sqrt{(P^2 + Q^2)}$

3. Das Gewicht der Welle mit Zubehör, was nämlich auf die Grundfläche des unteren Wellzapfens druckt, heiſſe p, ſo entſteht daraus auf dieſes Zapfens Grundfläche eine Reibung $= \mu . p$, und ihr Moment $= \frac{2}{3} \varrho . \mu . p$ *).

4. Man hat alſo für das Gleichgewicht zwiſchen P und Q

$$R . P . \text{ſin}\beta = r . Q + \mu . \varrho . \left(\tfrac{2}{3} p + \sqrt{(P^2 + Q^2)}\right)$$

5. Um

*) Der untere Zapfen lauft zwar gewöhnlich etwas koniſch zu; es wäre nicht der Mühe werth, hier, wo ganz ſcharfe Reſultate doch nie erwartet werden können, auf dieſen Umſtand beſondere Rückſicht zu nehmen.

5. Um $\sqrt{(P^2+Q^2)}$ auszudrucken, iſt es hier hinlänglich $\frac{R}{r}.P$ ſtatt Q und $\frac{r}{R}.Q$ ſtatt P unter dem Wurzelzeichen zu ſetzen. So erhält man

$$P = \frac{r.Q + \mu.\varrho.\left(\frac{2}{3}p + \sqrt{\frac{R^2+r^2}{R^2}.Q^2}\right)}{R.\sin\beta}$$

oder

$$P = \frac{r.Q + \mu.\varrho.\left(\frac{2}{3}p + \frac{Q}{R}.\sqrt{(R^2+r^2)}\right)}{R.\sin\beta}$$

und

$$Q = \frac{R.P.\sin\beta - \mu.\varrho.\left(\frac{2}{3}p + \sqrt{\frac{R^2+r^2}{r^2}.P^2}\right)}{r}$$

oder

$$Q = \frac{R.P.\sin\beta - \mu.\varrho.\left(\frac{2}{3}p + \frac{P}{r}.\sqrt{(R^2+r^2)}\right)}{r}$$

Die erfoderliche Kraft P mit der (§. 31) beſtimmten Kraft eines Thieres dividirt, giebt die Anzahl der erfoderlichen Thiere.

Zuſ. 1.

§. 74. Für die Bewegung im gleichförmigen Beharrungsſtande gelten bei dieſer Maſchine nur inſoferne dieſelben Ausdrücke, als angenommen werden kann, daß das Zugthier ſeine Bewegung unabgeſetzt fortſetze. Unterbricht nämlich das Thier auch nur in ſehr kleinen Zeittheilen ſeine fortſchreitende Bewegung, ſo iſt die

Maſſe

Maſſe der in Bewegung bleibenden Maſchinentheile hier zu gering, als daß ſie ihre Geſchwindigkeit auch nur während dieſem kleinen Zeittheilchen ohne beträchtliche Verminderung fortſetzen könnten, wie aus der Theorie des Schwungrades beim Haſpel (§. 58) erhellet. Hierin haben das Laufrad und die Tretſcheibe einen Vorzug, weil nicht nur die in Bewegung bleibende Maſſe der Maſchinentheile bei dieſen ſehr viel beträchtlicher iſt, ſondern dabei auch das Thier ſelbſt zugleich mit der Maſchine in Bewegung bleibt, ohne ſich ſelbſt durch eigene Kraft in iedem Augenblick in Bewegung zu erhalten. Da die Bewegung der Thiere von Schritt zu Schritt keine ſo ſtetige wie die anderer bewegter Körper, ſondern als eine von Schritt zu Schritt abgeſetzte Bewegung angeſehen werden kann, ſo wird man allerdings annehmen müſſen, daß hier die Bewegung von Sekunde zu Sekunde wo nicht ganz von neuem angefangen, doch gröſtentheils erſt wieder hergeſtellt werden muß, wobei alſo immer wieder neue Anſtrengung zur Hervorbringung neuer Ueberwucht erfodert wird.

Zuſ. 2.

§. 75. Da man de (fig. 48) nach Willkühr nehmen kann, ſo kann man ſie bis zu der Stelle nehmen, welche lothrecht unter des Thieres Schwerpunkt liegt, ſo daß ce als der Halbmeſſer der Kreisbahn fg angeſehen werden kann, in welcher ſich das Thier herumbewegt. Weil nun ced ein rechter Winkel iſt, ſo hat man

$$de : me = cd : ce$$

alſo

$$ce = cd . \frac{me}{de} = cd . \sin\beta$$

Dem-

Demnach iſt die Kreislinie, welche ein Thier, das mit der Kraft $P . \sin \beta$ ſenkrecht auf cd wirkt, durchlaufen muß, ein Kreis, deſſen Halbmeſſer $=$ $cd . \sin \beta$ iſt.

Folglich kann das Thier zwar nur einen kleineren Widerſtand mit eben der Geſchwindigkeit wältigen, wenn es unter einem ſchiefen Winkel cde zieht; aber es macht auch in einer beſtimmten Zeit ſovielmal mehr Umgänge als beim ſenkrechten Zug, ſovielmal ſeine ſenkrechte Wirkung durch den ſchiefen Zug verkleinert wird.

Der Totaleffekt der Maſchine hängt alſo gar nicht von β ab, wohl aber der Nutzeffekt. Es verhält ſich nämlich die Umlaufszeit T wie $\sin \beta$, und der Nutzeffekt wie $\frac{Q}{T}$, alſo auch wie $\frac{Q}{\sin \beta}$, d. i. bei einerlei r, wie

$$R . P - \frac{\mu . \varrho . \left(\frac{2}{3} p + \frac{P}{r} \sqrt{(R^2 + r^2)}\right)}{\sin \beta}$$

Er iſt alſo bei ungeänderten Werthen von R und P deſto kleiner, ie kleiner β iſt, und der Verluſt am Totaleffekt verhält ſich verkehrt wie der Sinus des ſchiefen Winkels, unter welchem das Thier zieht. Man ſieht, daß einige Abweichung des Zugs vom rechten Winkel für den Effekt in der Ausübung ganz unbemerkbar bleibt, wenn nur β nicht unter 80° beträgt.

Zuſ. 3.

§. 76. Befände ſich an der Welle ein Krummzapfen, deſſen Armlänge $= r$ wäre, mit der Laſt Q,

ſo hätte man wie bei den vorigen Roßkünſten aus (§. 73) 0,637 . r ſtatt r, alſo 0,4 . r² ſtatt r² geſetzt, P =

$$\frac{0{,}637 . r . Q + \mu . \varrho \left(\frac{2}{3} p + \frac{0{,}637 \; Q}{R} \sqrt{(R^2 + 0{,}4 . r^2)}\right)}{R . \sin\beta} + V$$

und Q =

$$\frac{R.(P-V).\sin\beta - \mu \varrho . \left(\frac{2}{3} p + \frac{P-V}{0{,}637 . r} . \sqrt{(R^2 + 0{,}4 \, r^2)}\right)}{0{,}637 . r}$$

Anm. Bei den Bergwerken bedient man ſich zur Aufförderung des Geſteins, wenn Roßkünſte gebraucht werden, gewöhnlich des Pferdegöpels. Damit iſt aber keineswegs der Vorzug deſſelben vor dem Laufrade und der Tretſcheibe entſchieden.

Man muß übrigens cd (fig. 48) lange genug, nicht unter 20 Rhl. Fuſſe nehmen. Sollen 2 Tiere neben einander ziehen, ſo muß man noch einige Fuſſe in der Länge zugeben.

Bei dem erwähnten Gebrauch der Pferdegöpeln zur Aufförderung des Geſteins aus den Schachten wird, wie ſchon oben bemerkt worden, ein doppelter Korb um die Welle gelegt; der untere iſt unbeweglich an die Welle befeſtigt, die vierkantig durch ihn durchgeht; der obere liegt auf dem unteren auf (nämlich die untere Scheibe des oberen Korbes auf der oberen Scheibe des unteren Korbes), und iſt mit der Welle und mit dem unteren Korbe auf eine ſolche Weiſe verbunden, daß ſich dieſe Verbindung leicht aufheben und dann die Welle ſamt dem unteren Korbe ſich drehen läßt, ohne daß der obere Korb ſich mit bewegt.

Die Verbindung mit der Welle geſchieht nämlich dadurch, daß man die Welle noch vierkantig durch die untere

Schei-

Scheibe dieſes oberen Korbes durchgehen läßt, die ſich ringsum an die Welle anſchließt; oberhalb der unteren Scheibe geht die Welle abgerundet durch den Korb und durch ſeine obere Scheibe durch.

Die Verbindung des oberen Korbes mit dem unteren geſchieht durch ein paar befeſtigte vierkantige ſtarke Hölzer, welche durch beide Scheiben des oberen Korbes durchgehen und unten in viereckte Ausſchnitte der oberen Scheibe des unteren Korbes einpaſſen.

Der obere Korb kann nun mittelſt eines Hebels ſo hoch erhoben werden, daß die untere Scheibe über den vierkantigen Theil der Welle hinauf kommt und zugleich iene ſtarke Zapfen oder Riegelhölzer die obere Scheibe des unteren Korbes ganz verläßt. So hängt nun der obere Korb mit drei Ketten an dem erwähnten Hebel und die Welle mit dem unteren Korbe kann iezt nach Willkührlich herumgedreht werden, ohne den oberen mit herum zu drehen.

Dieſe Einrichtung hat ihren Nutzen bei Abteufungen der Schächte, wo man von Zeit zu Zeit, ſo wie man tiefer kommt, die beiden von dem doppelten Korbe über Rollen geleitete Seilenden verlängern muß. Soll z. B. iedes Seilſtück um 3 Fuſſe verlängert werden, ſo hebt man den oberen Korb mit dem Hebel in die Höhe, indem die an dem Korbe oben angebrachten drei Ketten an einen am Ende des Hebels befeſtigten Haken eingehenkt werden, und läßt nun den Zugbaum ſolange herumdrehen, bis das vom unteren Korbe herabhängende Seilſtück ſich um 6 Fuße (das doppelte von 3 F.) weiter abgewunden hat, worauf der obere Korb wieder niedergelaſſen und in den unteren eingepaßt wird.

Damit nicht, wenn eine Wage oder ein Strick, woran die Thiere geſpannt ſind, zerbräche, die beladene Tonne im Schacht wieder zurückfallen und ſo die Körbe nach der entgegengeſetzten Seite herumdrehen können, ſo läßt man an iedem Zugbaume zwei Sperrſtangen anbringen, die am einen Ende mit einer ſtarken eiſernen Spitze verſehen ſind,

da

da man dann beim Herumdrehen iedesmal von iedem Zugbaum eine ſolche Stange nachſchleifen läßt.

Ueberdas bringt man zwei horizontale Premsbäume an, d. h. zwei horizontale Bäume, die ſich auf eine bequeme Weiſe beide zugleich an den Rand der unteren Scheibe andrucken und wieder abziehen laſſen. Einen Begriff davon giebt fig. 49; K iſt der Rand oder Umfang der unteren Scheibe des unteren Korbes; AB, CD horizontale Hölzer, die Premsbäume, die ſich um lothrechte Zapfen c drehen laſſen; E der wagrechte Durchſchnitt einer lothrechten Welle, die ſich durch einen Arm EF leicht hin und her drehen läßt. Zwei kurze Aerme oder Daumen, die an ebendieſer Welle einander entgegengeſetzt ſind, ſeyen durch Stangen mn mit den Premsbäumen verbunden; wird nun der Arm EF von b nach a gedreht, ſo werden beide Premsbäume AB, CD an die Scheibe K angepreßt; wird EF von a nach b gedreht, ſo treten die Premsbäume wieder zurück und der untere Korb wird wieder frei.

So oft Umſtände die Hemmung der Bewegung erfodern, wird geprem ſt, alſo von a nach b gedreht.

Hierher gehörige Schriften.

Lempe, angef. Lehrbegr. der Maſchinenl.

Kunze angef. Schauplatz.

Delius Anleit. zur Bergbaukunſt. Wien 1773.

v. Cancrin Bergmaſchinenkunſt, in ſeiner Berg- und Salzwerkskunde.

Poda, Kurzgefaßte Beſchreibung der Maſchinen beim Bergbau zu Schemniz in Niederungarn. Prag 1771.

Zehentes Kapitel.
Von den Rollen und Flaſchenzügen.

Erklärung 27.

§. 77. Eine Scheibe, die ringsum zum Einlegen eines Seils (einer Schnure oder auch einer Kette) mit einer Vertiefung verſehen und entweder um einen feſt liegenden Polzen beweglich oder um einen Polzen, der ſich um ſeine Axe drehen läßt, befeſtigt iſt, heißt eine **Rolle**. Das Gehäus beſteht aus vier Wänden, wie die vier Seitenwände eines parallelepipediſchen Kaſtens, wovon iedoch die untere zuweilen fehlt; die Seitenwände, in welchen die Zapfen liegen, heiſſen **Backen**; das ganze Gehäus heißt hier eine **Flaſche**, die oben einen ſtarken Ring oder einen Haken führt, wenn ſie überall aufgehenkt werden ſoll (ſ. fig. 50). Dieſer Haken geht durch die obere Wand durch und iſt unten geplattet oder mit einer vorgeſchrobenen Mutter verſehen, ſo daß ſich die Flaſche ſelbſt um dieſen Zapfen herumdrehen läßt.

Anm. Die Flaſchen ſowohl als die Rollen können von Eiſen, von Meſſing oder auch von Holz verfertigt werden; nur werden ſie im letztern Falle mit Eiſen beſchlagen. In der Folge werden dergleichen Rollen auch durch bloße Kreiſe vorgeſtellt werden.

Aufg. 13.

§. 78. Eine Rolle (wie fig. 50) ſey mit ihrer Flaſche an einer feſten Stelle aufgehenkt; um ſie

herum ſey ein Seil gelegt, an deſſen einem Ende eine Laſt Q nach mQ (fig. 51), am andern nP eine Kraft P nach nP zieht: man ſucht die Bedingungen des Gleichgewichts zwiſchen P und Q.

Aufl. 1. Man ziehe die Halbmeſſer cm, cn nach den Berührungs- oder Angriffspunkten m, n, ſo iſt ncm ein Winkelhebel, an welchem P und Q ſenkrecht in m und n angebracht ſind.

2. Aus beiden Preſſungen P und Q entſteht eine dritte F nach der Diagonale dc, ſo daß

$$F = \sqrt{(P^2 + Q^2 - 2P.Q.\operatorname{Cos} mcn)}$$

(Dyn. §. 44)

woraus an den Zapfen eine Reibung

$$\mu.F = \mu.\sqrt{(P^2 + Q^2 - 2P.Q.\operatorname{Cos} mcn)}$$

entſteht, deren ſtat. Moment

$$= \varrho.\mu.\sqrt{(P^2 + Q^2 - 2P.Q.\operatorname{Cos} mcn)}$$

iſt, wenn ϱ den Halbmeſſer der Zapfen bedeutet.

3. Man hat alſo für das Gleichgewicht, ſo daß die Reibung mit überwunden wird, die Steifigkeit des Seils noch bei Seite geſetzt, wenn man cn = cm = R ſetzt,

$$R.P = R.Q + \varrho.\mu.\sqrt{(P^2 + Q^2 - 2P.Q.\operatorname{Cos} mcn)}$$

4. Bedeutet δ den Durchmeſſer des Seils, und werden alle Längen in Par. Linien ausgedruckt, ſo muß man (§. 28) *) wegen der Steifigkeit des Seils

$Q + \frac{\delta^{1,4}.(2,45 + 0,053.Q}{R}$ ſtatt Q ſetzen, wodurch

*) Ich ſetze allemal gebrauchte Seilen voraus, überhaupt Maſchinen, die ſchon einige Zeit im Gebrauche ſind.

durch der Ausdruck (no. 3) noch gröſſere Genauigkeit erhält.

5. Für die Ausübung iſt es aber hinlänglich genau, unter dem Wurzelzeichen Q = P zu ſetzen, wodurch ſich (no. 3)

$$R.P = R.Q + \varrho.\mu.\sqrt{2P^2(1 - \mathrm{Cof\,mcn})}$$

ergiebt; und wegen der Steifigkeit des Seils (no. 4)

$$R.P = R.Q + \delta^{1,4}.(2{,}45 + 0{,}053.Q) + \varrho.\mu.P.\sqrt{2.(1 - \mathrm{Cof\,mcn})}$$

Demnach

$$P = \frac{R.Q + \delta^{1,4}.(2{,}45 + 0{,}053.Q)}{R - \varrho.\mu.\sqrt{2.(1 - \mathrm{Cof\,mcn})}}$$

und

$$Q = \frac{(R - \varrho.\mu\sqrt{2.(1 - \mathrm{Cof\,mcn})}).P - 2{,}45.\delta^{1,4}}{R + 0{,}053.\delta^{1,4}}$$

wo ſich alle Längen auf Par. Linien und Q und P auf Pfünde beziehen.

6. Bei dem gewöhnlichen Gebrauch der Rollen hat man mcn = 180°, alſo Cof mcn = − 1, und es wird daher für dieſen Fall

$$P = \frac{R.Q + \delta^{1,4}.(2{,}45 + 0{,}053.Q)}{R - 2\varrho.\mu}$$

$$Q = \frac{(R - 2\varrho\mu).P - 2{,}45.\delta^{1,4}}{R + 0{,}053.\delta^{1,4}}$$

Dabei iſt das Gewicht der Rolle bei Seite geſetzt worden. Heißt dieſes p, ſo muß man

im Zähler des Werthes von P noch $\mu.\varrho.p$ addiren, und

 im

im Zähler des Werthes von Q noch $\mu . \varrho . p$ abziehen,

woferne nicht p als unbedeutend in Vergleichung mit P und Q weggelaſſen werden könnte.

Aufg. 14.

§. 79. Die Rolle ſey mit ihrer Axe ſelbſt beweglich und liege auf dem Seil auf, wie (fig 52); das eine Ende des Seils ſey bei e an einen feſten Kloben befeſtigt, an dem andern Ende ziehe nach nP eine Kraft P; an der Flaſche ſey eine Laſt Q lothrecht angebracht, ſo daß Pnme und die Richtungslinie von Q in eine einzige lothrechte Ebene fallen: man ſucht das Verhältniß des Gleichgewichts zwiſchen P und Q, ſo daß die Kraft alle Nebenhinderniſſe mit aufheben ſoll.

Aufl. 1. Der Druck nach cQ iſt, wenn p das Gewicht der Flaſche mit der Rolle bezeichnet, $= Q + p$, und hieraus entſteht am Umfang des Zapfens, deſſen Halbmeſſer ϱ iſt, das ſtat. Mom. der Reibung $\varrho . \mu (Q + p)$.

2. Die Spannung des Seils nach me ſey dem Zuge eines Gewichts Q' gleich, und die daraus bei m entſtehende Hinderniß wegen der Steifigkeit des Seils heiſſe S, ſo bleibt die der Spannung P entgegenwirkende Hinderniß n, wenn ϱ und R die Halbmeſſer der Zapfen und der Rolle bezeichnen,

$$= Q' + S + \frac{\varrho}{R} . \mu . (Q + p)$$

die alſo $= P$ iſt.

Daher

Daher

$$Q' = P - S - \frac{\varrho}{R} \cdot \mu \cdot (Q + p)$$

3. Aus dieſen beiden Seitenkräften entſteht die mittlere

$$\sqrt{2\left((P - S - \frac{\varrho}{R} \cdot \mu \cdot (Q + p))^2 . (1 - \mathrm{Cof}\, mcn)\right)}$$

die der $Q + p$ gleich ſeyn muß. Man hat alſo

$$(Q + p)^2 = (P - S - \frac{\varrho}{R} . \mu . (Q + p))^2 . 2 . (1 - \mathrm{Cof}\, mcn)$$

Demnach

$$Q = \frac{(P - S) \sqrt{2 . (1 - \mathrm{Cof}\, mcn)}}{1 + \frac{\varrho}{R} . \mu . \sqrt{2 . (1 - \mathrm{Cof}\, mcn)}} - p$$

und

$$P = \frac{(1 + \frac{\varrho}{R} . \mu . \sqrt{2 . (1 - \mathrm{Cof}\, mcn)}) . (Q + p)}{\sqrt{2 . (1 - \mathrm{Cof}\, mcn)}} + S$$

4. Für $mcn = 180°$ wird $\mathrm{Cof}\, mcn = -1$, alſo für dieſen Fall

$$Q = \frac{2 . (P - S)}{1 + 2 . \frac{\varrho}{R} . \mu} - p$$

und

$$P = \frac{(1 + 2 . \frac{\varrho}{R} . \mu) . (Q + p)}{2} + S$$

 Oder

Oder für die Ausübung immer genau genug (§. 28)

$$Q = \frac{2.\left(P - \frac{\delta^{1,4}}{R}.(2{,}45 + 0{,}053.P)\right)}{1 + 2.\frac{\varrho}{R}.\mu} - p$$

und

$$P = \frac{(1+\frac{2\varrho}{R}.\mu)(Q+p)}{2} + \frac{\delta^{1,4}}{R}.(2{,}45+0{,}053.\tfrac{1}{2}Q)$$

wo dann δ, ϱ und R in Par. Linien und die Gewichte in Pfunden ausgedruckt werden.

Erklärung 28.

§. 80. Denkt man ſich das eine Ende des Seiles wie me (fig. 52) am unteren Haken e einer bei k aufgehenkten Flaſche (fig. 50) befeſtigt, und das andere nP (fig. 52), welches die bewegliche Flaſche unterſtützt, über die Rolle k (fig. 50) gelegt, daß alſo mit dem Herunterziehen dieſes Seilendes die untere Flaſche aufwärts gezogen wird, ſo heißt dieſe Verbindung einer beweglichen Flaſche mit einer unbeweglichen ein Flaſchenzug.

In einer Flaſche können bei hinlänglich hohen Backen drei, vier und mehrere Rollen angebracht werden; auch kann man ſich Abänderungen einer ſolchen Verbindung und ſelbſt mehr als zwei Flaſchen mit einander verbunden denken. Einen Flaſchenzug, bei welchem das eine Seilende an der unbeweglichen Flaſche befeſtiget iſt, wie bei e (fig. 53), will ich der erſtern Art; einen ſolchen, bei welchem das eine Seilende an

der

der beweglichen Flaſche befeſtiget iſt, wie (fig. 54), Flaſchenzug der andern Art nennen.

Anm. Noch andere Einrichtungen von Flaſchenzügen, die ohnehin entbehrlich ſind, findet man in den am Ende dieſes Kap. angezeigten Schriften.

Aufg. 15.

§. 81. An einem Flaſchenzug der erſtern Art, wie (fig. 53), ſey unten eine Laſt Q angebracht; oben am Anfange des Seils ziehe eine Kraft P nach KP; man ſoll die Bedingungen des Gleichgewichts zwiſchen P und Q beſtimmen.

Aufl 1. Das erſte von oben herab gehende Seilſtück JH leidet von H nach J eine Spannung wie von einem an einem herabhängenden Seile befeſtigten Gewichte, das ich P′ nennen will; und in dieſem Sinne ſetze ich dieſe Spannung ſelbſt $= P'$.

Der Polzen N leidet alſo eine Reibung

$$= \mu . (P + P')$$

Setzt man den Halbmeſſer NJ der Rolle $= R'$, den Durchmeſſer des Seils $= \delta$, ſo iſt der bei J entſtehende Widerſtand von der Steifigkeit des Seils (§. 28)

$$= \frac{\delta^{1,4}}{R'} . (2,45 + 0,053 . P')$$

Der Halbmeſſer des Polzens N ſey $= \varrho'$, ſo iſt die Reibung auf dieſelbe Stelle J reducirt

$$= \mu . \frac{\varrho'}{R} . (P + P')$$

Demnach

$$P' = P - \frac{\mu \cdot \varrho'}{R'} \cdot (P+P') - \frac{\delta^{1,4}}{R'} \cdot (2{,}45 + 0{,}053 . P')$$

und

$$P' = \frac{(R' - \mu\varrho') . P - 2{,}45 . \delta^{1,4}}{R' + \mu\varrho' + 0{,}053 . \delta^{1,4}}$$

Statt $2{,}45 . \delta^{1,4}$ will ich B ſetzen, alſo

$$P' = \frac{(R' - \mu\varrho') . P - B}{R' + \mu\varrho' + 0{,}053 . \delta^{1,4}}$$

2. Wenn nun die Halbmeſſer der Rollen L, M, C u. ſ. w. mit R'', R''', R'''' u. ſ. w. die Halbmeſſer der zugehörigen Polzen mit ϱ'', ϱ''', ϱ'''' ꝛc. und die Spannungen an den Seilſtücken HJ, GF, BE ꝛc. bei J, F, B ꝛc. mit P', P'', P''' ꝛc. bezeichnet werden, ſo hat man

$$P'' = \frac{(R'' - \mu\varrho'') . P' - B}{R'' + \mu\varrho'' + 0{,}053 . \delta^{1,4}}$$

$$P''' = \frac{(R''' - \mu\varrho''') . P'' - B}{R''' + \mu\varrho''' + 0{,}053 . \delta^{1,4}}$$

$$P'''' = \frac{(R'''' - \mu\varrho'''') . P''' - B}{R'''' + \mu\varrho'''' + 0{,}053 . \delta^{1,4}}$$

u. ſ. w.

3. Von der Kraft oder Spannung P' wirkt nur ein Theil $= P''$ auf die Bewegung der Nutzlaſt, weil der übrige Theil mit der Reibung am Polzen L und mit der Steifigkeit des Seils im Gleichgewicht iſt. Derienige Theil der geſammten Nutzlaſt, welcher den unterſten Polzen nach LQ niederzuziehen ſtrebt, heiſſe Q', ſo wirken Kraft und Laſt (P'' und Q') an dieſer

Rolle

Rolle wie an einem Hebel der andern Art. Sollte nämlich die Flaſche erhoben werden, ſo müßte ſich die Rolle um G wälzen oder G wäre der Bewegungspunkt, die Entfernung der bewegenden Kraft vom Bewegungspunkte wäre die Sehne HG und die Entfernung der Laſt von dieſem Punkte = dem Halbmeſſer G𝔨 = R''; alſo für das Gleichgewicht

$$Q' = \frac{GH}{R''} . P''$$

Wenn alſo die Sehnen GH, AB u. ſ. w. von unten hinauf mit S'', S'''' u. ſ. w. bezeichnet werden, und Q'', Q''' u. ſ. w. für die 2te, 3te ꝛc. Rolle von unten eben das bedeuten, was Q' für die erſte, ſo hat man

$$Q' = \frac{S''}{R''} . P''$$

$$Q'' = \frac{S''''}{R''''} . P''''$$

$$Q''' = \frac{S^{VI}}{R^{VI}} . P^{VI}$$

u. ſ. w.

4. Weil nun die ganze untere Flaſche von der geſammten Nutzlaſt Q niedergezogen wird, ſo müſſen die lothrechten Preſſungen, welche ſämtliche Polzen der unteren Flaſche leiden, zuſammengenommen = Q ſeyn, alſo hat man

$$Q = \frac{S''}{R''} . P'' + \frac{S''''}{R''''} . P'''' + \frac{S^{VI}}{R^{VI}} . P^{VI} + \text{ꝛc.}$$

wo nämlich noch mehrere Glieder hinzukämen, wenn mehr als 3 Rollen in der unteren Flaſche vorhanden wären.

5. Subſtituirt man die Werthe von P'', P^{IV}, P^{VI}, ſo ergiebt ſich für dieſen Flaſchenzug mit 3 unteren Rollen

$$Q = \frac{S''}{R''} \cdot \frac{(R'' - \mu\varrho'') \cdot P' - B}{R'' + \mu\varrho'' + 0{,}053 \cdot \delta^{1,4}} + \frac{S''''}{R''''} \cdot \frac{(R'''' - \mu\varrho'''') \cdot P''' - B}{R'''' - \mu\varrho'''' + 0{,}053 \cdot \delta^{1,4}} + \frac{S^{VI}}{R^{VI}} \cdot \frac{(R^{VI} - \mu\varrho^{VI}) \cdot P^{V} - B}{R^{VI} - \mu\varrho^{VI} + 0{,}053 \cdot \delta^{1,4}}$$

6. Zur Abkürzung nehme ich für alle Rollen ihren mittleren Halbmeſſer, den ich R nennen will, für alle Polzen gleichfalls ihren mittleren Halbmeſſer, den ich ϱ nennen will, und für alle Sehnen GH, AB ꝛc. ihren mittleren Werth, den ich mit S bezeichne, ſo wird

$$P' = \frac{(R - \mu\varrho) \cdot P - B}{R + \mu\varrho + 0{,}053 \cdot \delta^{1,4}};\quad P'' = \frac{(R - \mu\varrho) \cdot P' - B}{R + \mu\varrho + 0{,}053 \cdot \delta^{1,4}} = \frac{(R - \mu\varrho)^2 P - (R - \mu\varrho) \cdot B}{(R + \mu\varrho + 0{,}053 \cdot \delta^{1,4})^2} - \frac{B}{R + \mu\varrho + 0{,}053 \cdot \delta}$$

$$P''' = \frac{(R - \mu\varrho) P'' - B}{R + \mu\varrho + 0{,}053 \cdot \delta^{1,4}} = \frac{(R - \mu\varrho)^3 \cdot P - (R - \mu\varrho)^2 \cdot B}{(R + \mu\varrho + 0{,}053 \cdot \delta^{1,4})^3} - \frac{(R - \mu\varrho) \cdot B}{(R + \mu\varrho + 0{,}053 \cdot \delta^{1,4})^2} - \frac{B}{R + \mu\varrho + 0{,}053 \cdot \delta^{1,4}}$$

$$P'''' = \frac{(R - \mu\varrho)^4 \cdot P - (R - \mu\varrho)^3 \cdot B}{(R + \mu\varrho + 0{,}053 \cdot \delta^{1,4})^4} + \frac{(R - \mu\varrho)^2 \cdot B}{(R + \mu\varrho + 0{,}053 \cdot \delta^{1,4})^3} - \frac{(R - \mu\varrho) \cdot B}{(R + \mu\varrho + 0{,}053 \cdot \delta^{1,4})^2} - \frac{B}{R + \mu\varrho + 0{,}053 \cdot \delta^{1,4}}$$

$$P^{V} = \frac{(R - \mu\varrho)^5 P - (R - \mu\varrho)^4 \cdot B}{(R + \mu\varrho + 0{,}053 \cdot \delta^{1,4})^5} + \frac{(R - \mu\varrho)^2 \cdot B}{(R + \mu\varrho + 0{,}053 \cdot \delta^{1,4})^4} - \frac{(R - \mu\varrho)^2 \cdot B}{(R + \mu\varrho + 0{,}053 \cdot \delta^{1,4})^3} - \frac{(R - \mu\varrho) \cdot B}{(R + \mu\varrho + 0{,}053 \cdot \delta^{1,4})^2} - \frac{B}{R + \mu\varrho + 0{,}053 \cdot \delta^{1,4}}$$

7. Setzt

7. Setzt man $R + \mu\varrho + 0{,}053 \cdot \delta^{1,4} = A$, ſo erhält man nunmehr (no. 5)

$$Q = \frac{S}{R} \cdot \Big[\Big(\frac{(R-\mu\varrho)^2 \cdot P - (R-\mu\varrho) \cdot B}{A^2} + \frac{B}{A} \Big) + \Big(\frac{(R-\mu\varrho)^4 \cdot P - (R-\mu\varrho)^3 \cdot B}{A^4}$$

$$- \frac{(R-\mu\varrho)^2 \cdot B}{A^3} - \frac{(R-\mu\varrho) \cdot B}{A^2} - \frac{B}{A} \Big) + \Big(\frac{(R-\mu\varrho^6) \cdot P - (R-\mu\varrho)^5 \cdot B}{A^6}$$

$$- \frac{(R-\mu\varrho)^4 \cdot B}{A^5} - \frac{(R-\mu\varrho)^3 \cdot B}{A^4} - \frac{(R-\mu\varrho)^2 \cdot B}{A^3} - \frac{(R-\mu\varrho) \cdot B}{A^2} - \frac{B}{A} \Big) \Big]$$

$$= \frac{S}{R} \cdot \Big[\Big(\frac{(R-\mu\varrho)^2}{A^2} + \frac{(R-\mu\varrho)^4}{A^4} + \frac{(R-\mu\varrho)^6}{A^6} \Big) \cdot P - \Big(\frac{R-\mu\varrho}{A} + \frac{(R-\mu\varrho)^2}{A^3} + \frac{(R-\mu\varrho)^3}{A^4}$$

$$+ \frac{(R-\mu\varrho)^4}{A^5} + \frac{(R-\mu\varrho)^5}{A^6} \Big) \cdot B - \Big(\frac{(R-\mu\varrho)}{A^2} + \frac{(R-\mu\varrho)^2}{A^3} + \frac{(R-\mu\varrho)^3}{A^4} \Big) \cdot B$$

$$- \frac{R-\mu\varrho}{A^2} \cdot B - 3 \cdot \frac{B}{A} \Big]$$

8. Für die Ausübung iſt es hinlänglich, bloß das erſte Hauptglied beizubehalten, welches

$$Q = \frac{S}{R} \cdot \Big(\Big(\frac{R-\mu\varrho}{A}\Big)^2 + \Big(\frac{R-\mu\varrho}{A}\Big)^4 + \Big(\frac{R-\mu\varrho}{A}\Big)^6 \Big) \cdot P$$

giebt

giebt, oder allgemein, wenn die untere Flaſche n Rollen enthält,

$$Q = \left(\left(\frac{R-\mu\varrho}{A}\right)^2 + \left(\frac{R-\mu\varrho}{A}\right)^4 + \left(\frac{R-\mu\varrho}{A}\right)^6 \right.$$

$$\left. \ldots\ldots + \left(\frac{R-\mu\varrho}{A}\right)^{2n} \right) \cdot \frac{S}{R} \cdot P$$

$$= \frac{1-\left(\frac{R-\varrho\mu}{A}\right)^{2n}}{\left(\frac{A}{R-\varrho\mu}\right)^2 - 1} \cdot \frac{S}{R} \cdot P \quad (\text{Alg. §. 30})$$

oder auch

$$Q = \frac{(R-\varrho\mu)^2 \cdot \left(1-\left(\frac{R-\varrho\mu}{A}\right)^{2n}\right)}{A^2-(R-\varrho\mu)^2} \cdot \frac{S}{R} \cdot P$$

und

$$P = \frac{A^2-(R-\mu\varrho)^2}{(R-\mu\varrho)^2 \cdot \left(1-\left(\frac{R-\mu\varrho}{A}\right)^{2n}\right)} \cdot \frac{R}{S} \cdot Q$$

oder

$$P = \frac{A^{2n}}{(R-\mu\varrho)^2} \cdot \frac{A^2-(R-\mu\varrho)^2}{A^{2n}-(R-\mu\varrho)^{2n}} \cdot \frac{R}{S} \cdot Q$$

Zuſ. 1

§. 82. Wird Reibung und Steifigkeit des Seils bei Seite geſetzt, ſo wird $A = R$, und

$$Q = \frac{R^2 \cdot \left(1-\left(\frac{R}{R}\right)^{2n}\right)}{R^2-R^2} \cdot \frac{S}{R} \cdot P$$

$$= \frac{R^2 \cdot (R^{2n}-R^{2n})}{R^{2n} \cdot (R^2-R^2)} \cdot \frac{S}{R} \cdot P$$

Es

Es iſt aber $\frac{R^{2n} - R^{2n}}{R^2 - R^2} = n R^{2n-2}$, alſo in dieſem Falle

$$Q = \frac{R^2}{R^{2n}} \cdot n R^{2n-2} \cdot \frac{S}{R} \cdot P$$

$$= n \cdot \frac{S}{R} \cdot P$$

welches bei paralleler Lage der Seilſtücken

$$Q = 2n \cdot P$$

giebt.

Zuſ. 2.

§. 83. Da, wenn keine Nebenhinderniſſe vorhanden wären, $P = \frac{R}{n \cdot S} \cdot Q$ wäre, ſo iſt die mit der Nutzlaſt Q verbundene Nebenlaſt =

$$\left(\frac{A^2 - (R - \mu\varrho)^2}{(R^2 - \mu\varrho)^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{R - \mu\varrho}{A}\right)^{2n}\right)} - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{R}{S} \cdot Q$$

Wenn alſo

$$\frac{A^2 - (R - \mu\varrho)^2}{(R^2 - \mu\varrho)^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{R - \mu\varrho}{A}\right)^{2n}\right)} > 2 \cdot \frac{1}{n}$$

iſt, ſo iſt die mit der Nutzlaſt verbundene Nebenlaſt gröſſer als die Nutzlaſt.

In dieſem Falle alſo, d. i. wenn

$$\frac{n \cdot (A^2 - (R - \mu\varrho)^2)}{2 \cdot (R - \mu\varrho)^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{R - \mu\varrho}{A}\right)^{2n}\right)} > 1$$

iſt,

iſt, kann die untere Flaſche durch Vergröſſerung der Laſt Q nie zum Sinken gebracht werden.

Anm. In der Ausübung ſind die Flaſchenzüge ſehr wichtig, und die hier betrachteten der erſtern Art (fig. 53) die gewöhnlichſten. Die Entfernung der beiden Flaſchen von einander iſt gewöhnlich groß genug, um die einzelen Seilſtücke als parallel annehmen zu können, da dann $\frac{S}{R} = a$ geſetzt werden darf. Der Durchmeſſer der Rollen beträgt gewöhnlich 5 bis 10 Rhl. Zolle. Die gröſſeren machen den Widerſtand der Reibung unſchädlicher. Mehr als 3, höchſtens 4 Rollen nimmt man aus doppeltem Grunde nicht gerne zu einer Flaſche. Soll nämlich die Laſt Q z. B. um einen Fuß erhoben werden, ſo müſſen alle 6 Seilſtücke, durch welche die Linien op, qr durchgehen, um einen Fuß weiter hinauf rücken oder um einen Fuß kürzer werden, daher das Endſtück KP um 6 Fuſſe herabgezogen werden muß, um die Laſt nur um einen Fuß zu erheben; bei 4 Rollen in einer Flaſche müßte, um die Laſt auf einen Fuß zu erheben, das SeilendeeKP um 8 Fuſſe niedergezogen werden; überhaupt bei n Rollen in einer Flaſche müßte, um die Laſt auf einen Fuß zu erheben, das Seilende KP um 2n Fuſſe niedergezogen werden. Daher braucht man deſto längere Zeit zur Erhebung der Laſt, je gröſſer n iſt; auſſerdem wird aber auch die Nebenlaſt deſto beträchtlicher, je gröſſer n wird, ſo daß ſie ſogar gröſſer als die Nutzlaſt werden könnte.

Aufg. 16.

§. 84. Für einen Flaſchenzug der andern Art (fig. 54) die Bedingungen des Gleichgewichts zwiſchen P und Q zu beſtimmen.

Aufl.

Aufl. 1. Man hat hier wie im vorigen Falle (§. 81)

$$
\begin{aligned}
\text{Spannung nach } HJ &= P' \\
- \quad FG &= P'' \\
- \quad BE &= P''' \\
- \quad vA &= P'''' \\
- \quad ew &= P^{v}
\end{aligned}
$$

und (§. 81. no. 1 und 2), wenn für alle Rollen und ihre Polzen die mittleren Halbmeſſer R, ϱ angenommen werden,

$$P' = \frac{(R - \mu\varrho) . P - B}{R + \mu\varrho + 0{,}053 . \delta^{1,4}}$$

$$= \frac{(R - \mu\varrho) . P - B}{A}$$

$$P'' = \frac{(R - \mu\varrho) . P' - B}{A}$$

$$P''' = \frac{(R - \mu\varrho) . P'' - B}{A}$$

u. ſ. w.

2. Wenn nun wie (§. 81. no. 3)

Q' den lothrechten Druck bei £

Q'' den — — — bei C

Q''' den — — — bei e

bezeichnet, und S wie vorher die Sehnen GH, AB ausdruckt, ſo hat man

$$Q' = \frac{S}{R} . P''$$

$$Q'' = \frac{S}{R} . P''''$$

$$Q''' = P^{v} .$$

Läßt

Läßt man nun B in den Werthen von P′, P″ ꝛc. weg, ſo hat man

$$Q' = \frac{S}{R} \cdot \frac{R-\mu\varrho}{A} \cdot P'$$

$$= \frac{S}{R} \cdot \left(\frac{R-\mu\varrho}{A}\right)^2 \cdot P$$

$$Q'' = \frac{S}{R} \cdot \left(\frac{R-\mu\varrho}{A}\right)^4 \cdot P$$

$$Q''' = \left(\frac{R-\mu\varrho}{A}\right)^5 \cdot P$$

und nun für dieſe 2 rollige Flaſche

$$Q = Q' + Q'' + Q''' =$$

$$\frac{S}{R} \cdot P \cdot \left(\left(\frac{R-\mu\varrho}{A}\right)^2 + \left(\frac{R-\mu\varrho}{A}\right)^4\right) + \left(\frac{R-\mu\varrho}{A}\right)^5 \cdot P$$

oder allgemein, wenn die untere Flaſche (fig. 54) n Rollen führt

$$Q = \frac{S}{R} \cdot P \cdot \left(\left(\frac{R-\mu\varrho}{A}\right)^2 + \left(\frac{R-\mu\varrho}{A}\right)^4 + \left(\frac{R-\mu\varrho}{A}\right)^6 \right.$$

$$\left. \ldots\ldots + \left(\frac{R-\mu\varrho}{A}\right)^{2n}\right) + \left(\frac{R-\mu\varrho}{A}\right)^{2n+1} \cdot P$$

3. Die eingeſchloſſene Reihe im Werthe von Q beſteht aus n Gliedern, deren Summe

$$= \frac{1 - \left(\frac{R-\varrho\mu}{A}\right)^{2n}}{\left(\frac{A}{R-\varrho\mu}\right)^2 - 1}$$

wie (§. 81) iſt.

Dem·

Demnach hier

$$Q=\left(\frac{1-\left(\frac{R-\varrho\mu}{A}\right)^{2n}}{\left(\frac{A}{R-\varrho\mu}\right)^{2}-1}\cdot\frac{S}{R}+\left(\frac{R-\mu\varrho}{A}\right)^{2n+1}\right).P$$

und

$$P=\frac{Q}{\frac{S}{R}\cdot\frac{1-\left(\frac{R-\varrho\mu}{A}\right)^{2n}}{\left(\frac{A}{R-\varrho\mu}\right)^{2}-1}+\left(\frac{R-\mu\varrho}{A}\right)^{2n+1}}$$

Zuſ.

§. 85. Wird Reibung an den Polzen und Steifigkeit des Seils bei Seite geſetzt, ſo erhält man (nach §. 82)

$$Q=(n.\frac{S}{R}+1).P$$

Setzt man nun überdas $\frac{S}{R}=2$, ſo wird

$$Q=(2n+1).P=2.(n+\tfrac{1}{2}).P$$

Daher ſagt man, ein Flaſchenzug der andern Art (fig. 54), deſſen bewegliche Flaſche n Rollen führt, laſſe ſich als ein Flaſchenzug der erſtern Art (fig. 53) betrachten, deſſen bewegliche Flaſche $n+\frac{1}{2}$ Rollen führe, weil für dieſe, wenn keine Nebenhinderniſſe vorhanden wären, gleichfalls $Q=2.(n+\frac{1}{2}).P$ ſeyn würde (§. 82).

Inzwiſchen gilt dieſer Satz nur, wenn alle Nebenhinderniſſe bei Seite geſetzt werden.

Anm. In der Ausübung werden ſowohl Menſchen als Thiere, nur letztere ſeltener, bei Flaſchenzügen zur Erhebung der Laſten gebraucht. Die Anzahl der erfoderlichen Thiere oder Menſchen, welche zur Erhebung einer Laſt Q erfoderlich ſind, läßt ſich, ſobald P berechnet iſt, aus (§. 28) leicht beſtimmen. Wenn die Kraft eines Geſchöpfes überhaupt p heißt, und die erfoderliche Anzahl N iſt, ſo hat man

$$N = \frac{P}{p}$$

Die Geſchöpfe müſſen nur Anfangs etwas mehr Kraft anwenden, d. h. eine Kraft, die gröſſer als p iſt. Nachher ſetzen ſie die Bewegung mit ihrer gewöhnlichen Kraft und der ihnen eigenen Geſchwindigkeit fort.

Hierher gehörige Schriften.

Lempe angef. Lehrbegr. I. B.
Prony angef. Archit. Hydraul. 1 B.
Kunze angef. Schaupl. 1 B.
Langsdorf Handb. der Maſchinenl. II. B.

Eilftes Kapitel.

Vom oberſchlächtigen Waſſerrade.

Erklärung 29.

§. 86. Das oberſchlächtige Waſſerrad (rota directa, in der Sprache der Fränkiſchen Müller: ein Griechiſches Rad) beſteht wie das Laufrad aus zwei parallelen Kränzen, die auch wie bei die-

dieſem durch Haupt- und Hülfsärme um eine Welle befeſtiget und wie daſſelbe ringsum am inneren Rande bedihlt ſind, ſo daß dieſe Dihlſtücke den Radboden bilden. Der zwiſchen beiden Radkränzen und dem Boden auf dieſe Weiſe gebildete Kanal iſt durch Schiedwände in einzele Zellen oder Sackſchaufeln abgetheilt, die das Waſſer auffangen, welches aus einem oberhalb dem Rade angebrachten Gerinne zwiſchen beiden Kränzen auf das Rad herabſtürzt. Sind nur die Zellen auf ieden Fall geräumig genug, ſo wird die eine Radhälfte durch das herabſtürzende Waſſer ſolange mit Waſſer beſchwert, bis die Bewegung und endlich der gleichförmige oder ungleichförmige Beharrungsſtand eintrit. Wenn ef (fig. 55) die ganze Breite eines Kranzes und eD = $\frac{1}{3}$ ef iſt, ſo iſt ein mit CD auf dem Kranz aus des Rades Mittelpunkt beſchriebener Kreis der Theilriß.

Jede Schiedwand beſteht aus zweien unter einem ſchicklichen Winkel zuſammengeſetzten Bretſtücken, wie op und pq, wovon das kleinere an dem Boden anliegende op die Bodenſchaufel oder Riegelſchaufel genennt wird, das gröſſere aber, wie pq, welches bis an den äuſſeren Rand der Kränze reicht, die Stoßſchaufel heißt.

Anm. Der Bau des Rades ohne die Schaufeln iſt oben (§. 60. Anm.) ſchon beſchrieben worden. Hier bemerke ich nur noch, daß die ganze Breite ef gewöhnlich 10, und nur bei ſehr vielem Aufſchlagewaſſer bis 12 Rhl. Zolle beträgt; nicht weniger, um hinlänglich geräumige Zellen zu erhalten; aber auch nicht mehr, um die Kraft von der Umlaufsaxe möglichſt zu entfernen.

Aufg. 17.

§. 87. **Ein oberſchlächtiges Rad gehörig zu ſchaufeln.**

Aufl. 1. Wenn alle Felchen auf dem Radſtuhle ſo neben einander gelegt ſind, daß ſie einen vollſtändigen Ring bilden, ſo nehme man eD = $\frac{1}{3}$ ef, ſchlage in der Mitte des Ringes auf dem Radſtuhle einen Steft ein und führe um ſolchen herum eine Latte CD mit einem an ihrem Ende D angehaltenen Röthel, ſo daß der Theilriß DEFGD verzeichnet wird.

2. Auf dieſem Theilriſſe geſchieht die Eintheilung der Schaufeln. Zuerſt wird mit einer Schnure ein rechtwinklichtes Kreuz, Dk und pv, geſchlagen, damit ſich die Vierttheile Dp, pk, kv und vD ergeben. Man giebt dem ganzen Theilriſſe $2\frac{1}{2}$ bis 3 mal ſoviel Theile, als ſein Durchmeſſer Rhl. Fuſſe hält. Räder von kleinerem Durchmeſſer werden enger geſchaufelt als die von gröſſerem Durchmeſſer. Dieſe Anzahl wird ſo genommen, daß ſie mit 4 dividirt eine ganze Zahl giebt, welches dann die Anzahl von Theilen für ieden einzelen Quadranten iſt. Dieſe werden von p nach D und ſo auch in den übrigen Quadranten abgeſchnitten. Man giebt z. B. dem Rade überhaupt 72 Schaufeln, wenn ſein Theilriß 26 Rhl. Fuſſe im Durchmeſſer hat, und ieder Quadrant wird in 18 gleiche Theile eingetheilt.

3. Nunmehr verzeichnet man die Linien für die Lage der Schaufeln:

I. Entweder: man zieht durch den oberſten Punkt p und den mit 2 bezeichneten Theilungspunkt die gerade 2pq; ebenſo durch den erſten und dritten Theilungspunkt die gerade 31q u. ſ. w.; da-

dadurch wird die Lage der Stoßſchaufeln pq, 1q u. ſ. w. beſtimmt.

Die Lage der zugehörigen Riegel- oder Bodenſchaufeln ergiebt ſich, indem man aus den Theilungspunkten gerade Linien nach dem Mittelpunkte C zieht.

II. Oder: man nimmt vG = $\frac{1}{3}$ vom Quadranten vD und zieht durch G die nm ſenkrecht auf Cv; dann macht man wGn = 78°, ſo iſt nG die Lage der Stoß- und Gw die Lage der Bodenſchaufel. Hier wird alſo nGC = 120°.

Anm. Durch beide Methoden will man den Zweck erreichen, daß die Schaufeln oder Zellen ihr Waſſer nicht zu frühe verſchütten und doch auch nicht zu lange behalten, ſondern es vollends ausſchütten, bevor ſie die tiefſte Stelle v erreichen. Ich habe mich allemal der erſtern Methode bedient Uebrigens iſt bei der letzteren Methode der Winkel GCm = 30° wohl um etwas zu groß, ich würde ihn lieber nur = 25° nehmen, damit die Stoßſchaufel nicht zu frühe in die horizontale Lage Gn komme; auch iſt nicht abzuſehen, was die Stellung der Riegelſchaufel (no. II) für einen Vorzug vor der (no. III) haben und warum wGn gerade = 78° ſeyn ſolle.

Stoß- und Riegelſchaufel habe ich meiſtens in einem Stück aus einem ſtarken Klotz ausſchneiden laſſen.

Damit das Waſſer gleich beim erſten Einſtürzen ſchon ein merkliches ſtatiſches Moment erhalte, ſo wird das Gerinne ſo gelegt, daß das Waſſer gleich in die 3te Schaufel von oben herab einſchieſſe.

Erklärung 30.

§. 88. Das Waſſer fängt beim Umlaufe des Rades, wegen der Schwungkraft, allemal noch früher an, verſchüttet zu werden als im ruhigen Stande,

z. B. ſchon in b (fig. 55); von b in v herab geht es nach und nach vollends verlohren, ſo daß die Schaufeln von b bis v herab immer weniger und weniger Waſſer enthalten. Man kann daher einen gewiſſen Punkt d im Theilriſſe unterhalb b annehmen, bis zu welchem alle Schaufeln ihr Waſſer ohne Verminderung mit ſich führen, wogegen man die Schaufeln von d bis v als völlig leer betrachtet. Wenn nun die mit 3 bezeichnete Bodenſchaufel diejenige iſt, auf welche das Waſſer zuerſt auffällt, ſo heißt der Bogen 3d der **waſſerhaltige Bogen**.

Zuſ.

§. 89. Bei einem in Bewegung geſetzten Rade iſt der waſſerhaltige Bogen allemal kleiner, als bei einem ruhig ſtehenden, und zwar deſto kleiner, je gröſſer die Umlaufsgeſchwindigkeit des Rades iſt. Denn wegen der Schwungkraft fällt die Stelle d weiter hinauf; es braucht aber das bei x einfallende Waſſer allemal einige Zeit, um die Bodenſchaufel (3) zu erreichen, je ſchneller nun das Rad herumlauft, deſto gröſſer iſt der Weg, um welchen dieſe Bodenſchaufel in der Zeit, bis ſie vom herabfallenden Waſſer eingeholt wird, ſelbſt fortrückt; und um ſoviel tiefer liegt alſo dieſe Einſchußſchaufel in dem Augenblick, da das Waſſer auf ihrer Bodenſchaufel niederfällt. Sie könnte z. B. ſchon bis in 5 gekommen ſeyn, und um ſoviel kleiner wäre alſo aus doppeltem Grunde der waſſerhaltige Bogen.

Daher muß auch das ſtatiſche Moment des waſſerhaltigen Bogens und mit ihm der Effekt des Rades deſto kleiner ſeyn, je ſchneller es umlauft.

Aufg.

Aufg. 18.

§. 90. Es iſt die Umlaufszeit des Rades, die Menge des Aufſchlagswaſſers für iede Sekunde und die Anzahl ſämmtlicher Schaufeln gegeben: man ſoll die Waſſermenge beſtimmen, mit der iede Zelle im waſſerhaltigen Bogen während dem Umlaufe beſchwert iſt.

Aufl. Das Rad mache in T Sekunden einen Umgang, die Anzahl ſämtlicher Schaufeln ſey $= N$, die Menge des in einer Sekunde beiflieſſenden Aufſchlagewaſſers $= K$ Kubikfuſſen; ſo kommen in 1 Sek. $\frac{N}{T}$ Schaufeln beim Einfluſſe x (fig. 55) vorbei.

Dieſe $\frac{N}{T}$ Schaufeln empfangen alſo zuſammen die Waſſermenge K, folglich empfängt iede einzele Zelle eine Waſſermenge

$$= \frac{K}{(\frac{N}{T})} = \frac{T.K}{N}.$$

Zuſ.

§. 91. Die von der Einſchußſchaufel bei x (fig. 55) aufgenommene Waſſermenge heiſſe k, der Halbmeſſer des Theilriſſes CD ſey $= R$; weil man nun mit hinlänglicher Genauigkeit für die Ausübung den Schwerpunkt des Waſſers im Theilriß (bei 3) annehmen kann, ſo erhält man nach (§. 65)

das mittlere ſtat. Moment dieſer beladenen Schaufel in ihrem Wege von 3 bis D $\Big\} = \frac{h3}{\text{Bog } D3} . R . k$

ferner das mittl. ſtat. Mom. dieſer beladenen Schaufel in ihrem Wege von D bis d, d. h. bis zum tiefſten Punkt des waſſerhaltigen Bogens $\Big\} = \frac{yd}{\text{Bog } Dd} . R . k$

wo dy, h3 Perpendikel von d und 3 auf den wagrechten Halbmeſſer CD ſind. Zieht man alſo 3α, $d\beta$ auf den lothrechten Durchmeſſer pv ſenkrecht, ſo iſt

das mittl. ſtat. Mom. dieſer beladenen Schaufel in ihrem Wege durch den ganzen waſſerhalt. Bogen 3d $\Big\} = \frac{\alpha\beta}{\text{Bog } 3d} . R . k$

$$= \frac{\alpha\beta}{\text{Bog } 3d} . R . \frac{T . K}{N}$$

Wenn nun in der Zeit T in d nach (§. 90) N Schaufeln ankommen, ſo hat iede in dieſer Zeit mit dem mittleren ſtat. Moment $\frac{\alpha\beta}{\text{Bog } 3d} . R . \frac{T . K}{N}$ gewirkt, alſo alle N Schaufeln zuſammen mit dem Moment

$$\frac{\alpha\beta}{\text{Bog } 3d} . R . T . K$$

Die in dieſer Zeit ankommende Waſſermenge iſt aber = T . K; alſo iſt das ſtat. Moment der Waſſermenge T . K =

$$\frac{\alpha\beta}{\text{Bog } 3d} . R . T . K$$

Hält alſo der waſſerhaltige Bogen n Schaufeln, ſo iſt das mittlere ſtat. Mom. dieſer n Schaufeln, d. i. der Waſſermenge $\frac{n}{N}.T.K$

$$=\frac{\alpha\beta}{\text{Bog } 3d}.R.\frac{n}{N}.T.K=\frac{\alpha\beta}{\text{Bog } 3d}.R.n.k$$

Anm. Ich habe dieſe Deduktion des ſtatiſchen Momentes gewählt, weil ich ſie weiter unten brauchen werde. Sonſt giebt ſich daſſelbe geradezu aus (§. 65), wenn man dDz als einen in allen Punkten gleich ſchweren Bogen betrachtet, deſſen Gewicht dem der Waſſermaſſe n.k gleich iſt.

Aufg. 19.

§. 92. Es iſt die in einer Sekunde beiflieſende Menge Aufſchlagwaſſers K, der Halbmeſſer des Theilriſſes R, und die Entfernung r gegeben, in welcher die Laſt Q mit unveränderlichem Momente wirkt: man ſoll die Bedingungen des Gleichgewichts zwiſchen K und Q oder die Bedingungen des gleichförmigen Beharrungsſtandes beſtimmen (fig. 55).

Aufl. 1. Weil nichts darauf ankommt, ob das Gleichgewicht durch das Gewicht eines am Umfang angebrachten Thieres oder durch das Gewicht einer am Umfang aufgenommenen Waſſermaſſe erhalten wird, ſo hat man völlig wie (§. 61), nur $\frac{\alpha\beta}{\text{Bog } 3d}$ ſtatt $\sin\left(1-\frac{b}{R}\right).\alpha$ geſchrieben,

$$\left(R.\frac{\alpha\beta}{\text{Bog } 3d}-\varrho.\mu\right).P=(r+\varrho\mu).Q+\varrho.\mu.p$$

Dabei iſt dann

P das Gewicht des vom waſſerhaltigen Bogen aufgenommenen Waſſers
p das Gewicht des leeren Rades
ϱ der Halbmeſſer der Wellzapfen
μ der Reibungkoefficient
$\alpha\beta$, 3d beziehen ſich auf fig. 55.

2. Wenn n, k die Bedeutung (§. 91) haben, ſo iſt $P = n \cdot k = \frac{n}{N} \cdot T \cdot K$ (§. 90) $= \frac{\text{Bog 3d}}{\pi \cdot 2R} \cdot T \cdot K$, daher wenn man Bog. 3d $= \zeta$ ſetzt,

$$\left(\frac{R \cdot \alpha\beta}{\zeta} - \varrho \cdot \mu\right) \cdot \frac{\zeta}{2\pi R} \cdot T \cdot K = (r + \varrho\mu) \cdot Q + \varrho\mu p$$

oder

$$\left(\frac{\alpha\beta}{2\pi} - \frac{\mu\varrho\zeta}{2\pi R}\right) T \cdot K = (r + \mu\varrho) \cdot Q + \varrho\mu p$$

3. Man hat alſo

$$K = \frac{(r + \varrho\mu) \cdot Q + \varrho\mu p}{(\alpha\beta R - \mu\varrho\zeta) \cdot T} \cdot 2\pi R$$

und

$$Q = \frac{(\alpha\beta \cdot R - \mu\varrho\zeta) \cdot T \cdot K}{(2\pi R) \cdot (r + \varrho\mu)} - \frac{\varrho\mu p}{r + \varrho\mu}$$

π iſt die bekannte Zahl 3,14...

4. Hierbei iſt nun noch keine Rückſicht auf den Stoß genommen, auch die Höhe $\alpha\beta$ noch nicht beſtimmt worden. Dieſe beide Beſtimmungen machen die Auflöſung der Aufgabe ungemein ſchwierig, und wenn man bis

bis zur letzten Beſtimmung aller Stücke im beſtändigen Zuſammenhange mit der Theorie bleiben wollte, ſo würde man, ohne viel für die Genauigkeit zu gewinnen, auf einen Ausdruck kommen, der durch ſeine Weitläuftigkeit für die Ausübung ganz unbrauchbar werden würde. Man kann ſich daher mit folgender Berichtigung begnügen:

Für eine ſehr langſame Bewegung nehme man

$$Dd = \text{Bog}\, 50°, \; D3 = \text{Bog}\, 90° - \frac{3}{N} \cdot 360°$$

alſo $\zeta = \text{Bog}\,(Dd + D3) = \text{Bog}\,(140° - \frac{3}{N} \cdot 360°)$

$$= (140 - \frac{3}{N} \cdot 360) \cdot \frac{2\pi R}{360} = (0{,}77 - \frac{6}{N}) \cdot \pi R$$

Zugleich wird nun

$$\alpha\beta = (\text{Coſ}\, 40° + \text{Coſ}\, \frac{3}{N} \cdot 360°) \cdot R$$

alſo (no. 3) Q =

$$\frac{\left((\text{Coſ}\, 40° + \text{Coſ}\, \frac{3}{N} \cdot 360°) \cdot R - \mu\varrho \cdot \pi \cdot (0{,}77 - \frac{6}{N})\right) TK}{2\pi \cdot (r + \varrho\mu)}$$

$$- \frac{\varrho\mu p}{r + \varrho\mu}$$

Um nun auch noch dem Stoſſe des Waſſers Rechnung zu thun, kann man die Hälfte der Fallhöhe $\delta\alpha$ noch zu der Höhe $\alpha\beta$ addiren; ſetzt man alſo $\delta\alpha = h$, ſo giebt ſich

Q =

$$Q = \frac{\left((\mathrm{coſ}\,40^\circ + \mathrm{coſ}\,\frac{3}{N}.360^\circ).R + \tfrac{1}{2}h - \mu\varrho\pi.(0{,}77 - \frac{6}{N})\right) T\,K}{2\pi.(r + \varrho\mu)}$$

$$- \frac{\varrho\mu p}{r + \varrho\mu}.$$

und $K =$

$$\frac{((r + \varrho\mu).Q + \mu\varrho p).2\pi}{\left((\mathrm{Coſ}\,40^\circ + \mathrm{Coſ}\,\frac{3}{N}.360^\circ).R + \tfrac{1}{2}h - \mu\varrho\pi.(0{,}77 - \frac{6}{N})\right).T}$$

Aber dieſes gilt nur für ſehr langſame Bewegungen, weil für eine etwas merkliche Geſchwindigkeit des Rades der waſſerhaltige Bogen ſchon merklich kleiner wird (§. 89). Aber wegen der äuſſerſt zuſammengeſezten Ausdrücke, auf welche hier theoretiſche Beſtimmungen der Lagen von з und d (fig. 55) bei den verſchiedenen Geſchwindigkeiten des Rades führen würden, muß man ſich mit einer beiläufigen Beſtimmung in der Ausübung begnügen. Heißt die Geſchwindigkeit des Theilriſſes c, die der Höhe δv zugehörige C, ſo multiplicire ich im vorſtehenden Werthe von K den Nenner mit $1 - \frac{c}{C}$, um K für iede Geſchwindigkeit c, allgemein auszudrucken, oder den Zähler mit $\frac{C}{C-c}$.

Zuſ. 1.

§. 93. Soll alſo das Rad in der Zeit T einen Umlauf machen, ſo iſt der vorſtehende Werth von K, d. i. für die in ieder Sek. beiflieſſende Menge Aufſchlagwaſſers im gleichförmigen Beharrungsſtande hinläng-

länglich, und es wird nur anfänglich Ueberwucht erfodert, die dann von ſelbſt eintrit, weil ſich alle Schaufeln beim ruhigen Stande voller anfüllen. Für den Fall (§. 63) aber hat man wie dort K =

$$\frac{\left((r+\mu\varrho).Q+\mu\varrho p\right).2\pi.\frac{C}{C-c}}{\left((\text{coſ}\,40^\circ+\text{coſ}\frac{3}{N}.360^\circ).R+\tfrac{1}{2}h-\mu\varrho\pi.(0{,}77-\frac{6}{N})\right).T+V}$$

Zuſ. 2.

§. 94. Iſt an der Welle des Waſſerrades ein Krummzapfen angebracht, deſſen Arm die Höhe r hat, und hat man nun an der Warze dieſes Krummzapfens die Laſt Q, ſo wird wie (§. 65) K =

$$\frac{\left((0{,}637.r+\mu\varrho).Q+\mu\varrho p\right).2\pi.\frac{C}{C-c}}{\left((\text{Coſ}\,40^\circ+\text{Coſ}\frac{3}{N}.360^\circ).R+\tfrac{1}{2}h-\mu\varrho\pi.(0{,}77-\frac{6}{N})\right).T+V}$$

Zuſ. 3.

§. 95. Weil $\frac{2\pi.R}{T}=c$ und $\frac{2\pi R}{c}=T$, ſo hat man auch (§. 93) K =

$$\frac{\left((r+\mu\varrho).Q+\mu\varrho p\right).c.\frac{C}{C-c}}{\left((\text{Coſ}\,40^\circ+\text{Coſ}\frac{3}{N}.360^\circ).R+\tfrac{1}{2}h-\mu\varrho\pi.(0{,}77-\frac{6}{N})\right).R+V}$$

und

und (§. 94) ebendieſe Gleichung, nur $0,637 \cdot r$ ſtatt r geſchrieben.

Zuſ. 4.

§. 96. Der Nenner im Werthe von K (§. 95) heiſſe A, ſo hat man

$$A.(K-V).(C-c) = ((r+\mu\varrho).Q+\mu\varrho p).C.c$$

und

$$(K-V).C = \Big(A.(K-V)+((r+\mu\varrho).Q+\mu\varrho p)C\Big).c$$

alſo

$$c = \frac{(K-V).C}{A.(K-V)+((r+\mu\varrho).Q+\mu\varrho p).C}$$

woraus ſich dann auch $T = \frac{2\pi R}{c}$ ergiebt.

Iſt die Laſt Q an einem Krummzapfen angebracht, deſſen Armlänge = r iſt, ſo wird nur $0,637 \cdot r$ ſtatt r geſchrieben.

Anm. Des Rades Breite zwiſchen den beiden Kränzen ſoll nie kleiner als $\frac{1}{10}$ R ſeyn, weil es ſonſten leicht zu ſchwankend wird; auſſerdem ſoll aber auch, damit die Zellen geräumig genug werden und die bisherigen Berechnungen dabei anwendbar bleiben, die Breite nie weniger als $8 \cdot \frac{T.K}{N}$ (§. 90) betragen, d. h. wenigſtens 8 mal ſoviele Fuſſe betragen, als $\frac{T.K}{N}$ Kub. Fuſſe ausmacht. Wo man inzwiſchen eine ſehr beträchtliche Menge Aufſchlagwaſſers hat, da würde dieſe zur Verhütung des zu frühen Verſchüttens angegebene Breite zu groß ausfallen. In dieſem Falle ſucht

ſucht man den Nachtheil des zu frühen Verſchüttens dadurch zu vermindern, daß man den unteren Quadranten des Rades in einem kreisförmig gekrümmten Gerinne, einem Mantel, laufen läßt, der aber bei wenigem Aufſchlagewaſſer ohne allen Nutzen iſt.

Uebrigens werden die Räder entweder in verzimmerte oder in ausgemauerte Radſtuben eingehenkt; die Wellzapfen laufen in eiſernen oder meſſingenen Pfannen, die auch Anwellen heiſſen. Jede Anwelle wird in ein ſtarkes Klotz (das Zapfenklotz, Angewäge oder Angeweihe) eingelaſſen.

Wo es die Gelegenheit geſtattet, bricht man die Radſtube an einer Anhöhe aus und führt darin die Radſtubenmauer ſo auf, daß ſie ſich zu beiden Seiten gegen das Erdreich wölbt; in der Mitte läßt man die Mauer noch etwa um einen Fuß in die Radſtube vorſpringen. Fig 56 zeigt eine ſolche Vermauerung im wagrechten Durchſchnitte. Die ſich ſo ergebenden Quadratflächen $\alpha\beta\gamma\delta$ werden jede mit einem ſtarken Gevier (einem viereckten Roſt von Eichenholz) belegt, auf dieſes das Angewäge gehörig befeſtigt und dann die Anwelle in das Angewäge eingelaſſen. Wenn AB die hintere am Gebirg anliegende Wand iſt, ſo wird durch die vordere CD ein kleines Gewölbe zum Abfluſſe des Waſſers durchgeführt; wird dieſes etwa $3\frac{1}{2}$ bis 4 Fuſſe hoch gemacht, ſo dient es auch zugleich zu einem Eingange in die Radſtube.

Hierher gehörige Schriften.

ſ. am Ende des folg. Kap.

Zwölf-

Zwölftes Kapitel.
Von unterſchlächtigen Waſſerrädern.

Erklärung 31.

§. 97. Das gewöhnliche unterſchlächtige Waſſerrad (rota retrograda) iſt ein am Umfange mit Schaufelbrettern verſehenes Rad, das ſeine Bewegung durch den Waſſerſtoß erhält, welchen ſtröhmendes Waſſer auf die Schaufeln ausübt, indem die Waſſertheilchen in derſelben lothrechten Ebene anſtoſſen, in welcher der angeſtoſſene Punkt des Rades herumlauft. Es heißt ein Straubrad, wenn die Schaufeln auf dem äuſſeſern Umfange eines einfachen Kranzes befeſtigt werden; ein Staberrad, wenn die Schaufeln auf oder zwiſchen zweien Kränzen eingeſchoben werden. Die Schaufeln der Straub- oder Staberräder laufen der Regel nach in einem Gerinne, das entweder ein flaches Gerinne, Schußgerinne, Schnurgerinne, oder ein nach einem Kreisbogen gekrümmtes Gerinne, gekröpftes Gerinne, Kropfgerinne iſt. Reicht der Kropf bis nahe an den Einſchuß, d. h. bis nahe an die Oeffnung, von welcher das Waſſer herabſtürzt, und liegt der untere Rand dieſer Oeffnung ſchon 3 oder mehrere Fuſſe hoch über der tiefſten Stelle des Gerinnes, ſo heißt er ein hoher Kropf, und ein darin laufendes Rad auch ein Kropfrad; faßt aber der Kropf nur die zwei oder drei unterſten Schaufeln in ſich, ſo heißt er ein niedriger Kropf.

Von

Von vorſtehenden Rädern unterſcheiden ſich noch die Räder im freien Strohme, wie die Schiffmühlenräder (§. 109) und die gleichfalls hierher gehörigen Stoßräder (§. 110).

Anm. Den Bau des unterſchlächtigen Rades ohne Rückſicht auf die Schaufeln lernt man aus (§. 60 Anm.) kennen. Der Kranz eines Straubrades kann 8 Rhl. Zolle hoch oder breit und 5 bis 6 Zolle dick ſeyn. Werden bei einem Staberrade, das allemal zwei parallele Kränze führt, die Schaufeln auf dem äuſſeren Umfang dieſer Kränze befeſtiget, ſo können ſolche die eben erwähnten Abmeſſungen behalten; werden aber die Schaufeln zwiſchen den beiden Kränzen eingeſetzt, ſo können dieſe Kränze ganz ſo wie bei den oberſchlächtigen Rädern eingerichtet ſeyn, nur noch breiter, von 12 bis 15 Zollen, nach der kleinern oder gröſſern Menge des Aufſchlagwaſſers.

Die Schaufeln der in Schußgerinnen laufenden Räder ſind ebene Brettſtücke, deren Seiten ein Rektangel bilden, daher ſie auch Schaufelbretter genennt werden. Die Kropfräder führen zwar häufig auch bloße Schaufelbretter, ſo daß auch Straubräder zu Kropfrädern gemacht werden. Weil inzwiſchen bei den Kropfrädern die auf den Schaufeln liegende Waſſermaſſe vermöge ihres Gewichts mitwirken ſoll, und das Kropfrad, als unterſchlächtiges Rad, keinen Boden führt*), ſo ſind bloſſe Schaufelbretter dem Kropfrade nicht angemeſſen; das Straubrad paßt alſo nicht zu einem Kropfrade, und das Staberrad nur dann, wann die zwiſchen ſeinen Kränzen eingeſetzten Schaufeln gekröpft, d. i. auf eine ähnliche Weiſe wie bei den oberſchlächtigen gebrochen oder aus zwei Brettſtücken zuſammengeſetzt ſind, damit ſich zwiſchen der gekröpften Schaufel und dem Boden des Kropfgerinnes eine Zelle oder eine Sackſchaufel bilde (ſ. unten §. 99).

Aufg.

*) Der Boden würde es zu einem mittelſchlächtigen Rade machen, von dem ich hier nicht beſonders handeln werde.

Aufg. 20.

§. 98. **Ein unterſchlächtiges Rad in einem Schußgerinne gehörig zu ſchaufeln.**

Aufl. I. Wenn es ein Straubrad iſt.

1. Zuerſt muß die Anzahl der Schaufeln beſtimmt werden. Es ſey mn die Stelle, wo das Schußwaſſer anzuſchwellen anfängt, MN die nächſte Schaufel, welche dieſe Aufſtauung im gegenwärtigen Augenblicke verurſacht, ſo iſt die Preſſung der Waſſertheilchen im Querſchnitte op kleiner als in dem von mn entfernteren Querſchnitte MN (§. 49); indem ſich alſo die Schaufel vq bei op untertaucht, wird der Stoß da aufgenommen, wo er kleiner als im Augenblick vorher iſt, wo er in MN aufgenommen wurde. Weil nun der Unterſchied dieſer abwechſelnden Preſſungen deſto kleiner ſeyn muß, ie kleiner die Entfernung pN in Vergleichung mit der nN iſt, ſo würde in dieſer Rückſicht der Effekt des Rades deſto gröſſer ſeyn, ie näher die Schaufeln zuſammengerückt werden.

Inzwiſchen iſt dieſer Umſtand ſehr unbedeutend.

Ein anderer Umſtand macht weite Schaufelung weit ſchädlicher. Ständen z. B. die Schaufeln ſoweit von einander ab, als die qv und die xy, ſo würde in der ietzigen Stellung des Rades, d. h. für dieſen Augenblick alles Schußwaſſer ohne einige Wirkung auf das Rad fortſtröhmen; nur in dem einzigen Augenblick, da die qv in die tiefſte Stelle käme, würde ſie den ganzen Stoß, deſſen ſie fähig wäre, aufnehmen, und in allen übrigen Augenblicken würde in dem Raume zwiſchen ihrem unteren Rande und dem Gerinnboden eine beträchtliche Waſſermenge ganz unbenutzt abflieſſen.

Ich

Ich will dieſen Raum den ſchädlichen Raum unter den Schaufeln nennen.

Je näher die Schaufeln zuſammengerückt werden, deſto mehr wird dieſer ſchädliche Raum unter den Schaufeln vermindert, alſo deſto gröſſer, in Rückſicht auf dieſen Umſtand, der Effekt des Rades.

Inzwiſchen hat ſehr enge Schaufelung wiederum ihre Nachtheile. Einmal hat Verengung des Raums zwiſchen den Schaufeln einen nachtheiligen Einfluß auf Richtung und Geſchwindigkeit des anſchlagenden Waſſers; fürs andere wird, weil die Schaufeln keine Raumflächen, ſondern Brettſtücke ſind, die Summe der vom unteren Rande der Schaufeln aufgefangenen Waſſerfäden deſto beträchtlicher, je enger die Schaufeln zuſammengerückt ſind, wie man aus (fig 58) deutlicher ſehen kann; und hierdurch wird der Effekt wiederum vermindert.

Es iſt daher eines Theils nicht möglich, die vortheilhafteſte Anzahl von Schaufeln theoretiſch genau beſtimmen zu wollen, und andern Theils dieſer Mangel einer genauen theoretiſchen Beſtimmung für die Vollkommenheit der Maſchinenlehre ſehr unbedeutend.

Die gewöhnliche Vorſchrift der Mühlenärzte iſt: dem Rade doppelt ſoviel Schaufeln zu geben, als ſein Durchmeſſer Fuſſe hat. Man kann ſich immerhin an dieſe Regel halten, wenn man den Durchmeſſer des Kreiſes nimmt, in welchem ſich der äuſſere Rand der Schaufeln herumbewegt, und überdas Nürnberger Fuſſe verſtanden werden. Zur bequemeren Abtheilung ändert man dann dieſe Zahl, wenn ſie nicht durch 4 theilbar iſt, ſo ab, daß ſie ſich genau durch 4 theilen läßt. Z. B. einem Rade, das mit Inbegriff der Schaufelung 17 Fuſſe im Durchmeſſer hätte, könnte

 man,

man, weil 2 . 17 = 34 durch 4 nicht theilbar iſt, 36, alſo für iedes Vierttheil 9 Schaufeln geben.

2. Die Schaufeln kann man in $\frac{1}{2}$ bis $\frac{3}{4}$ Zoll tiefe Einſchnitte auf die Felchen einlaſſen, und dann an Pföſtchen, die durch den Kranz durchgetrieben werden, anſchrauben, wie man ſolches (fig. 57) bei mehreren Schaufeln und deutlicher (fig. 59) ſehen kann. Oder es können ſtatt der Pföſtchen auch Eiſen durch die Felchen durchgehen, die über den Felchen zwei Flügel haben, an welche die Schaufelbretter angeſchroben werden, wie fig. 60. Tab. VII, wo abcd die an an den Flügeln angeſchrobene Schaufel und mnop den Durchſchnitt des Kranzes vorſtellt. Zu noch ſtärkerer Befeſtigung kann das Eiſen wie fig. 61. Tab. VII ausſehen, ſo daß oben noch ein Quereiſen xy angebracht wird, durch welches man das umgebogene obere Ende eines auf dem Kranze angeſchrobenen eiſernen Bugs wie (fig. 62) durchgehen läßt, das dann an der Stoßfläche der Schaufel bei k mit einer Mutter feſtgeſchroben wird.

II. Wenn es ein Staberrad iſt.

1. Die Anzahl der Schaufeln kann wie beim Straubrade beſtimmt werden.

2. Die Schaufelbretter werden entweder zwiſchen den beiden Kränzen in Nuthen eingelaſſen, oder auf iedem Kranze ebenſo wie beim Straubrade befeſtiget.

Die letztere Art verdient der erſteren vorgezogen zu werden, weil dabei im ſchädlichen Raum unter dem Rade ein geringerer aliquoter Theil der durchflieſſenden Waſſermenge verlohren geht als bei der erſteren, wo das Waſſer auch unter den Kränzen unbenutzt hinfließt

Aufg.

Aufg. 21.

§. 99. **Ein unterſchlächtiges Rad in einem Kropfgerinne gehörig zu ſchaufeln.**

Aufl. I. Für einen niedrigen Kropf.

Weil in dieſem Falle das Waſſer nur die unteren Schaufeln trifft, welche mit dem Horizonte ſchon einen Winkel von mehr als 60° und meiſtens ſchon über 70° machen, ſo kann in einem ſolchen Gerinne ein gewöhnliches Straub- oder Staberrad nach (§. 98) angelegt werden.

II. Für einen hohen Kropf (Kropfrad).

1. Die Anzahl der Schaufeln kann wie bei einem oberſchlächtigen Rade beſtimmt werden.

2. Weil das Kropfrad wie das oberſchlächtige Sackſchaufeln bekommt, ſo iſt iede ſolche Schaufel aus einer Stoß- und einer Riegelſchaufel zuſammengeſetzt, daher auch ſolche allemal zwiſchen den beiden Kränzen eingeſetzt werden müſſen. Die Lage beider Schaufeln beſtimmt man nun auf zweierlei Weiſe.

Allemal theilt man den lothrechten Halbmeſſer vom äuſſeren Umfang des Rades in ſoviele gleiche Theile, vom Mittelpunkt abwärts numerirt, als der Quadrant Schaufeln bekommt, welche von unten nach oben numerirt werden; und nun zieht man von der Ziffer am Umfange, welche zunächſt unter der Stelle liegt, wo der Kropf anfängt, mit dem Umfange des Rades koncentriſch herabzulaufen, eine gerade Linie zu demienigen Theilungspunkt des Halbmeſſers, welcher mit derſelben Ziffer bezeichnet iſt, wie hier (fig. 63) die 55.

Dieſe Linie bezeichnet allemal die Lage der Stoß-ſchaufel.

3. Entweder wird nun der Theilriß in der Mitte zwiſchen dem inneren und äuſſeren Umfang des Kranzes gezeichnet, wie fig. 63, oder ſo wie beim oberſchlächtigen Rade.

4. Im erſten Falle (no. 3) beſtimmt das auf der 55 durch den Theilriß abgeſchnittene Stück 5e die Länge der Stoßſchaufel, und Ce5 iſt der für alle Stoßſchaufeln beſtimmte Winkel mit dem Halbmeſſer des Theilriſſes. In ebendieſem Falle nimmt man zur Beſtimmung der Gröſſe und Lage der Riegelſchaufel die em = 5e.

5. Im andern Falle (no. 3) wird 5e auf der 55 gleichfalls durch den Theilriß abgeſchnitten, dann aber in e ein Perpendikel em auf 5e errichtet, welches dann Lage und Gröſſe der Riegelſchaufel für dieſen Fall beſtimmt.

Anm. Man ſieht, daß es ſeinen Nutzen hat, wenn man auch die Felchen des Kropfrades nach (§. 97. Anm.) breiter als beim oberſchlächtigen Rade macht. Die Riegelſchaufeln (fig. 63. em) erhalten dadurch mehr Fläche zur völligen Aufnahme des Stoſſes beim erſten Einſturz des Waſſers, und bei zunehmender Waſſermenge (die bei unterſchlächtigen Rädern viel veränderlicher iſt als bei oberſchlächtigen) bleiben dann die Schaufeln noch geräumig genug, ohne das Waſſer ſo leicht über die Riegelſchaufeln überſtröhmen zu laſſen. Hingegen legt ſich bei geringerer Waſſermenge die Waſſermaſſe ohnehin auf die äuſſere, die Stoßſchaufel, an, wo ſie mit gröſſerem Momente wirkt.

Die Weglaſſung des Bodens hat gleichfalls ihre Vortheile: 1) das Waſſer fällt ſchneller bei N aus der unterſten Schaufel ab, 2) bei übergroſſer Menge kann es zwi-

ſchen

ſchen den Schaufeln ſelbſt im Rad hinabſtürzen und dabei doch zur Verſtärkung der Gewalt noch mitwirken; 3) wo Leichtigkeit des Rades von Nutzen iſt, hat man auch den Vortheil gröſſerer Leichtigkeit.

Aufg. 22.

§. 100. Aus den Beſtimmungsſtücken, die auf das Verhältniß zwiſchen Kraft und Laſt bei einem unterſchlächtigen Rade in einem flachen Gerinne (Schußgerinne) Einfluß haben, ienes Verhältniß ſo zu beſtimmen, daß man, für die Ausübung, der Wahrheit nahe genug kommt, unveränderliches Moment der Laſt vorausgeſetzt (fig. 64).

Aufl. 1. m ſey ein Punkt in der Oberfläche des vor dem Gerinne geſtemmten Waſſers, nahe an der Stelle, wo es herabzuſtürzen anfängt, ſo daß es in dem Gerinne AB die Schaufeln erreicht; ab ſey ein mittlerer auf αβ ſenkrechter Waſſerfaden, deſſen Lage man ohne merklichen Fehler als bekannt annehmen darf; mn ſey die ganze mittlere Fallhöhe. Es ſey ferner:

die Menge des in 1 Sek. durch das Gerinne ſtröhmenden Waſſers	= A
die Menge des Waſſers, welches durch den ſchädlichen Raum im Gerinne unter und neben dem Rade durchfließt	= a
die Geſchwindigkeit, welche das Waſſer in dem Querſchnitte αβ bei b haben würde, wenn es frei durch das Gerinne durchſtröhmte	= C

 die

die Geſchwindigkeit, welche die Schaufelfläche $\alpha\beta$ in der Stelle b hat $\} = c$

der Halbmeſſer $Cb = R$

und p′ ſey die Waſſermenge, deren Gewicht den Widerſtand ausdruckt, der in der Stelle b der Bewegung des Rades bei ſeiner Geſchwindigkeit c entgegen geſetzt werden dürfte, ſo kann man nach (§. 52)

$$R.p = R.\left(\frac{C-c}{2g}.(A-a)\right)$$

ſetzen,

nicht nur wenn das Waſſer unmittelbar ſenkrecht gegen die lothrechte Schaufel $\alpha\beta$ ſtoſſen kann,

ſondern auch, wenn das ſtröhmende Waſſer ganz oder zum Theil von einer andern Schaufel, wie $\gamma\delta$, aufgefangen wird.

Es ſey z. B. des Waſſerfadens ab ſtatiſches Moment in $b = R.\mathfrak{A}$, und nun werde dieſer Faden in ε aufgefangen, ſo iſt das ſtatiſche Moment des Stoſſes dieſes Fadens in $\varepsilon = C\varepsilon \times \mathfrak{A}.\sin b\varepsilon C = C\varepsilon.\sin b\varepsilon C.\mathfrak{A} = R.\mathfrak{A}$.

Es iſt alſo für das ſtat. Mom. eines ieden Waſſerfadens gleichgültig, ob er von der lothrechten $\alpha\beta$ oder von einer ſchief liegenden $\gamma\delta$ aufgenommen wird, inſoferne die Schaufeln als ruhig liegend angenommen werden.

Nun ſey überdas v die Geſchwindigkeit, mit welcher der Punkt ε ſich im Kreiſe fortbewegt, und εx auf $\gamma\varepsilon$ ſenkrecht, ſo iſt v die Geſchwindigkeit nach εx.

Weil

Weil nun der Stelle b Umlaufsgeſchwindigkeit = c iſt, ſo hat man

$$v = \frac{C\varepsilon}{Cb} \cdot c$$

Es iſt aber des Punktes ε Geſchwindigkeit noch $\varepsilon b = \frac{\varepsilon b}{\varepsilon x} \cdot v = \frac{Cb}{C\varepsilon} \cdot v = \frac{Cb}{C\varepsilon} \cdot \frac{C\varepsilon}{Cb} \cdot c$ = c, alſo weicht die Stelle ε dem Waſſerfaden aε mit eben der Geſchwindigkeit aus, mit welcher ihm auch der Punkt b ausweicht; folglich bleibt auch für das in Bewegung geſetzte Rad das ſtat. Mom. eines ieden Waſſerfadens ungeändert, er mag an αβ oder an γδ anſchlagen.

Doch dieſes nur: woferne es für den ſenkrechten Stoß gleichgültig iſt, ob die Fläche, die den Stoß ſenkrecht aufnimmt, im Gerinne beſtändig bei b bleibt, oder ob man ſie während dem Abfluſſe des Waſſers plötzlich ſenkrecht in ε, d. i. näher an mn anbrächte.

2. Wenn gleich die letzte Vorausſetzung (no. 1. am Ende) nicht genau ſtatt hat (§. 48), ſo weicht ſie doch bei der nahen Zuſammenſtellung der Schaufeln nur wenig von der Wahrheit ab, zumal bei Schaufeln, die ſich ſelbſt in Bewegung befinden und daher dem an ihnen anliegenden Waſſer noch eine beträchtliche Geſchwindigkeit laſſen.

Man kann daher dieſen Umſtand bei Seite ſetzen, und für die Ausübung das ſtatiſche Moment der Kraft allgemein

$$= R \cdot \frac{C - c}{2g} \cdot (A - a) \cdot \mathfrak{G}$$

ſetzen, wenn 𝔊 das Gewicht von einem Kub. Fuß Waſſer bedeutet und alles in Fußen ausgedruckt wird.

3 In der Entfernung r von der Axe C ſey eine Laſt Q mit unveränderlichem Moment angebracht, ſo iſt ihr Moment

$$= r . Q$$

4. Des Rades Gewicht ſey = p, der Halbmeſſer der Wellzapfen = ϱ, ſo hängt die Reibung an den Zapfen nicht bloß von p, ſondern auch von Q und von p′ (oben S. 56) ab, und es kommt bei dem Einfluſſe von Q auf die Reibung wiederum auf die Richtung an, nach welcher Q wirkt.

Weil aber der von p herrührende Theil der Reibung allemal einen ganz unbedeutenden Theil der geſammten Laſt ausmacht, der von Q herrührende gleichfalls von geringer Bedeutung in Vergleichung mit der geſammten Laſt iſt, und der Reibungskoefficient μ ohnehin keine genaue Beſtimmung geſtattet, ſo kann man hier allemal

$$\left.\begin{array}{l}\text{das ſtat. Mom. der}\\ \text{Reibung an den}\\ \text{Wellzapfen}\end{array}\right\} = \varrho . \mu . (p + Q)$$

ſetzen.

5. Man hat alſo für den gleichförmigen Beharrungsſtand

$$R . \frac{C - c}{2g} . (A - a) . \mathfrak{G} = r . Q + \varrho . \mu . (p + Q)$$

und

$$Q = \frac{R . \frac{C - c}{2g} . (A - a) . \mathfrak{G} - \varrho . \mu . p}{r + \varrho . \mu}$$

6. Aus

6. Aus der Fallhöhe H fände man $C = 2\sqrt{gH}$; man darf aber für H hier nicht die ganze Waſſerhöhe mn (fig. 64) gebrauchen, ſondern muß den Werth von

$$k - a.\left(1 - \frac{Cof(1\frac{1}{4}\alpha + 78^{\circ})}{Cof 84^{\circ}}\right) \text{ (§. 52)}$$

ſtatt H ſetzen.

Den Werth von a muß man aus dem mittleren Flächeninhalt des ſchädlichen Raums unter und neben dem Rade im Gerinne beſtimmen.

Da ſich die Geſchwindigkeit des durch dieſen Raum durchſtröhmenden Waſſers ſo wenig als die Zuſammenziehung, welche dabei eintrit, mit einiger Genauigkeit beſtimmen läßt, ſo muß man ſich hier wiederum mit einer nur beiläufigen Beſtimmung begnügen.

Setzt man den mittleren Flächeninhalt des ſchädlichen Raums = F, ſo kann man

$$a = \tfrac{1}{2}C.F$$

nehmen.

So hat man alſo für den gleichförmigen Beharrungsſtand

$$Q = \frac{R.\frac{C-c}{2g}.(A - \frac{1}{2}C.F).\mathfrak{G} - \varrho\mu.p}{r + \varrho\mu}$$

woraus ſich auch

$$A = \frac{(r + \mu\varrho).Q + \mu\varrho p}{R.\frac{C-c}{2g}.\mathfrak{G}} + \tfrac{1}{2}C.F$$

ergiebt.

Zuſ.

Zuſ. 1.

§. 101. Muß von Zeit zu Zeit eine Maſſe von neuem in Bewegung geſetzt werden, ohne daß das ſtat. Moment geändert wird, ſo wird für dieſelbe Kraft eine kleinere Laſt erfodert, damit die Kraft, die = $\frac{C-c}{2g}.(A-\frac{1}{2}C.F).\mathfrak{G}$ iſt, Ueberwucht behalte. Wenn daher dieſe erfoderliche Ueberwucht der Kraft V heißt, ſo muß

$$\frac{C-c}{2g}.(A-\tfrac{1}{2}C.F).\mathfrak{G}=\frac{(r+\varrho\mu).Q+\varrho\mu p}{R}+V$$

ſeyn. Alſo

$$Q=\frac{R.\left(\frac{C-c}{2g}.(A-\frac{1}{2}C.F).\mathfrak{G}-V\right)-\varrho.\mu.p}{r+\varrho\mu}$$

Zuſ. 2.

§. 102. Wäre die Laſt Q an einem Krummzapfen angebracht, deſſen Arm oder Bug die Höhe r hätte, ſo wäre

$$Q=\frac{R.\left(\frac{C-c}{2g}.(A-\frac{1}{2}C.F).\mathfrak{G}-V\right)-\varrho.\mu.p}{0{,}637.r+\varrho\mu}$$

Aufg. 23.

§. 103. Die Geſchwindigkeit der Schaufeln c zu beſtimmen, für welche der Nutzeffekt des Rades im flachen Gerinne am größten wird.

Aufl.

Aufl. 1. Es muß, wenn der Nutzeffekt am größten ſeyn ſoll, $\frac{r}{R} c \cdot Q$, alſo auch cQ ein maximum ſeyn. Es iſt aber (§. 101)

$$cQ = \frac{R.c.\left(\frac{C-c}{2g}.(A-\tfrac{1}{2}C.F).\mathfrak{G}-V\right)-\varrho.\mu.pc}{r+\varrho\mu}$$

wo es alſo darauf ankommt, daß der Zähler ein maximum werde. Dieſes geſchieht, wann der Zähler 2g ein maximum wird.

2. Die Differentialrechnung giebt

$$\frac{(A-\tfrac{1}{2}CF).\mathfrak{G}.R}{2g}.(C-2c).dc-RVdc$$
$$-\varrho\mu pdc = 0$$

alſo

$$\frac{(A-\tfrac{1}{2}CF).\mathfrak{G}.R}{2g}C-(RV+\varrho\mu p) =$$
$$\frac{(A-\tfrac{1}{2}CF).\mathfrak{G}R}{g}.c$$

und

$$c = \tfrac{1}{2}C - \frac{(RV+\varrho\mu p)}{(A-\tfrac{1}{2}CF).R.\mathfrak{G}}.g$$

Dieſe Formel geht auf den ungleichförmigen Beharrungsſtand.

3. Setzt man V = 0, ſo erhält man für den gleichförmigen Beharrungsſtand

$$c = \tfrac{1}{2}C - \frac{\varrho\mu p}{(A-\tfrac{1}{2}C.F).R.\mathfrak{G}}.g$$

4. Weil

4. Weil es für die Erfindung des Maximums gleichgültig iſt, ob r oder 0,637 . r im Nenner (no. 1) ſteht, ſo bleibt die Formel (no. 2) auch für den Gebrauch des Krummzapfens noch richtig. Sie iſt alſo ganz allgemein.

Zuſ.

§. 104. Wenn F, V und $\mu = 0$ geſetzt werden, ſo erhält man $\frac{r}{R} . c . Q$ oder Totaleffekt =

$$c . \frac{C-c}{2g} . A . \mathfrak{G} \quad (\S. 103)$$

alſo, wenn man für dieſe Vorausſetzung den Werth von c ſubſtituirt, welcher den größten Effekt giebt, d. i. $\frac{1}{2}$C ſtatt c ſchreibt,

der größte Totaleffekt =

$$\tfrac{1}{2}C . \frac{C - \frac{1}{2}C}{2g} . A . \mathfrak{G}$$

$$= \tfrac{1}{2} . \frac{C^2}{4g} . A . \mathfrak{G}$$

oder wenn die zu C gehörige Höhe h heißt (welche kleiner als die ganze wirkliche Fallhöhe mn fig. 64. iſt)

$$= \tfrac{1}{2}h . A . \mathfrak{G}.$$

Aufg. 24.

§. 105. Es ſollen im flachen Gerinne zwei Räder hinter einander angelegt werden, um auch noch die Wirkung des vom erſten Rade mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit abflieſſenden Waſſers beim zweiten zu benutzen: man ſucht die vortheilhafteſte Geſchwin-

Geſchwindigkeit der Schaufeln bei iedem Rade und den daraus entſtehenden größten Totaleffekt.

Aufl. 1. Setzt man die Geſchwindigkeit c der Schaufeln des erſten Rades $= n . C$, ſo daß n einen Bruch und C die Geſchwindigkeit des Waſſers wie (§. 103) bedeutet, ſo kann man den Totaleffekt des erſten Rades durch

$$\frac{A}{2g} . (C - n . C) . nC . \mathfrak{G}$$

oder

$$\frac{A}{2g} . n . (1 - n) . C^2 . \mathfrak{G}$$

ausdrucken.

2. Die Geſchwindigkeit der Schaufeln des zweiten Rades ſey $= m . c$, ſo iſt der Totaleffekt des zweiten Rades

$$\frac{A}{2g} . (c - mc) . mc . \mathfrak{G}$$

$$= \frac{A}{2g} . m . (1 - m) . n^2 . C^2 . \mathfrak{G}$$

3. Die Summe der Effekte (no. 1 und 2) iſt

$$\frac{A}{2g} . C^2 . \left(n . (1 - n) + m . (1 - m) . n^2\right) . \mathfrak{G}$$

4. Nun mag n welchen Werth man will haben, ſo wird allemal $m . (1 - m)$ ein maximum für $m = \frac{1}{2}$; es mag alſo der Effekt des erſten Rades oder der Werth von n wie man will beſchaffen ſeyn, ſo iſt der größtmögliche Effekt des zweiten Rades allemal =

$$\frac{A}{2g} . \tfrac{1}{2} . (1 - \tfrac{1}{2}) . n^2 . C^2 . \mathfrak{G} = \frac{A . C^2}{2g} . \tfrac{1}{4} n^2 . \mathfrak{G}$$

5. Da-

5. Damit alſo die Summe (no. 3) die größtmögliche werde, ſo muß

$$n.(1-n)+\tfrac{1}{4}n^2 \quad \text{oder}$$
$$n-\tfrac{3}{4}n^2$$

ein maximum ſeyn.

6. Die Differentialrechnung giebt nun für das maximum $n=\frac{2}{3}$.

7. Man hat alſo für den größten Totaleffekt beider Räder zuſammengenommen

$$\left.\begin{array}{c}\text{die Geſchwindigkeit des}\\ \text{erſten Rades}\end{array}\right\}=\tfrac{2}{3}C$$

$$\text{die des zweiten}=m.\tfrac{2}{3}C=\tfrac{1}{3}C.$$

8. Die Summe der größtmöglichen Effekte iſt nun vermöge no. 3.

$$\frac{A}{2g}.C^2.\left(\frac{2}{3}.(1-\tfrac{2}{3})+\tfrac{1}{2}.(1-\tfrac{1}{2}).\frac{4}{9}\right).\mathfrak{G}$$

$$=\frac{A}{2g}.C^2.\tfrac{1}{3}\mathfrak{G}$$

$$\text{oder auch}=\tfrac{2}{3}.A.\frac{C^2}{4g}.\mathfrak{G}=\tfrac{2}{3}Ah.\mathfrak{G}$$

wo h die zu C gehörige Höhe bedeutet.

9. Der größtmögliche Effekt (Totaleffekt) bei der Anlage eines einzigen Rades wäre (§. 104)

$$\tfrac{1}{2}Ah.\mathfrak{G}$$

alſo verhält ſich dieſer zu ienem

wie $\frac{1}{2}$ zu $\frac{2}{3}$, d. i. wie 3 zu 4.

Zuſ.

Zuſ.

§. 106. Sollen beide hinter einander liegende Räder gleichen Effekt leiſten, und werden die vorigen Vorausſetzungen beibehalten, ſo muß man im vor. §.

$$n.(1-n) = m.(1-m).n^2$$

ſetzen.

Weil nun jeder Werth von n für den größten Totaleffekt $m = \frac{1}{2}$ erfodert, ſo hat man für den jetzigen Fall

$$n.(1-n) = \tfrac{1}{2}.(1-\tfrac{1}{2}).n^2$$

oder $1-n = \frac{1}{4}n$, alſo $n = \frac{4}{5}$

Sollen demnach beide Räder zuſammengenommen den größtmöglichen Effekt leiſten, welcher mit der Vorausſetzung, daß beider Effekte gleich groß ſeyen, beſtehen kann, ſo iſt

die Geſchwindigkeit des erſten Rades $= \frac{4}{5}C$

die des zweiten $= m.\frac{4}{5} = \frac{2}{5}C$

und der Totaleffekt eines jeden iſt in dieſem Falle

$$\frac{A}{2g}.n.(1-n).C^2.\mathfrak{G} = \frac{A}{2g}.\tfrac{4}{25}.C^2.\mathfrak{G}$$

oder $= \frac{8}{25}.\frac{C^2}{4g}.A.\mathfrak{G} = \frac{8}{25}.h.A.\mathfrak{G}$

Daher ihre Summe $= \frac{16}{25}.h.A.\mathfrak{G}$

alſo gleichfalls ſehr nahe $= \frac{2}{3}h.A.\mathfrak{G}$, wie im vorigen §.

Anm. 1. Die vorſtehenden Reſultate veranlaßten Hrn. Gerſtner zu dem Vorſchlage, bei Mühlwerken, die von unterſchlächtigen Rädern betrieben würden, allemal mehrere Räder in einem Gerinne hinter einander anzubringen,

um dadurch ihren Effekt zu vergröſſern. Weil es aber zur Erhaltung des gröſten Vortheils nicht auf den Total- ſondern auf den Nutzeffekt ankommt, so iſt hier eigentlich die Frage, ob letzterer bei zwei hinter einander liegenden Rädern gröſſer ſey, als bei einem? ich habe (II. Band meines Handb. der Maſchinenl. S. 152 u. f.) meine Gründe dagegen angeführt. Inzwiſchen iſt meine Behauptung nur dieſe:

> Wo man Waſſer zur beſtändigen Betreibung eines Ganges hat, ſey es nie rathſam, durch Vorrichtung zweier Räder hinter einander die Kraft zu vertheilen.

Hat man aber ſoviel Waſſer, daß ohnehin zwei Räder zur Betreibung der Mühle beſtimmt werden, wo alſo die die Frage eigentlich dieſe iſt:

> ob es beſſer ſey, das Waſſer auf zwei Räder in zweien neben einander liegenden Gerinnen zu vertheilen, oder die geſammte Waſſermenge auf zwei in einem Gerinne hinter einander liegende Räder zu benutzen?

ſo verdient allerdings die letztere Einrichtung den Vorzug.

Anm. 2. Ich habe hier die Theorie der unterſchlächtigen Räder im Schußgerinne ſo einfach als möglich vorgelegt. Ueber einige Umſtände laſſen ſich noch beſondere Unterſuchungen anſtellen, wie ich in dem Lehrb. der Maſchinenl. II. B. gewieſen habe. Die Formeln werden aber dadurch, ohne Gewinn für die Ausübung, ſehr viel weitläuftiger und äuſſerſt beſchwerlich für die Anwendung. Ich ziehe daher für Unterſuchungen dieſer Art, die am Ende doch nie ſehr genaue Reſultate geben können, den gegenwärtigen Vortrag um ſo mehr vor, als ſelbſt völlige Genauigkeit ſolcher Berechnungen, wenn ſie auch möglich wäre, für wirkliche Anlagen keine beſondere Vortheile verſprechen würde.

Um übrigens auf die vorſtehende Theorie bauen zu können, muß man 1) die Schaufeln groß genug machen, wenigſtens doppelt ſo hoch, als die Höhe des natürlichen Waſſer-Querſchnittes im Gerinne ſeyn würde; wenn alſo

die

die Länge der Schaufeln $= \lambda$ und ihre Höhe oder Breite $= \beta$ geſetzt wird, ſo kann man wenigſtens $\beta = \frac{2A}{\lambda . C}$ nehmen. 2) Der Gerinnboden muß gleich unter der tiefſten lothrechten Schaufel einen plötzlichen Abfall bekommen, der etwa $= \frac{1}{4}\beta$, oder beſtimmter $= \frac{A}{2\lambda . C}$ ſeyn kann. Auch muß von dieſem Abfalle an der Boden, über den das Waſſer abfließt, auf die Länge von 10 Fuſſen allemal wenigſtens einen Fuß Abhang haben und ſoweit fortgeführt werden, bis er unterhalb in die horizontale Ebene fällt, bis zu welcher das Unterwaſſer, dem ienes zufließt, bei mittlerem Waſſerſtand gewöhnlich reicht. Auch muß 3) der ſchädliche Raum im Gerinne ſo klein als möglich gemacht oder überhaupt Anſtalt getroffen werden, um a möglichſt klein zu machen.

Aufg. 25.

§. 106. Aus den Beſtimmungsſtücken, die auf das Verhältniß zwiſchen Kraft und Laſt bei einem Kropfrade Einfluß haben, ienes Verhältniß ſo zu beſtimmen, daß man, für die Ausübung, der Wahrheit nahe genug kommt; unveränderliches Moment der Laſt vorausgeſetzt (fig. 63).

Aufl. 1. Wenn 5e da liegt, wo der Kropf anfängt, koncentriſch mit dem Umfange des Rades herabzulaufen, f aber der nächſtfolgende Theilungspunkt im Theilriſſe iſt und nun ab die lothrechte Höhe des vor dem Kropfe geſtemmten Waſſers über der durch f gelegten horizontalen Ebene bezeichnet, ingleichen by die lothrechte Höhe der Stelle f über dem unterſten Theilungspunkt x, ſo berechne man die Wirkung des Waſſers bis an f wie für ein unterſchlächtiges Rad

 in

in einem Schußgerinne und von f bis x wie für ein oberſchlächtiges nach (§. 92. no. 3).

2. Der Theil von Q, welcher durch den Stoß gewältiget wird, heiſſe Q′, ſo hat man (§. 100. no. 5) für den gleichförmigen Beharrungsſtand

$$Q' = \frac{R.\frac{C-c}{2g}.(A-a).\mathfrak{G}-\varrho\mu p}{r+\varrho\mu}$$

3. Wenn nun Q″ der Theil von Q iſt, welcher durch das Gewicht des Waſſers von f bis x gewältiget wird, ſo hat man (§. 92. no. 3), by (fig. 63) = δ und A — a ſtatt K geſetzt,

$$Q'' = \frac{\delta.R.T.A.\mathfrak{G}}{2\pi R.r} = \frac{\delta T(A-a)\mathfrak{G}}{2\pi r}$$

indem man bei dieſer Berechnung $\mu = 0$ ſetzen muß, weil dem von der Reibung herrührenden Widerſtande ſchon vorhin (no. 2) Rechnung gethan worden.

4. Demnach $Q = Q' + Q''$

$$= \frac{R.\frac{C-c}{2g}.(A-a).\mathfrak{G}-\varrho\mu p}{r+\varrho\mu} + \frac{\delta T(A-a)\mathfrak{G}}{2\pi r}$$

Schreibt man nun nach (§. 95) $\frac{2\pi R}{c}$ ſtatt T, ſo verwandelt ſich das letzte Glied des vorſtehenden Ausdrucks in $\frac{\delta R(A-a)\mathfrak{G}}{cr}$, alſo Q =

$$\frac{R.\frac{C-c}{2g}.(A-a).\mathfrak{G}-\varrho\mu p}{r+\varrho\mu} + \frac{\delta.R(A-a)\mathfrak{G}}{c.r}$$

5. Was

5. Was (§. 100. no. 6) die Höhe mn (fig. 64) iſt, iſt hier die ab (fig. 63), und es wird hier wie dort C nach (§. 52) beſtimmt.

Für a kann man wie (§. 100) $\frac{1}{2}$ C.F ſetzen, wenn F den Flächeninhalt des ſchädlichen Raums im Kropfgerinne bedeutet. So giebt ſich Q =

$$\frac{R.\frac{C-c}{2g}.(A-\frac{1}{2}CF).\mathfrak{G}-\varrho\mu p}{r+\varrho\mu}+\frac{\delta R(A-\frac{1}{2}CF).\mathfrak{G}}{cr}$$

woraus ſich auch A finden läßt.

Zuſ.

§. 106*. Für ſolche Fälle wie (§. 101) wäre alſo

$$Q=\frac{R.\left(\frac{C-c}{2g}.(A-\frac{1}{2}CF).\mathfrak{G}-V\right)-\varrho\mu p}{r+\varrho\mu}+\frac{\delta R(A-\frac{1}{2}CF).\mathfrak{G}}{cr}$$

und für die Laſt an einem Krummzapfen dürfte man in dieſer letzten Gleichung nur 0,637 . r ſtatt r ſchreiben.

Anm. Eigentlich iſt die Fallhöhe ab, in welcher die Schaufel f vom einſtürzenden Waſſer erreicht wird, veränderlich, nämlich deſto gröſſer, ie gröſſer c wird, daß ſich alſo die Tiefe ab eigentlich nicht ſo feſtſetzen läßt, wie es hier (no. 1) geſchehen iſt. Es ſind alſo auch C und δ Gröſſen, deren Werthe von c abhängen. Inzwiſchen kann man die Beſtimmung (no. 1) immer beibehalten und die daraus hergeleiteten Werthe von C und δ als unveränderlich beibehalten, weil auch bei ziemlich beträchtlichen Geſchwindigkeiten des Rades das ſchief einſtürzende Waſſer doch im-

immer beiläufig in dieſer Tiefe ab fällt und bei dieſer Vorausſetzung nicht leicht um ein Paar Zolle im Werthe von δ gefehlt werden kann, die dann dem Druck abgehen oder zufallen, aber zu gleicher Zeit beim Stoße wieder hinzu- oder abgerechnet werden.

Die Fehler, die man bei der ungewiſſen Vorausſetzung (no. 1) in beiden Gliedern zur Rechten der Formel (no. 5) begeht, heben alſo einander noch groſſentheils auf, und der Fehler wird dadurch im Ganzen für die Ausübung ſehr unſchädlich.

Genauere Unterſuchungen würden auch hierbei wiederum keine viel ſchärfere, aber eine ſehr viel verwickeltere Formel geben.

Zuſ. 1.

§. 107. Für den gröſstmöglichen Nutzeffekt des Kropfrades muß wiederum c.Q ein maximum ſeyn, welches erfolgt, wenn

$$R.\frac{C-c}{2g}.c.(A-\tfrac{1}{2}CF).\mathfrak{G}-\varrho\mu p.c$$

ein maximum iſt.

Demnach wie (§. 103. no. 3)

$$c = \tfrac{1}{2}C - \frac{\varrho\mu p}{(A-\tfrac{1}{2}CF).R.\mathfrak{G}}.g$$

und mit Rückſicht auf die Fälle, wo die Kraft noch einer Ueberwucht V bedarf (§. 103. no. 2),

$$c = \tfrac{1}{2}C - \frac{RV+\varrho\mu p}{(A-\tfrac{1}{2}CF).R.\mathfrak{G}}.g$$

eine ganz allgemeine Formel, die auch für Krummzapfen gültig bleibt (§. 103. no. 4).

Hier iſt aber C die Geſchwindigkeit, welche die Fallhöhe ab (fig. 63) giebt, da hingegen (fig. 64) beim

beim flachen Gerinne C die Geſchwindigkeit iſt, welche ſich aus dem geſammten Gefälle mn ergiebt. Daraus folgt:

> Unter ſonſt gleichen Umſtänden müſſen, wenn der gröſstmögliche Effekt verlangt wird, Kropfräder allemal merklich langſamer umlaufen, als Räder im Schußgerinne.

Zuſ. 2.

§. 108. Der gröſstmögliche Totaleffekt des Kropfrades iſt $= \frac{1}{2}.(A-a)h.\mathfrak{G}+\delta.(A-a).\mathfrak{G}$; das erſte Glied dieſes Ausdrucks ergiebt ſich aus (§. 105. no. 9), das zweite aus dem 2ten (§. 106. no. 5), indem man $F = 0$ ſetzt und mit $\frac{r}{R}.c$ multiplicirt, weil der Effekt durch $\frac{r}{R}.c.Q$ ausgedruckt werden kann.

Uebrigens iſt h die zu C gehörige Höhe, die alſo etwas kleiner als ab (fig. 63) iſt.

Es ſey die ganze Höhe ay (fig. 63) $= \mathfrak{H}$, die $ab = H$, ſo kann man h durch $H - \triangle$ ausdrucken, wo $\triangle$ eine kleine Gröſſe bezeichnet, und es iſt $\delta =$ by (fig. 63) $= \mathfrak{H} - H$; demnach der gröſsmögliche Effekt des Kropfrades $= (\frac{1}{2}h + \delta).(A-a).\mathfrak{G}$ $= (\frac{1}{2}H - \frac{1}{2}\triangle + \mathfrak{H} - H).(A-a).\mathfrak{G} = (\mathfrak{H} - \frac{1}{2}(H+\triangle)).(A-a)\mathfrak{G}$.

Da dieſer Ausdruck bei einerlei $\mathfrak{H}$ deſto gröſſer wird, ie kleiner H iſt, ſo erhellet, daß man bei einem beſtimmten Gefälle $\mathfrak{H}$ einen deſto gröſſeren Effekt erhält, ie höher man den Kropf führt. Für $H = \mathfrak{H}$

 wird

wird der Effekt am kleinſten; für dieſen Fall hat man aber ein flaches Gerinne; alſo leiſtet ein Rad in einem Schußgerinne allemal weniger als ein Kropfrad.

Da dieſes für den Totaleffekt gilt, ſo gilt es um ſoviel mehr für den Nutzeffekt.

Anm. Die Gränze des Effekts für ein Kropfrad ergiebt ſich für $H = 0$, da dann zugleich $\triangle = 0$ geſetzt werden könnte. Für dieſen Fall wird ſein Effekt

$$= \mathfrak{H} \,.\, (A - a) \,.\, \mathfrak{G}.$$

Für das Rad im flachen Gerinne muß man $H = \mathfrak{H}$ ſetzen, wo dann auch $\triangle$ beibehalten werden muß; dieſes Rades Effekt wäre alſo $= \left(\mathfrak{H} - \frac{1}{2}(\mathfrak{H} + \triangle)\right)$ $.\,(A - a) \,.\, \mathfrak{G} = \left(\frac{1}{2}\mathfrak{H} - \frac{1}{2}\triangle\right) . \,(A - a) \,.\, \mathfrak{G}$ alſo bei einerlei Werthe von a

jener zu dieſem wie $\mathfrak{H}$ zu $\frac{1}{2}(\mathfrak{H} - \triangle)$ oder erſterer mehr als doppelt ſo groß als letzterer.

Nun kann zwar H nie $= 0$ gemacht werden; dagegen iſt aber auch beim Rade im flachen Gerinne a allemal gröſſer als beim Kropfgerinne; überdas kann der berechnete Effekt des Stoſſes nie ſo vollſtändig in ſeiner ganzen Gröſſe erhalten werden, als der berechnete Effekt des Drucks; und wenn auch gleich dieſe beiden Umſtände zuſammengenommen die Gröſſe des Stoſſes noch nicht völlig um ſoviel vermindern, als die des Drucks durch den Werth von H, welcher nie $= 0$ werden kann, vermindert wird, ſo kann man doch hiernach in der Ausübung den größtmöglichen Effekt eines gehörig gebauten Kropfrades ohngefähr doppelt ſo groß annehmen als den eines Rades in einem flachen Gerinne.

Aufg. 26.

§. 109. Der Flächeninhalt einer Schaufelfläche an einem Rade im freien Strohme, ſo tief ſie ſich in der tiefſten, alſo in ihrer lothrechten Lage unter den natürlichen Waſſerſpiegel eintaugt, heiſſe S; der Halbmeſſer des Rades bis in die Mitte des unter dem Waſſer eingetaugten Theils der lothrechten Schaufel ſey = R, dieſes Mittelpunkts Geſchwindigkeit = c, die natürliche Geſchwindigkeit des Strohmwaſſers = C, der Widerſtand, welcher am Ende des Halbmeſſers R beim Umlaufe des Rades im gleichförmigen Beharrungsſtande der Kraft entgegengeſetzt ſeyn dürfte, = p′; die in der Entfernung r von der Axe mit unveränderlichem Momente angebrachte Laſt = Q, des Rades Gewicht = p, die in ieder Sekunde gegen die lothrechte Schaufel ſtröhmende Waſſermenge = A: man ſoll das Verhältniß zwiſchen Kraft und Laſt für den gleichförmigen Beharrungsſtand beſtimmen.

Aufl. I. Es wird vorausgeſetzt, daß R wenigſtens 3 mal ſo groß als die ganze Schaufelhöhe ſey, damit man ohne merklichen Fehler den Mittelpunkt vom eingetaugten Theil der lothrechten Schaufel als den Stoßpunkt annehmen könne.

Wenn nun der Stoß im unbegränzten Waſſer nur halb ſo groß als im Schußgerinne iſt (Hydraul. §. 55), ſo hat man hier nach (§. 100)

$$Q = \frac{R \cdot \frac{C - c}{4g} \cdot (A - a) \cdot \mathfrak{G} - \mu \cdot \varrho \cdot p}{r + \varrho\mu}$$

Die Länge der Schaufel ſey $= \lambda$, die Höhe des bei lothrechter Stellung unter dem Waſſer eingetauchten Theils $= \beta$, ſo iſt $A = C . \lambda\beta$; der Schaufelwinkel iſt, wenn überhaupt N Schaufeln vorhanden ſind, $= \frac{360^\circ}{N}$, man kann daher $a = R . \frac{1}{2} \sin v \frac{180}{N} \lambda c$ ſetzen. So wird

$$Q = \frac{R . \frac{C-c}{4g} . (\beta - \frac{1}{2} R . \sin v \frac{180^\circ}{N}) . \lambda C \mathfrak{S} - \mu \varrho p}{r + \varrho \mu}$$

Für ſolche Fälle wie (§. 101) hätte man $Q =$

$$\frac{R \left(\frac{C-c}{4g} . (\beta - \frac{1}{2} R . \sin v \frac{180^\circ}{N}) . \lambda C \mathfrak{S} - V \right) - \mu \varrho p}{r + \varrho \mu}$$

und für die Laſt an einem Krummzapfen wird in dieſer Formel nur 0,637 . r ſtatt r geſchrieben.

II. Daß ſich aber der Stoß im unbegränzten Waſſer auch gegen eine bewegte Fläche halb ſo groß als im Schußgerinne annehmen laſſe, wie die vorſtehende Formel vorausſetzt, iſt nicht nur noch nicht erwieſen, ſondern wahrſcheinlich falſch.

Wenn nämlich eine Fläche $= \lambda\beta$ in einem unbegränzten Strohme den Stoß aufnimmt, ſo können die Waſſerfäden, welche in einiger Entfernung vor der Stoßfläche noch in ſenkrechter Richtung gegen dieſe Fläche fortſtröhmen, die alſo zuſammen einen Querſchnitt $= \lambda\beta$ bilden, nicht alle die Fläche wirklich erreichen, ſondern ſie werden ſo nach den Seiten abgelenkt, daß ſie zum Theil gar nicht auf die Stoßfläche wirken. Daher wird bei der ruhigen Fläche der Stoß

nur

nur halb ſo groß im unbegränzten Waſſer als im Schußgerinne oder beim iſolirten Strahl.

Aber offenbar können deſto mehrere Waſſerfäden des Querſchnittes λw auf die Stoßfläche wirken, ie ſchneller die Stoßfläche ausweicht; wäre z. B. c beinahe $= C$, ſo könnten offenbar beinahe alle Waſſerfäden auf die Stoßfläche ſo wirken, wie bei einem iſolirten Strahl, bei welchem in ſolchem Falle auch eine Stoßfläche, die nicht merklich vom natürlichen Querſchnitte des Strahls verſchieden wäre, den Stoß $\frac{C-c}{2g}.A$ leiden würde. Es muß alſo der Stoß im unbegränzten Waſſer dem des iſolirten Strahls deſto näher kommen, ie gröſſer $\frac{c}{C}$ wird.

Nun geht bei einer ruhigen Stoßfläche die Hälfte von der Wirkung aller Waſſerfäden verlohren, die der iſolirte Strahl hervorbringen würde, man wird alſo, bis genaue Verſuche hierüber beſtimmter entſcheiden, berechtiget ſeyn anzunehmen, daß man für bewegte Stoßflächen nicht ſchlechtweg $\frac{1}{2}.\frac{C-c}{2g}$, ſondern $\left(1+\frac{c}{C}\right).\frac{1}{2}.\frac{C-c}{2g}$ oder $\left(1+\frac{c}{C}\right).\frac{C-c}{4g}$ ſetzen müſſe.

Auf ſolche Weiſe erhält man $Q =$

$$\frac{R.\left(\left(1+\frac{c}{C}\right).\frac{C-c}{4g}.\left(\beta-\frac{1}{2}R.\text{ſinv}\frac{180^\circ}{N}\right).\lambda C\mathfrak{S}-V\right)-\mu\varrho p}{r+\varrho\mu}$$

Die

Die Differentialrechnung giebt nun für den größten Effekt

$$c = \sqrt{\left(\tfrac{1}{3}C^2 - \frac{V + \mu\varrho p}{\frac{3\lambda R}{4g}.\left(\beta - \tfrac{1}{2}R.\text{ſinv}\,\frac{180^\circ}{N}\right).\mathfrak{S}}\right)}$$

welches ſich für V und $\mu = 0$ in $c = \sqrt{\tfrac{1}{3}C^2} = 0{,}58 . C$ verwandelt.

Stoßräder.

Erklärung 32.

§. 110. Man denke ſich am äuſſeren Umfang eines Radkranzes die Kreislinie, deren Mittelpunkt zugleich der Mittelpunkt des Rades iſt; d (fig. 65) ſey der tiefſte Punkt dieſer lothrechten Kreisfläche, hg eine Berührungslinie des Kreiſes in g, die alſo zugleich eine Horizontallinie iſt. Am Umfang des Rades ſeyen nun die Schaufelbretter, welche beim Straubrade die erwähnte Kreisfläche ſenkrecht ſchneiden, ſo geſtellt, daß die Stoßfläche mit derſelben einen ſchiefen Winkel mache, daß alſo nm die Linie bezeichnen kann, in welcher eine durch gh gelegte wagrechte Ebene die lothrechte Stoßfläche der unterſten Schaufel ſchneidet; ſo hat man ein unterſchlächtiges Rad mit ſchiefgeſtellten Schaufeln, das durch einen horizontalen Strahl, der ſenkrecht gegen die durch hg gelegte lothrechte Ebene ſtröhmt, nach dg in Umlaufsbewegung gebracht werden kann. Ein ſolches Rad will ich hier insbeſondere ein **Stoßrad** mit liegender Welle nennen. Die lothrechte Ebene, in welcher die erwähnte Kreisfläche liegt, ſoll die Radebene heiſſen.

Aufg.

Aufg. 27.

§. 111. ad (fig. 65) ſey die Mittellinie eines horizontalen auf die Radebene ſenkrechten Strahls, hg eine durch d in der Radebene gezogene Horizontallinie, und mn die Linie, in welcher eine durch d gelegte horizontale Ebene die Stoßfläche der unterſten Schaufel ſchneidet; der Winkel mdg ſey $= \zeta$, des Rades Halbmeſſer von der Axe bis in d herab gemeſſen ſey $= R$, die in einer Sekunde gegen die Radebene ſtröhmende Waſſermenge $= A$, die Geſchwindigkeit der Waſſertheilchen $= C$, die Umlaufsgeſchwindigkeit der Stelle $d = v$; die Geſchwindigkeit, mit welcher einem in d anſtoſſenden Waſſertheilchen die in dn liegenden Punkte der Schaufelfläche nach der Richtung ad oder dw ausweichen, $= c$; in der Entfernung r von der Axe wirkt mit unveränderlichem Momente die Laſt Q; des Rades Gewicht ſey $= p$: man ſucht das Verhältniß zwiſchen Kraft und Laſt für den gleichförmigen Beharrungsſtand. Es wird vorausgeſetzt, daß die Schaufelfläche beträchtlich gröſſer ſey als der natürliche Querſchnitt des Strahls.

Aufl. 1. Die Gröſſe des Stoſſes, welchen der iſolirte Waſſerſtrahl auf die Stoßfläche ausüben würde, wenn er ſie ſenkrecht träffe, heiſſe $\mathfrak{P}$, der alſo nach ad gerichtet wäre; wenn nun S der hieraus entſtehende Seitendruck nach dg iſt, ſo hat man (Hydraul. §. 51)

$$S = \mathfrak{P} . \mathrm{Cof}\,\zeta . \mathrm{ſin}\,\zeta$$

2. Es

2. Es iſt aber (a. a. O. §. 46. no. 10. I)

$$\mathfrak{P} = \frac{A}{2g} . (C - c) . \mathfrak{G}$$

alſo

$$S = \frac{A}{2g} . (C - c) . \mathrm{Coſ}\,\zeta . \mathrm{ſin}\,\zeta . \mathfrak{G}$$

3. Weil nun alles wie (§. 100) bleibt, nur daß hier $a = 0$ und $(C - c) . \mathrm{Coſ}\,\zeta . \mathrm{ſin}\,\zeta$ ſtatt $C - c$ geſetzt werden muß, ſo hat man wie dort

$$Q = \frac{R . \frac{C - c}{2g} . A . \mathfrak{G} . \mathrm{Coſ}\,\zeta . \mathrm{ſin}\,\zeta - \varrho\mu p}{r + \varrho\mu}$$

4. Es iſt aber $v : c = nw : dw$, alſo

$$c = \frac{dw}{nw} . v = \frac{\mathrm{Coſ}\, ndw}{\mathrm{ſin}\, ndw} . v$$

$$= v . \mathrm{Cot}\, ndw = v . \mathrm{tang}\,\zeta$$

weil $wdg = 90^\circ$ iſt.

Demnach

$$Q = \frac{R . \frac{C - v . \mathrm{tang}\,\zeta}{2g} . A . \mathfrak{G} . \mathrm{Coſ}\,\zeta . \mathrm{ſin}\,\zeta - \varrho\mu p}{r + \varrho\mu}$$

5. Daher auch

$$A = \frac{(r + \varrho\mu) . Q + \varrho\mu p}{R . \frac{C - v . \mathrm{tg}\,\zeta}{2g} . \mathfrak{G} . \mathrm{Coſ}\,\zeta . \mathrm{ſin}\,\zeta}$$

Zuſ.

Zuſ.

§. 112. Für den Fall (§. 101) wird Q =

$$\frac{R.\left(\frac{C-v.\,\mathrm{tang}\,\zeta}{2g}.A.\mathfrak{G}.\,\mathrm{Cos}\,\zeta.\,\mathrm{sin}\,\zeta - V\right) - \varrho\mu p}{r + \varrho\mu}$$

und für den Fall (§. 102) darf man in dieſer Formel nur 0,637 . r ſtatt r ſchreiben.

Aufg. 28.

§. 113. Es ſind alle Beſtimmungsſtücke, welche auf den Effekt des Stoßrades Einfluß haben, gegeben: man ſoll die vortheilhafteſte Geſchwindigkeit des Stoßpunktes d (fig. 65) beſtimmen.

Aufl. 1. Für den größten Nutzeffekt muß $\frac{r}{R}v.Q$, alſo auch $v.Q$ ein maximum ſeyn; dieſem geſchieht Genüge, wenn (§. 112)

$$R.v.\left(\frac{C-v.\,\mathrm{tg}\,\zeta}{2g}.A.\mathfrak{G}.\,\mathrm{Cos}\,\zeta.\,\mathrm{sin}\,\zeta - V\right) - v\varrho\mu p$$

ein maximum wird

2. Der Kürze wegen ſetze man

$$\frac{A.\mathfrak{G}.\,\mathrm{Cos}\,\zeta.\,\mathrm{sin}\,\zeta}{2g} = B$$

ſo ſoll

$$RBC.v - RB.\,\mathrm{tg}\,\zeta.\,v^2 - RVv - \varrho\mu pv$$

ein maximum ſeyn.

3. Die Differentialrechnung giebt nun

$$RBC - RB.\,\mathrm{tg}\,\zeta.\,2v - RV - \varrho\mu p = 0$$

alſo

alſo

$$v = \frac{R.(BC - V) - \varrho\mu p}{2RB.\tang\zeta}$$

oder (no. 2)

$$v = \frac{C}{2.\tang\zeta} - \frac{R.V + \varrho\mu p}{R.A.\mathfrak{G}.\sin\zeta^2}.g$$

allgemein auch beim Krummzapfen.

Zuſ.

§. 114. 1. Es ergiebt ſich alſo für den größten Nutzeffekt bei einem unveränderlichen ſtat. Moment von Q aus (§. 112) Q =

$$\frac{R}{r + \varrho\mu}.\left(\frac{A.\mathfrak{G}\ \mathrm{Co}\mathfrak{f}\zeta.\sin\zeta.C}{4g} - \tfrac{1}{2}V - \frac{\varrho\mu p}{2R}\right)$$

2. Läßt man den Strahl durch eine Oeffnung in einer dünnen Wand eines Behältniſſes, das vielmal weiter als die Oeffnung iſt, hervorſpringen, und iſt die Höhe des Waſſerſpiegels in dieſem Behältniß über dem Mittelpunkt der Oeffnung, der mit dem Punkt d in einer wagrechten Linie liegt, = H, ſo kann man hier $\frac{C^2}{4g} = H$ ſetzen; iſt überdas der Querſchnitt des zuſammengezogenen Waſſerſtrahls = w, die Gröſſe der Ausflußöffnung = W, ſo hat man (Hydraul. §. 5) w = 0,62. W und A = C. w = 0,62. C. W. Demnach Q =

$$\frac{R}{r + \varrho\mu}.\left(\frac{0{,}62.C^2.W.\mathfrak{G}.\mathrm{Co}\mathfrak{f}\zeta.\sin\zeta}{4g} - \tfrac{1}{2}V - \frac{\varrho\mu p}{2R}\right)$$

$$= \frac{R}{r + \varrho\mu}.\left(0{,}62.H.W.\mathfrak{G}.\mathrm{Co}\mathfrak{f}\zeta.\sin\zeta - \tfrac{1}{2}V - \frac{\varrho\mu p}{2R}\right)$$

oder,

oder, wenn man w beibehalten will,

$$Q = \frac{R}{r + \varrho\mu} \times$$

$$\left(H.w.\mathfrak{G}.\,Coſ\zeta.\,ſin\zeta - \tfrac{1}{2}V - \frac{\varrho\mu p}{2R}\right)$$

3. Man kann nun auch ζ als veränderlich betrachten, da man dann für verſchiedene Werthe dieſes Winkels auch verſchiedene Werthe von Q erhält.

Der größte Werth von Q ergiebt ſich für dasjenige ζ, für welches $Coſ\zeta.ſin\zeta$ am größten wird, d. i. für $\zeta = 45°$; und da für dieſen Fall $Coſ\zeta.ſin\zeta = \frac{1}{2}$ iſt, ſo iſt die größtmögliche Laſt Q, die zugleich mit dem zu $\zeta = 45°$ gehörigen vortheilhafteſten Gang des Rades verbunden iſt, =

$$\frac{R}{r + \varrho\mu}.\tfrac{1}{2}\left(Hw.\mathfrak{G} - \frac{RV + \varrho\mu p}{R}\right)$$

Dabei iſt (§. 113. no. 3)

$$v = \tfrac{1}{2}C - \frac{RV + \varrho\mu p}{R.\,Cw\,\mathfrak{G}}.\,2g$$

Setzt man V und $\mu = 0$, ſo wird in dieſem Falle

$$Q = \frac{R}{r}.\tfrac{1}{2}Hw\mathfrak{G};\quad v = \tfrac{1}{2}C$$

und der Effekt $= \frac{r}{R}v.Q =$

$$\tfrac{1}{4}HCw.\mathfrak{G} = \tfrac{1}{4}HA.\mathfrak{G}$$

ohngefähr nur halb ſo groß als beim gewöhnlichen unterſchlächtigen Rade (§. 104). Daher würde für

$\zeta = 45°$ dieſes Stoßrad den übrigen unterſchlächtigen Rädern weit nachſtehen.

4. Allgemein iſt, für V und $\mu = 0$, der Effekt $\frac{r}{R} v . Q = \frac{r}{R} . \frac{C}{2 . \tang \zeta} . \frac{R}{r} . Hw\mathfrak{G} . \mathrm{Coſ}\zeta . \sin \zeta$ $= \frac{1}{2} Cw . H . \mathfrak{G} . \mathrm{Coſ}\zeta^2$, der für $\zeta = 0$ am gröſten wird. In dieſem Falle iſt er

$$= \tfrac{1}{2} CwH . \mathfrak{G} = \tfrac{1}{2} AH . \mathfrak{G}$$

wo aber $v = \frac{C}{0} = \infty$ ſeyn, alſo dem Rade vorher eine unendliche Geſchwindigkeit mitgetheilt werden müßte.

Man ſieht hieraus, daß ſich der Totaleffekt dieſes Stoßrades dem (§. 104) nur bei einer ſehr groſſen Geſchwindigkeit nähert, d. i. bei kleinen Werthen von ζ. Da aber für kleine Werthe von ζ die Nebenlaſt allemal einen viel gröſſeren aliquoten Theil der ganzen Laſt ausmacht, als bei den gemeinen Rädern, ſo wird eben dadurch der Nutzeffekt ſehr verringert, und es muß daher das nur erwähnte Stoßrad in Rückſicht auf die Gröſſe des Nutzeffekts den vorher beſchriebenen unterſchlächtigen Rädern überhaupt nachgeſetzt werden.

Wo man hingegen keinen Mangel an Aufſchlagewaſſer hat, alſo nicht von Erſparung der Kraft die Rede iſt, da kann das beſchriebene Stoßrad zur Vereinfachung der Maſchinen dienen, indem man durch ſolches unmittelbar groſſe Geſchwindigkeiten hervorbringen kann, die durch die gemeinen Räder nur mittelſt verzahnter Räder und Trillinge hervorgebracht werden können.

Anm.

Anm. Der Waſſerſtrahl kann bei dergleichen Stoßrädern auch unter andern, d. h. unter ſchiefen Winkeln gegen die Radebene geleitet werden. Auch laſſen ſich auf dieſelbe Weiſe horizontale, d. i. Stoßräder mit ſtehenden Wellen anordnen, bei welchen das Waſſer durch ein ſteiles Gerinne auf die ſchief geſtellten Schaufeln herabſtürzen kann. In Schweden werden dergleichen Räder zur Vereinfachung der zerſtreut liegenden kleinen Mühlen ſehr häufig gebraucht.

Hierher gehörige Schriften.

Sur la plus grande perfection poſſible des machines, par M. Parent. Mem. de l'acad. de Paris an. 1704.

Beyer, Mühlenſchauplatz.

Sur les roues hydrauliques, par M. le Cheval. de Borda. Mem. de l'acad. de Paris an. 1767.

Käſtner angef. Hydrod.

Karſten angef. Lehrbegr. V. Th.

Belidor Archit. Hydr. I. Th.

Experiences et Rémarques ſur les moulins que l'eau meut par en bas dans une direction horizontale, par Mr. Lambert — in den Nouveaux Mèm. de l'acad. roy. des Sc. et Belles-lettres à Berlin 1775. — eine Ueberſetzung davon in der Sammlung nützlicher Aufſätze und Nachrichten die Bauk. betr. 1797.

Euleri (I. A.) Enodatio quaeſtionis, quomodo vis aquae cum maximo lucro ad molas circumagendas aliaue opera perficienda impendi poſſit. Gött. 1754.

Klügel Theoria noua motus machinarum vi aquae in rotam ſubtus incurrentis mouendarum — in den Comment. Soc. Reg. Sc Gött. Vol. I. — eine Ueberſetzung davon in Langsdorfs Lehrb. d. Hydraul.

Gerſtner, Theorie des Waſſerſtoſſes in Schußgerinnen, mit Rückſicht auf Erfahrung und Anwendung. Abh. der Königl. Böhmiſchen Geſ. d. Wiſſ. a. B. Prag 1795.

Langsdorf, angef. Handbuch der Maſchinenl. beſonders 2. B.

Deſſ. angef. Lehrb. der Hydraul.

Eytelwein angef. Handb. der Mechanik.

Eiſelen, über die Anwendung des Waſſers auf unterſchlächtige, inſonderheit auf ſolche Waſſerräder, die in einem Gerinne gehen, und einiges Gefälle, mithin ſogenannte Kröpfe haben — in den Samml. nützlicher Aufſätze die Bauk. betreffend. Jahrg. 1798. 2ter Th.

Bank, Abhandl. über die Mühlenwerke — aus dem Engl. überſ. von Zimmermann. Berlin 1799.

Hoffmann, der Waſſermühlenbau mit beſonderer Rückſicht auf Mahlmühlen. Königsberg 1800.

Huth, die nöthigſten Kenntniſſe zur Anlegung, Beurtheilung und Berechnung der Waſſermühlen, Halle 1787.

Theoretiſch-practiſche Abhandlung über die Verbeſſerung der Mühlräder, von dem Verfaſſer der zweckmäſſigen Luftreiniger (Parrot dem Jüngeren) Nürnberg 1795.

Die meiſten dieſer Schriften laſſen ſich aus dem bisherigen Vortrage beurtheilen und berichtigen.

Dreizehentes Kapitel.

Das Segnerſche Waſſerrad.

Erklärung 33.

§. 115. A (fig. 66) ſey eine Tromme, ein hohler Cylinder, der ſich wie eine ſtehende Welle mittelſt Zapfen um ſeine Axe dreht. Unten bei m ſey eine wagrechte Röhre mn, das Schwungrohr, ſo

ſo angebracht, daß die Axe dieſes Schwungrohres horizontal und mit der Axe der Tromme in einer lothrechten Ebene liegt; bei n ſey wiederum eine horizontale Röhre, die Ausflußröhre, angebracht, deren Axe mit der mn einen rechten Winkel macht, und vor die vordere Oeffnung dieſer Ausflußröhre eine Platte, mit einer Oeffnung in ihrer Mitte, vorgeſchroben, damit das bei a in die Tromme einflieſende Waſſer bei n wieder ausſtröhmen könne; ſo heißt dieſe Maſchine das Segnerſche Waſſerrad. Um den Theilen der Maſchine unter ſich völliges Gleichgewicht zu geben, kann man dem Schwungrohre mn gegenüber noch das vw anbringen, das ſeine Ausflußröhre an der hinteren vom Auge weggekehrten Seite hat.

Die in der Zeichnung angebrachten Stangen α, β dienen zur Befeſtigung.

Anm. Ich habe die Theorie dieſer Maſchine, auch mit Rückſicht auf die von Hrn. Euler vorgeſchlagenen Verbeſſerungen in meinem Lehrbuche der Hydraulik umſtändlich vorgetragen, auch im 2ten Bande des Handbuchs der Maſchinenlehre noch verſchiedene Unterſuchungen darüber beigefügt. Hier glaube ich dergleichen theoretiſche Betrachtungen über dieſe Maſchine ganz bei Seite ſetzen zu dürfen, weil ſie auf einen ziemlich weitläuftigen Kalkul führen, deſſen Reſultate doch am Ende von der Erfahrung ſehr abweichen, und weil ebendieſe Abweichungen ganz zum Nachtheil der Maſchine ausfallen, ſo daß ſie nach Verſuchen, die ich im Kleinen darüber angeſtellt habe, viel weniger leiſtet, als die Theorie verſpricht. Im Groſſen könnten freilich iene Abweichungen verhältnißmäſſig kleiner werden. In der Form (fig. 66) iſt der Effekt ſchon der Theorie gemäß ſehr gering; aber nach den Eulerſchen Vorſchlägen verſpricht die Theorie mehr als von allen vorhergehenden Waſſerrädern; inzwiſchen laſſen ſich dieſe Vorſchläge in der Ausübung nicht befolgen.

Hierher gehörige Schriften.

Boſſút, angef. Hydr. 1. B.

Karſten, angef. Lehrb. 6 Th.

Almanach der Fortſchritte in Wiſſenſchaften ꝛc. I. Jahrg. 1797.

Langsdorf angef. Schriften.

Vierzehentes Kapitel.
Von den Windflügeln.

Erklärung 34.

§. 116. Man denke ſich eine beinahe wagrecht liegende Welle (Flügelwelle), die am hinteren Ende zum Aufliegen einen Zapfen und vornen einen Hals mit einem über das vordere Lager, worauf der Hals aufliegt, hervorſtehenden ſtarken parallelepipediſchen Kopf hat, der ein paar Fuſſe lang iſt; das Viereck a (fig. 67) kann einen ſenkrechten Querſchnitt dieſes Kopfs vorſtellen. Durch dieſen Kopf denke man ſich einen Baum (Windruthe) AB, und am Kopfe mehr vorwärts oder mehr rückwärts noch eine ſolche Windruthe CD ſo durchgeſteckt, daß beide Windruthen unter ſich und mit der Axe der Flügelwelle rechte Winkel machen. Durch ieden der vier hervorgehenden Theile der Windruthen denke man ſich ferner, wie von e nach d, Latten (Windſproſſen) ſo durchgeſteckt, daß ihre Gränzlinien auf der einen Seite der Ruthe ein Rektangel wie efgD bilden, welches eine durch CD und die Axe der Flügelwelle gelegte

Ebene

Ebene auf der hintern Seite unter einem ſpitzen, alſo auf der dem Auge zugekehrten Seite unter einem ſtumpfen Winkel ſchneidet.

So erhält man 4 Windflügel, die alle mit Segeltuch (nicht ſo gut mit eingeſetzten beſchindelten Rahmen) bezogen, und durch einen der Wellenaxe beiläufig parallel ſtoſſenden Wind auf dieſelbe Weiſe zum Umlaufe um die Wellenaxe nach der Richtung gDACB gebracht werden, wie im vor. Kap. das Stoßrad mit liegender Welle durch den Waſſerſtrahl.

Die etwa 10 bis 12 Zoll lange durchgeſteckte Enden der Windſproſſen, wie en, werden mit aufgenagelten Brettern bedeckt, wie man an der Ruthe Aa ſieht.

Das Segeltuch kann bei iedem Flügel über die ganze Fläche ausgeſpannt und, wenn hinreichender Wind vorhanden iſt, auch zum Theil zurückgebunden (auf- und abgetakelt) werden.

Die Ruthenlänge CD beträgt ſelten über 70 Rhl. Fuſſe, noch ſeltener unter 40, die Entfernung ae von der Axe bis zur erſten Windſproſſe 2½ bis 3½ Fuſſe, die Breite ef 4 bis 6 Fuſſe.

Stellt man unter der Flügelwelle eine lothrechte Welle DE (die Königswelle) (fig. 68) auf, welche zwei Trillinge CF führt, und legt um die Flügelwelle ein Rad mit Kämmen, ſo werden beim Herumlaufen der Flügel die Trillinge der Königswelle gleichfalls in Umlaufsbewegung gebracht und man kann nun dadurch, daß man den unteren Trilling wieder in ein horizontales Rad mit ſtehender Welle oder in ein lothrechtes mit liegender Welle wie (fig 68) eingreifen läßt, nach den verſchiedenen Abſichten andere verlangte Be-

wegungen hervorbringen, wie hier die Bewegung des Krummzapfens G.

Um die Bewegung der Flügel hemmen zu können, wird eine Premſe gerade über dem Rade BA angebracht, die aus etwa drei kurzen aber ſtarken hölzernen mit einigen eiſernen Bändern zuſammenverbundenen Bogenſtücken beſteht und auf ſolche Weiſe im Ganzen ein elaſtiſches Stück bildet, das ſich allmälig am äuſſern Umfange des Rades AB andrucken läßt, wenn die Flügel ſtille ſtehen ſollen.

Um aber auch die Axe der Flügelwelle iedesmal in die Richtung des Windes bringen, alſo die Flügel dem iedesmaligen Winde gerade entgegenſetzen zu können, müſſen die Unterlager m, n in einen beweglichen horizontalen Ring befeſtiget ſeyn, der auf kleinen eiſernen Walzen aufliegt, die auf einem gleichfalls horizontalen aber unbeweglichen Kranze ihre unverrückbare Lager haben.

Zur weiteren Erläuterung dienen in den Vorleſungen einige vollſtändige Modelle.

Anm. 1. Der mit eiſernen Schienen ausgelegte Hals der Flügelwelle leidet eine Reibung, deren Moment wegen der beträchtlichen Dicke des Halſes ſehr bedeutend iſt. Dieſer allgemeine Gebrauch ſollte daher durchaus abgeſchafft und bei o gleichfalls ein Wellzapfen angebracht werden, der ſich bei p in zwei dicke einander rechtwinklicht durchkreuzende Platten endigte, die an den Zapfen angegoſſen wären. Die Kreuzplatten müßten zum Durchſtecken der Ruthen gehörig durchlocht ſeyn und überdas noch gehörig angebrachte kleinere Löcher haben, um die durch die groſſen Oeffnungen durchgeſteckten Ruthen mittelſt Schrauben hinlänglich befeſtigen zu können.

Anm. 2 Ich habe hier zwar vorausgeſetzt, daß alle Sproſſen bei iedem Flügel ſo in die Ruthe eingeſteckt werden, daß

daß das darüber geſpannte Segeltuch eine Ebene efgD bilde; die Sproſſen können aber auch ſo eingeſteckt werden, daß der ſpitze Winkel, welchen ſie mit einer durch eD und die Flügelaxe gelegten Ebene machen, bei den einzelen Sproſſen dem rechten deſto näher kommt, ie weiter ſolche von der Flügelaxe abliegen. Dadurch erhalten die Flügel eine gewundene Geſtalt, und ſie heiſſen dann gebogene oder windſchiefe Flügel. Ich werde von dieſen nachher reden; zuerſt von den ebenen Flügeln.

Aufg. 30.

§. 117. Es ſey die Geſchwindigkeit des Windes nach der Richtung der Flügelaxe = C, die Umlaufsgeſchwindigkeit der Ruthe in einer willkührlich angenommenen Entfernung δ von der Axe a ſey = v, der Winkel, welchen die hintere Seite der Flügelebene efgD (fig. 67) mit der durch aD und die Flügelaxe gelegten Ebene macht, = ζ, des Flügels Länge fg = λ, ſeine Breite ef = β; die Entfernung ae der erſten Sproſſe von der Flügelaxe = r, ein von e auf eD willkührlich genommenes Stück en = x; man ſucht die Stärke des Windſtoſſes auf den ganzen Flügel, die ſpec. Schwere der Luft = $\frac{1}{850}$ von der des Waſſers angenommen.

Aufl. 1. Die Umlaufsgeſchwindigkeit der Stelle n iſt $= \frac{r+x}{\delta} . v$; ieder andere Punkt s in dem Streifen nm hat vermöge des gröſſeren Abſtandes as von der Axe eine gröſſere Umlaufsgeſchwindigkeit. Aber hier kommt es nicht auf die Geſchwindigkeit der Stellen s, δ nach den Tangenten ihrer Kreisbahnen sτ, $\delta\varepsilon$ an, ſondern auf die Geſchwindigkeit, mit der iede

ſolche Stelle dem im Kreiſe nq herumlaufenden Punkte n nach der Tangente nk nachfolgt; daher bleibt die hier in Betrachtung kommende Geſchwindigkeit aller Punkte von n bis m der von n gleich. Nur für verſchiedene Sproſſen iſt ſie verſchieden, nämlich allgemein $= \frac{r+x}{r} . v.$

2. Wenn nun die in 1 Sek. auf den Streifen mn anſtoſſende Luftmaſſe in Kub. Fußen $= \mathfrak{K}$ und das Gewicht von 1 Kub. Fuß Waſſer wie bisher $= \mathfrak{G}$ geſetzt wird, ſo iſt hier nach (§. 112), woferne von einem iſolirten Strahl die Rede iſt, der Stoß auf den Streifen, d. h. die der fn parallele Wirkung mit einer Laſt im Gleichgewicht, die in der Entfernung r von der Flügelaxe angebracht, =

$$\frac{(r+x).\left(\frac{C - \frac{r+x}{\delta}.v.\mathrm{Cot}\zeta}{2g} . \frac{\mathfrak{K}.\mathfrak{G}}{850} . \mathrm{Cos}\zeta \, \mathrm{sin}\zeta - V\right) - \varrho\mu p}{r + \varrho\mu}$$

wäre, wo V die der Kraft nöthige Ueberwucht und p das Gewicht der Flügel mit ihrer Welle und dem etwa darum gelegten Rade bedeutet.

3. Weil aber die Luft auf den ganzen Flügel als ein unbegränzter Strohm wirkt, ſo muß man (no. 2)

$$\left(1 + \frac{\frac{r+x}{\delta}.v.\mathrm{Cot}\zeta}{C}\right) . \left(\frac{C - \frac{r+x}{\delta}.v.\mathrm{Cot}\zeta}{4g}\right)$$

d. i. $$\frac{C^2 - \left(\frac{r+x}{\delta}\right)^2 . v^2 . \mathrm{Cot}\zeta^2}{4Cg}$$

ſtatt

ſtatt $\frac{C - \frac{r+x}{\delta}.v.\mathrm{Cot}\zeta}{2g}$ ſetzen (§. 109. II); ſchreibt man nun überdas C. β. ſin ζ. dx. 𝔊 ſtatt 𝔎, ſo erhält man die erwähnte Laſt =

$$\frac{r+x}{r}.\frac{C^2 - (\frac{r+x}{\delta})^2.v^2.\mathrm{Coſ}\zeta^2}{4g}.$$

$$\frac{\beta.\mathrm{ſin}\zeta.\mathfrak{G}.dx}{850}.\mathrm{Coſ}\zeta.\mathrm{ſin}\zeta$$

4. Zur Abkürzung ſey

$$\frac{\beta.\mathfrak{G}.\mathrm{Coſ}\zeta.\mathrm{ſin}\zeta^2}{850} = B$$

und $r+x = Z$, ſo ergiebt ſich das Integral =

$$\frac{B}{4gr}.\left(\tfrac{1}{2}C^2Z^2 - \frac{v^2.\mathrm{Coſ}\zeta^2}{\delta^2}.\tfrac{1}{4}Z^4\right) + \mathrm{Conſt.}$$

Daher für 4 Flügel die Laſt Q

$$= \frac{B}{gr}.\left(\tfrac{1}{2}C^2(Z^2-r^2) - \frac{v^2.\mathrm{Coſ}\zeta^2}{4.\delta^2}.(Z^4-r^4)\right)$$

oder, wenn die ganze Länge aD = λ geſetzt wird,

$$Q = \frac{B}{gr}.\left(\tfrac{1}{2}C^2(\lambda^2-r^2) - \frac{v^2.\mathrm{Coſ}\zeta^2}{4.\delta^2}(\lambda^4-r^4)\right)$$

oder, wenn die zu C und v gehörigen Höhen H und h heiſſen,

$$Q = \frac{B}{r}.\left(2(\lambda^2-r^2).H - \frac{\lambda^4-r^4}{\delta^2}.\mathrm{Coſ}\zeta^2.h\right)$$

5. Wenn

5. Wenn die Flügel in a ihren Anfang hätten, ſo wäre r = o, alſo

$$Q = \frac{B}{r} \cdot \left(2\lambda^2 . H - \frac{\lambda^2}{\delta^2} \mathrm{Cos}\zeta^2 . \lambda^2 h\right)$$

$$= \frac{B.\lambda}{r} \cdot \left(2\lambda H - \frac{\lambda^2}{\delta^2} . \mathrm{Cos}\zeta^2 . \lambda h\right)$$

$$= \frac{\lambda.\beta.\mathfrak{G}}{850.r} . \mathrm{Cos}\zeta . \sin\zeta^2 . \left(2\lambda H - \frac{\lambda^2}{\delta^2} . \mathrm{Cos}\zeta^2 . \lambda h\right)$$

6. Setzt man $\delta = \lambda$, ſo wird (no. 5)

$$Q = \frac{\lambda.\beta.\mathfrak{G}}{850.r} . \mathrm{Cos}\zeta . \sin\zeta^2 . (2\lambda H - \mathrm{Cos}\zeta^2 . \lambda h)$$

Zuſ.

§. 118. Für r = o iſt alſo der Effekt der 4 Windflügel $= \frac{r}{\lambda} . v . Q = \frac{r}{\lambda} . Q . 2\sqrt{gh} =$ $\frac{r}{\lambda} Q . \frac{C}{2\sqrt{gH}} . 2\sqrt{gh} = \frac{r}{\lambda} . Q . C . \sqrt{\frac{h}{H}} =$

$$\frac{4C.\lambda.\beta.\mathfrak{G}}{850} . \mathrm{Cos}\zeta . \sin\zeta^2 . \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{Hh} - \tfrac{1}{4}\mathrm{Cos}\zeta^2 h \sqrt{\frac{h}{H}}\right)$$

wo h die zur Umlaufsgeſchwindigkeit der letzten Sproſſe gehörige Höhe iſt; und wenn der kubiſche Inhalt der in ieder Sek. gegen einen Flügel ſtröhmenden Luftmaſſe $\mathfrak{K}$ heißt, ſo iſt $\mathfrak{K} = C.\lambda.\beta.\sin\zeta$, alſo $C.\lambda.\beta = \frac{\mathfrak{K}}{\sin\zeta}$, und der Effekt der 4 Flügel =

$$\frac{4.\mathfrak{K}.\mathfrak{G}}{850} . \mathrm{Cos}\zeta . \sin\zeta \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{Hh} - \tfrac{1}{4}\mathrm{Cos}\zeta^2 h \sqrt{\frac{h}{H}}\right)$$

$$= \frac{4\mathfrak{K}.\mathfrak{G}}{850} . \mathrm{Cos}\zeta . \sin\zeta . (H - \tfrac{1}{2}\mathrm{Cos}\zeta^2 h) . \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{h}{H}}$$

Er.

Ex. Es ſey $\zeta = 60°$, ſo iſt

$$\sin\zeta = 0{,}866;\quad \mathrm{Cos}\,\zeta = 0{,}5$$

alſo der Effekt, für $r = 0$,

$$= \frac{4\,K.G}{850} \cdot \frac{0{,}216 . (H - \frac{1}{8}h)}{\sqrt{\frac{H}{h}}}$$

oder

$$= \frac{4\,K.G}{850} . 0{,}216 . (H - \tfrac{1}{8}h) . \sqrt{\frac{h}{H}}$$

Für den größten Effekt fände man in dieſem Ex. $h = \frac{8}{3}H$, welches den Effekt =

$$\frac{4\,K.G}{850} . 0{,}23 . H$$

giebt.

Anm. 1. Den Widerſtand, welchen die Flügel wegen der Luft, in der ſie ſich bewegen, leiden, darf man nicht auſſer Acht laſſen. Man wird inzwiſchen in der Ausübung, wo ohnehin keine ſehr ſcharfe Rechnung verlangt werden kann, der Wahrheit ziemlich nahe kommen, wenn man bei Berechnung des Windſtoſſes die Wirkung deſſelben auf die Windbretter ganz bei Seite ſetzt, und dagegen ienen Widerſtand gleichfalls auſſer Acht läßt.

Anm. 2. In der Ausübung vergröſſert man den Effekt dadurch, daß man den Flügeln eine gebogene oder windſchiefe Geſtalt giebt. Hierzu dient die folgende Aufgabe.

Aufg. 31.

§. 118. Den Flügeln dieienige windſchiefe Geſtalt zu geben, bei der die verſchiedenen Sproſſen, die letzten wie die erſten, beim Umlaufe der Flügel alle mit gleicher Geſchwindigkeit dem Winde oder

den

den anſtoſſenden Luftſtrahlen nach der Richtung des Windes ausweichen.

Aufl. Wenn der Winkel, welchen die in der Entfernung Z von der Axe eingeſteckte Sproſſe mit der durch ad und die Axe gelegten Ebene macht, allgemein ζ heißt, ſo iſt die Geſchwindigkeit, mit der eine ſolche Sproſſe dem Winde nach ſeiner Richtung ausweicht, $= \frac{Z}{\delta} . v . \text{Cot}\,\zeta$; alſo müſſen die Sproſſen in den verſchiedenen Entfernungen Z ſo in die Ruthen eingeſteckt werden, daß dieſer Ausdruck immer einerlei Werth behält.

Wenn alſo dieſer Winkel in der Entfernung δ von der Axe mit α bezeichnet wird, ſo muß

$$v . \text{Cot}\,\alpha = \frac{Z}{\delta} . v . \text{Cot}\,\zeta$$

ſeyn, oder $\text{Cot}\,\alpha = \frac{Z}{\delta} . \text{Cot}\,\zeta$

alſo

$$\text{Cot}\,\zeta = \frac{\delta}{Z} . \text{Cot}\,\alpha$$

und

$$\text{tang}\,\zeta = \frac{Z}{\delta} . \text{tang}\,\alpha$$

Anm. 1. Wenn die erſte Sproſſe unter dem Winkel ζ eingeſteckt iſt, und die folgenden nach vorſtehender Aufgabe eingeſetzt werden, ſo kann man den Effekt um $\frac{1}{3}$ gröſſer annehmen, als er bei ebenen Flügeln, die unter demſelben Winkel ζ zurückgelegt ſind, ſeyn würde. Man könnte alſo, wenn die erſte Sproſſe unter einem Winkel von 60° wie

wie (§. 117. Ex.) eingeſteckt wäre, für den vortheilhafteſten Werth von h den Totaleffekt $= \frac{4 K . G}{850} . 0,3 H$ ſetzen. Inzwiſchen paßt dieſer Werth von h nicht für die Ausübung, weil oft eine gröſſere Laſt, als dieſem Werth gemäß wäre, betrieben werden muß, und daher die Flügel eine kleinere Umlaufsgeſchwindigkeit annehmen.

Setzt man $h = H$, ſo erhält man (§. 117. no. 6) für $\zeta = 60^\circ$

$$Q = \frac{\lambda}{r} . \frac{\lambda\beta G}{850} . \tfrac{1}{2} . \tfrac{3}{4} . (2H - \tfrac{1}{4}H)$$

$$= \frac{\lambda}{r} . \tfrac{21}{32} H . \frac{\lambda\beta . G}{850}$$

Für nicht ſehr groſſe Flügel ſey $\lambda\beta = 160$; $\frac{\lambda}{r} = 12$; $H = 4$, alles in Fuſſen, ſo iſt für ebene Flügel

$$Q = 12 . \tfrac{21}{32} . 4 . \frac{160 . G}{850} = 5,9 . G$$

und mit dieſem beträchtlichen Widerſtand könnten die Endpunkte der Flügel vermöge der Geſchwindigkeit $2\sqrt{gh} = 2\sqrt{gH}$ in einer Minute beinahe $4\frac{1}{2}$ mal herumlaufen. Oft iſt h vielmal gröſſer als H, zumal bei ſehr breiten Flügeln. In England macht man ſie bis zu 8 Fuß breit, und oft iſt dabei $h = 6 . H$ und noch gröſſer (vom Endpunkte der Flügeln verſtanden). Dann muß aber ζ nicht unter 70° betragen, welches bei gebogenen Flügeln von der erſten Sproſſe zu verſtehen iſt.

Anm. Man darf übrigens den Widerſtand, welchen eine mit der Geſchwind. C durch die Luft bewegte Fläche von der Luft leidet, nicht mit der Wirkung des Stoſſes für einerlei halten, den die Fläche bei ruhiger Lage von der Luft leidet, wenn ſich dieſe mit derſelben Geſchwindigkeit C gegen

gen die Fläche bewegt. Daher können die von Schober, Hutton, Prof. der Math. zu Wollwich, und von Smeaton angeſtellte Verſuche über Effekte der erſtern Art keineswegs zugleich als Verſuche über Effekte der letztern Art gebraucht werden, wenigſtens nicht in Bezug auf abſolute Beſtimmungen. Uebrigens mögen in beiden Fällen die Aenderungen der Effekte, die mit den Aenderungen einzelner Beſtimmungsſtücke zuſammenhängen, ſich ziemlich einerlei verhalten, und darum die in dieſer Rückſicht aus den Smeatonſchen Verſuchen ſich ergebenden Folgerungen auch auf unſere Windflügel anwendbar bleiben. Aber auch die aus dem bisherigen Vortrage ſich ergebenden Folgerungen ſtimmen mit der Erfahrung ſehr gut zuſammen.

In gegenwärtigen Anfangsgründen kann ich mich in keine umſtändlichere Unterſuchungen einlaſſen. Ich bemerke hier nur noch, daß in meinem Lehrb. der Hydraul. S. 298 u. f. f. durchaus 0,00154 ſtatt 0,00077 geſetzt werden muß.

Die Empfehlung horizontal laufender Windflügel wird weder durch Theorie noch durch die Erfahrung unterſtützt, daher ich ſolche hier gefliſſentlich ganz übergebe.

Hierher gehörige Schriften.

Beyer angef. Mühlenſchaupl.

Leupold Theatr. Machin. gen.

Limpergh Moole-Boek, Amſterd. 1690.

van Zyl, Groot allgemen Moolen-Boek, Amſterd. 1734.

Claußen, praktiſche Anweiſ. zum Mühlenbau, Leipz. 1792.

Capieux, Abbildung und Beſchreibung einer Windmaſchine, Leipz. 1797.

Geisler, Beſchreibung von Inſtrumenten und Kunſtwerken, 4ter Theil — enthält Smeatons Verſuche.

Transact. of the Roy. Soc. of Edinburg, 2. B. — enthält Huttons Verſuche.

Hamburgiſches Magazin, IX. B. enthält Schobers Verſuche.

Kunze,

Kunze, angef. Schauplatz I. B. — enthält gleichfalls Schobers Verſuche.

Karſten, angef. Lehrbegr. VI. Th.

Belidor, Archit. Hydr. III. B. 2. K.

Euler, Recherches plus exactes ſur les moulins à vent, in Hiſt. de l'Acad. de Pruſſe T. XII. 1756.

Derſelbe De conſtructione aptiſſima molarum alatarum — in Comment. nou. Petrop. T. IV.

Langsdorf angef. Lehrb. der Hydr.

Schmidt angeführte Anfangsgr. der Mathem. II. Th. 2te Abtheil.

Funfzehentes Kapitel.

Von den Waſſerſäulenmaſchinen.

Erklärung 35.

§. 119. Unter Waſſerſäulenmaſchinen werden hier überhaupt diejenigen Maſchinen verſtanden, deren angegriffener Theil durch den unmittelbaren Druck einer Waſſerſäule in Bewegung geſetzt wird.

Die Höllische, welche der Oberkunſtmeiſter Höll angegeben hat, wirkt durch den Schub; eine andere, die ich gleichfalls beſchreiben werde, wirkt durch Umlauf.

Erklärung 36.

§. 120. Von der Hölliſchen Waſſerſäulenmaſchine giebt (fig. 69) einen Begriff. Aus einem auf einer Anhöhe oder überhaupt an einer hoch genug liegenden Stelle angebrachten Waſſerbehältniß wird eine Röhrenleitung AB, die Fallröhre, herabgeleitet, die bei C verſchloſſen werden kann, wann das Spiel der Maſchine gehemmt werden ſoll, bei E aber mit einer Wendungspippe (einem groſſen Hahn) verſehen iſt, die während dem Spiel der Maſchine durch ſie ſelbſt abwechſelnd hin und her gedreht wird.

Auf der andern Seite dieſer Pippe iſt das umgebogene Kommunikationsſtück DF mit dem metallenen Cylinder FG verbunden, in welchem ein wohlpaſſender Kolben mit der daran befeſtigten Kolbenſtange auf und nieder ſpielen kann.

Die

Die verſchiedenen Wendungen der Pippe bei E haben die verſchiedenen abwechſelnden Wirkungen des Waſſers in der Fallröhre zur Folge, die aus den horizontalen Durchſchnitten der Pippe (fig. 71 und 72) und des ſie umgebenden Pippengehäuſes (fig. 70) leicht begriffen werden.

Hat nämlich der horizontale Durchſchnitt der Pippe im Pippengehäus die Lage fig. 71, ſo kann das Waſſer keinen andern Weg als den durch die Pippe in den Cylinder nehmen, wo es vermöge ſeines Drucks den Kolben mit ſeiner Stange zu ſteigen nöthigt und eine nach ab, alſo zugleich nach cd druckende Laſt nach den Richtungen ba und dc in Bewegung ſetzt. Wird nun nach vollendetem Kolbenhub die Pippe in die Lage (fig. 72) gebracht, ſo wird die Kommunikation des Cylinders mit der Fallröhre aufgehoben; dagegen ſteht jetzt dem Waſſer zur Linken der Pippe der Ausgang in die freie Luft offen, die Laſt alſo, welche nach ab druckt, und daher nach cd ſchiebt, druckt die Kolbenſtange mit dem Kolben im Cylinder nieder und das Waſſer unter dem Kolben ſtröhmt durch α in die freie Luft.

Wie nun die Wendungen der Pippe wiederhohlt werden, dauert jenes abwechſelnde Spiel des Kolbens fort.

Erklärung 37.

§. 121. Diejenige Einrichtung einer Maſchine, vermöge der ſie den Einfluß der Kraft auf die Bewegung periodiſch aufhebt und ſelbſt wieder herſtellt, heißt die Steuerung der Maſchine.

Dieſe hat Höll durch ein Fallklotz vw bewirkt, welches bald rechts bald links niederfällt und dadurch

die Welle, in die es befeſtigt iſt, bald nach der Rechten bald nach der Linken herumdreht, wodurch dann zugleich die Drehſtange und mit ihr die Pippe gleichfalls abwechſelnd nach entgegengeſetzten Richtungen gedreht wird, ſo daß die iedesmalige Wendung der Pippe einen Quadranten beträgt.

Es muß hierbei auf folgenden Umſtand Rückſicht genommen werden.

Die Umdrehungen der Pippe dürfen nicht allmälig geſchehen, ſondern ſie müſſen ſo ſchnell als möglich mit einem raſchen Zug erfolgen.

Wenn daher das Fallklotz vw von der Linken wieder zu ſteigen und ſich nach der Rechten zu bewegen anfängt, ſo muß die an die Stange yz befeſtigte Zugkette zr, die ſich nun wieder um die Welle windet, nicht in einem angeſpannten Zuſtande ſeyn; ſie muß noch ungeſpannt in einem Bogen herabhängen und die Spannung muß erſt erfolgen, wann das Fallklotz wv ſchon über die lothrechte Stellung hinaus, alſo zur Rechten ſchon ins Fallen gekommen iſt und durch das Fallen zur Rechten ſchon eine beträchtliche Geſchwindigkeit erlangt hat, damit nunmehr, ſobald die Spannung der Kette zr erfolgt, die Pippe durch den raſchen Zug der Stange yz plötzlich ihre neue Stellung erhalte.

Daſſelbe gilt von der Kette us, die ſich nach der entgegengeſetzten Seite um die Welle aufwindet.

Die Bewegung des Fallklotzes geſchieht durch die mit der Kolbenſtange verbundene Stange de, die bei e in einen Hebelarm ef eingreift, der bei f in eine Welle befeſtigt iſt. Durch eben dieſe Welle iſt noch eine andere Stange gh durchgeſteckt, die ſich mit der Welle zugleich dreht, und, wie die Figur zeigt, die

Fall-

Fallklotzwelle mittelſt Ketten bald rechts bald links herumdreht, ſo daß mit dem Auf- und Niedergang der Kolbenſtange die erfoderlichen Umdrehungen der Pippe pünktlich und raſch vollzogen werden.

Den Wagbaum XY mit dem Gewichtskaſten Z hatte Höll bei ſeiner Maſchine darum angebracht, weil bei ihr der Druck der Laſt nach cd bei weitem größſer war, als ſie zur Bewirkung eines hinlänglich geſchwinden Niedergangs des Kolbens ſeyn mußte, daher er die Erhebung des Kolbens durch dieſen Gewichtskaſten beträchtlich erleichterte und die Laſt doch noch groß genug bliebe, nach iedesmaligem Hub den Kolben wieder ſchnelle genug niederzutreiben.

Erfahrung.

§. 122. Bei einer von Höll in Schemnitz angelegten Waſſerſäulenmaſchine von vorbeſchiebener Art iſt

Höhe der Fallröhre . . .	44 Klafter
die Klafter zu 6, 23 Par. Fuß	
Ihr Durchmeſſer	6 Zolle
Höhe des Cylindes	8 Fuß
Sein Durchmeſſer	13 Zolle
Höhe des Kolbenhubs . . .	6 Fuß
Höhe, auf welche die Grubenwaſſer mittelſt über einander ſtehender Pumpen gehoben werden	46 Klafter
Durchmeſſer der Pumpenſtiefel	$8\frac{1}{2}$ Zoll
Zeit des Niedergangs im Cylinder	$3\frac{1}{2}$ Sek.
Zeit des Aufgangs oder Hubs .	$5\frac{1}{2}$ Sek.
In 24 Stunden hebt die Maſchine, vollen Hub angenommen	18144 Eimer zu 90 ℔
Die Menge des Aufſchlagewaſſers in 24 Stunden . .	42336 Eimer.

Zuſ.

§. 123. Das Produkt aus der erhobenen Waſſermenge 18144 (bei vollem Hube) in die Höhe von 46 Klafter iſt

834624

Das Produkt aus der Menge des Aufſchlagewaſſers 42336 in die Fallhöhe 44 iſt

1862784

Weil man aber in der Ausübung nie vollen Hub bei den Pumpen annehmen kann, ſondern etwa nur 0,8 des vollen Hubes, ſo kann man

667700 ſtatt 834624

ſchreiben.

Demnach wäre bei dieſer Maſchine der Nutzeffekt zum größtmöglichen Totaleffekt

wie 6677 zu 18627

oder der Nutzeffekt beträgt $\frac{35}{100}$ vom größtmöglichen Totaleffekt.

Heißt alſo die Menge des Aufſchlagewaſſers, welches für iede Sekunde benutzt werden kann, A, die Fallhöhe H; und ſoll nun durch eine ähnliche Waſſerſäulenmaſchine in ieder Sek. die Waſſermenge M auf die Höhe h mittelſt Pumpen erhoben werden, ſo kann man

$$M \cdot h = 0{,}35 \cdot AH$$

ſetzen. Daraus giebt ſich

$$A = \frac{M \cdot h}{0{,}35 \cdot H}$$

und

$$M = \frac{0{,}35 \cdot AH}{h}$$

wo-

woferne die Pumpen nur nicht über ein paar hundert Fuſſe von dem Cylinder der Maſchine entfernt ſind.

Anm. Der Effekt, den eine ſolche Waſſerſäulenmaſchine erreichen kann, hängt zugleich von dem Verhältniß der Weite der Fallröhre zur Weite des Stiefels, von der Gröſſe der Laſt, die man dem Druck der Waſſerſäule entgegenſetzt, und von der Summe der gehörig reducirten Gröſſen der in Bewegung geſetzten Maſſen ab.

Daher iſt der Ausdruck

$$M . h = 0,35 . AH$$

keinesweges als eine allgemeine Formel für alle Maſchinen dieſer Art anzuſehen, und eben darum ſind die Kenntniſſe bloſſer Empiriker, die nur von den ihnen in der Erfahrung vorgekommenen Fällen hergenommen ſind, ſoſehr eingeſchränkt. Wenn es daher auch nicht ſchon für den Verſtand befriedigender wäre, die Gründe genauer zu kennen, worauf der Effekt einer ſolchen Maſchine beruht, ſo müßte man doch um der Ausübung ſelbſt willen mit der Theorie näher bekannt ſeyn.

Aufg. 32.

§. 124. Es ſey

die Höhe über dem tiefſten Kolbenſtand H
die Länge der Fallröhre - - - λ
der Durchmeſſer der Fallröhren - d
die zugehörige Kreisfläche - - - w
der Durchmeſſer des Cylinders - D
die zugehörige Kreisfläche - - - W
die Höhe des Kolbenhubs im Cylinder b
die Geſchwindigkeit, welche der Kolben in jeder Höhe x über ſeiner tiefſten Stelle im Steigen erlangt hat - c
die zugehörige Höhe - - - - h

die Reibung des Kolbens im Cylinder F
durch Pfunde ausgedruckt

die Laſt, welche auf den Kolben im Cylinder druckt, wenn der Wagbalken mit dem Gewichtskaſten bei Seite ſetzt würde - - - - - - Q
gleichfalls in Pfunden

die Kraft, welche gegen des Kolbens Grundfläche druckt, in ℔ - - - P

das Gewicht von 1 Kub. Fuß Waſſer in Pfunden . . . . 𝔊

die Länge des Wagbalkens 𝔛Y . 𝔏

die Länge des Arms ζ𝔛 - - - - α

die von ζ𝔶 bis zur Mitte des Gewichtskaſtens - - - - - - β

das Gewicht des Arms ζ𝔛 mit dem Krümmling bei 𝔛 - - - - 𝔛

das des Arms ζY ohne den Gewichtskaſten - - - - - Y

das des Gewichtskaſtens ſamt der Ladung Z

Und alle Maaſe ſeyen in Fuſſen ausgedruckt: man ſoll angeben, wie dieſe Beſtimmungsſtücke von einander abhängen.

Aufl. 1. Im Stande der Ruhe iſt die Kraft, welche gegen des Kolbens Grundfläche druckt, = H . W . 𝔊.

Die Kraft, mit welcher der Gewichtskaſten den Kolben aufwärts zieht, will ich in Pfunden = 𝔎 ſetzen; ſo iſt im Stande der Ruhe die auf die Erhebung des Kolbens in ſeiner tiefſten Stelle wirkende bewegende Kraft = H . W . 𝔊 + 𝔎.

Der

Der Widerſtand iſt im Stande der Ruhe = $Q + F$, alſo für den Stand der Ruhe die noch übrige auf die Erhebung des Kolbens wirklich verwendete Kraft

$$= H . W . \mathfrak{G} + \mathfrak{K} - (Q + F)$$

2. Sobald aber der Kolben wirklich erhoben wird, kommt noch ein doppelter Widerſtand hinzu. Iſt er nämlich auf die Höhe x über ſeine tiefſte Stelle geſtiegen, und hat in dieſem Augenblick das Waſſer in der Fallröhre eine Geſchwindigkeit, die der Höhe h zugehört, ſo leidet das Waſſer wegen der Röhren einen Widerſtand (Hydraul. §. 35)

$$= (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) . h . W . \mathfrak{G}$$

und hierzu kommt die ietzt weiter entgegen wirkende Waſſerſäule = $W . x . \mathfrak{G}$, alſo iſt im Falle der Bewegung die auf die Bewegung des Kolbens wirkende bewegende Kraft =

$$H . W . \mathfrak{G} + \mathfrak{K} - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) . h . W . \mathfrak{G} - Q - F - W . x . \mathfrak{G}$$

wo h ſelbſt eine veränderliche Gröſſe iſt.

3. Die Waſſermaſſe, welche durch dieſe bewegende Kraft in Bewegung geſetzt wird, iſt die in der Fallröhre und die im Cylinder ſchon bis zur Höhe x erhobene

$$= (\lambda . w + x . W) . \mathfrak{G}$$

wofür aber hier nach (Hydraul. §. 35)

$$\left(\frac{W^2}{w^2} . \lambda w + x . W\right) . \mathfrak{G}$$

oder

$$\left(\frac{W}{w} . \lambda + x\right) . W\mathfrak{G}$$

geſetzt werden muß.

 4. Die

4. Die zugleich mit in Bewegung zu ſetzende Maſſe des Wagbalkens mit dem Krümmling bei $\mathfrak{X}$ und dem Gewichtskaſten bei η wird hier genau genug durch

$$\tfrac{2}{3}\alpha^2 . \mathfrak{X} + \tfrac{1}{3}(\mathfrak{L} - \alpha)^2 . \mathrm{Y} + \beta^2 . \mathrm{Z}$$

(Dyn. §. 104) ausgedruckt, wofür ich $\mathfrak{N}$ ſetzen will.

5. Die geſammte Maſſe, welche zugleich mit der Stange dc in Bewegung geſetzt wird, will ich nach der in Bezug auf die Geſchwindigkeit dieſer Stange vorgenommenen Reduktion in Pfunden = $\mathfrak{M}$ ſetzen.

6. Bezeichnet nun p die beſchleunigende Kraft, vermöge der das Waſſer im Cylinder in Bewegung geſetzt wird, ſo hat man (no. 2, 3, 4 u. 5) p =

$$\frac{\mathrm{H.W.}\mathfrak{G} + \mathfrak{K} - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) . \mathrm{W.}\mathfrak{G}.\mathrm{h} - \mathrm{Q} - \mathrm{F} - \mathrm{W.}\mathfrak{G}.\mathrm{x}}{\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{w}} . \lambda . \mathrm{W} . \mathfrak{G} + \mathrm{W}\mathfrak{G} . \mathrm{x} + \mathfrak{M} + \mathfrak{N}}$$

7. Die zur Geſchwindigkeit des Waſſers im Cylinder gehörige Höhe iſt $\frac{w^2}{W^2}.h$, alſo (Dyn. §. 90)

$$d\,\frac{w^2}{W^2}h : dx = p : 1$$

und

$$p = \frac{\frac{w^2}{W^2}.dh}{dx}$$

dero

$$dh = \frac{W^2}{w^2}.p\,dx$$

8. Da-

8. Daher (no. 6)

$$dh = \frac{\frac{W^2}{w^2}.\left(HW\mathfrak{G} + \mathfrak{K} - (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).W.\mathfrak{G}.h - Q - F - W\mathfrak{G}x\right).dx}{\frac{W}{w}.\lambda W\mathfrak{G} + \mathfrak{M} + \mathfrak{N}}$$

Weil nämlich die Gröſſe $W\mathfrak{G}x$ in Vergleichung mit den übrigen Gröſſen des Nenners für Null geachtet werden kann, ſo darf man dieſe Gröſſe im Nenner (no. 6) weglaſſen.

Der Kürze wegen ſetze ich $\frac{W}{w}.\lambda W\mathfrak{G} + \mathfrak{M} + \mathfrak{N} = a$; ſo läßt ſich die vorſtehende Differentialformel auch ſo ausdrucken:

$$\frac{w^2}{W^2}.adh = \left(HW\mathfrak{G} + \mathfrak{K} - (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).W\mathfrak{G}h - Q - F - W\mathfrak{G}x\right).dx$$

oder

$$\frac{w^2}{W^2}.adh = \left(H + \frac{\mathfrak{K} - Q - F}{W\mathfrak{G}} - (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).h - x\right).dx$$

9. Setzt

9. Setzt man nun $H + \frac{\mathfrak{K} - Q - F}{W\mathfrak{G}} - x = z$, alſo $dx = -dz$, ſo wird

$$\frac{w^2}{W^2} . adh = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) . hdz - zdz$$

Vergleicht man dieſe Formel mit der in meinen Anfangsgr. der reinen Mathem. (S. 447. XXXIX), ſo iſt

dort	a	y	p	b	n	q	x
hier	$\frac{w^2}{W^2} . a$	h	$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$	-1	o	z	z

alſo (a. a. O. no. 7)

$$\text{Conſt} - \frac{\frac{w^2}{W^2} . a . e^{-\int \frac{W^2 . (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})}{w^2 . a} . dz}}{-(h-1)} = -\int e^{-\int \frac{W^2 . (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})}{w^2 . a} . dz} . zdz$$

Oder

Oder

$$\text{Const} + \frac{w^2}{W^2}\cdot ah\cdot e^{-\int \frac{W^2\cdot(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}{w^2\cdot a}dz} = -\int e^{-\int \frac{W^2\cdot(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}{w^2\cdot a}\cdot dz}\cdot zdz$$

Alſo

$$\text{Const} + \frac{w^2 ah}{W^2\cdot e^{\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\cdot W^2}{a\cdot w^2}\cdot z}} = -\int e^{-\frac{W^2\cdot(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}{a w^2}\cdot z}\cdot zdz$$

10. Vergleicht man hier die Gröſſe zur Rechten mit dem Ausdruck (Reine Math. S. 443. XXXVIII), ſo iſt

dort	e	m	x	ε
hier	e	$-\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\cdot W^2}{a w^2}$	z	1

alſo

alſo $\int e^{-\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).W^2}{a\,w^2}.z}.z\,dz = e^{-\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\,W^2}{a\,w^2}.z}.\left(\frac{a\,w^2.z}{-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).W^2}-\frac{a^2.w^4}{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})^2.W^4}\right)$

$$= -\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).a.W^2\,w^2.z+a^2.w^4}{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})^2.W^4.e^{\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\,W^2}{a\,w^2}.z}}$$

11. Man hat alſo nunmehr (no. 10)

$$\text{Conſt}+\frac{w\,a\,h}{W^2.e^{\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).W^2}{a\,w^2}.z}} = \frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).a.W^2.w^2.z+a^2.w^4}{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})^2.W^4.e^{\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).W^2}{a\,w^2}.z}}$$

12. Nun iſt hier für $x=0$, alſo (no. 9) für $z = H+\frac{\mathfrak{K}-Q-F}{W\,\mathfrak{G}}$, auch $h=0$, alſo

$$\text{Conſt} = \frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).a.W^2.w^2.\left(H+\frac{\mathfrak{K}-Q-F}{W\,\mathfrak{G}}\right)+a^2\,w^4}{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})^2.W^4.e^{\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).W^2}{a\,w^2}.\left(\frac{\mathfrak{K}-Q-F}{W\,\mathfrak{G}}+H\right)}}$$

Schreibt

Schreibt man alſo zur Abkürzung $\mathfrak{H}$ ſtatt $H + \frac{\mathfrak{K} - Q - F}{W\mathfrak{G}}$, ſo hat man (no. 11)

$$\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).a.W^2 w^2.z + a^2 w^4}{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})^2.W^4.e^{\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).W^2}{aw^2}.z}} = \frac{aw^2 h}{W^2.e^{\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).W^2}{aw^2}.z}} + \frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).a.W^2.w^2.\mathfrak{H} + a^2 w^4}{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})^2.W^4.e^{\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})W^2}{aw^2}.\mathfrak{H}}}$$

oder, $\mathfrak{H} - x$ ſtatt z geſetzt,

$$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).W^2.(\mathfrak{H}-x) + aw^2 = (\mathfrak{A}+\mathfrak{B})^2 W^2.h + \frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).W^2.\mathfrak{H} + aw^2}{e^{\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).W^2.x}{aw^2}}}$$

und

und

$$h = \frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).W^2.(\mathfrak{H}-x)+aw^2 - \dfrac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).W^2.\mathfrak{H}+aw^2}{e^{\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).W^2.x}{aw^2}}}}{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})^2.W^2}$$

Aufg. 33.

§. 125. Die Zeit, welche der Kolben braucht, um von ſeiner tiefſten Stelle bis zur höchſten zu ſteigen, alſo auf die Höhe b erhoben zu werden, ſey in Sekunden = t; die übrigen Beſtimmungsſtücke ſollen wie vorhin bezeichnet werden: man ſucht eine Gleichung zwiſchen t und den übrigen Gröſſen.

Aufl. I. Man kann aus der letzten Formel des vor. §. für mehrere Werthe von x, z. B. für $x = \frac{1}{4}b$, $x = \frac{1}{2}b$, $x = \frac{3}{4}b$ und für $x = b$ die Werthe von h und die zugehörigen von $2\sqrt{gh}$ ſuchen, die ich z. B. durch v', v'', v''', v'''' ausdrucken will, da

dann

dann die mittlere Geſchwindigkeit des Kolbens genau genug $= \frac{v' + v'' + v''' + v''''}{4}$ gefunden würde. Hieraus gäbe ſich dann weiter

$$t = \frac{4b}{v' + v'' + v''' + v''''}.$$

II. Kürzer aber verfährt man ſo. Nach (vor. §. no. 6. und 8) iſt die beſchleunigende Kraft p =

$$\frac{HW\mathfrak{G} + \mathfrak{K} - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}).W\mathfrak{G}h - Q - F - W\mathfrak{G}x}{a}$$

Weil nun der von den Röhren herrührende Widerſtand $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}).W\mathfrak{G}h$ ohnehin nur beiläufig beſtimmt werden kann, ſo ſehe man die Sache ſo an, als wirkte dieſer Widerſtand während dem ganzen Hub nach dem Werth, welchen die mittlere Geſchwindigkeit für ihn giebt. Da nun dieſe $= \frac{b}{t}$ iſt, ſo ſetze man

$\frac{(\frac{b}{t})^2}{4g}$ oder $\frac{b^2}{4t^2g}$ ſtatt h.

Ueberdas kann man hier, wo b in Vergleichung mit H ohnehin allemal kleiner iſt, den mittleren Werth $W\mathfrak{G}.\frac{1}{2}b$ ſtatt $W\mathfrak{G}x$ ſetzen.

So wird p =

$$\frac{(H - \frac{1}{2}b - (\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}).b^2}{4t^2g}).W\mathfrak{G} + \mathfrak{K} - Q - F}{a}$$

und $t^2 = \frac{b}{pg} =$

$$\frac{ab}{\left((H - \frac{1}{2}b - \frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).b^2}{4t^2g}).W\mathfrak{G} + \mathfrak{K} - Q - F\right).g}$$

Alſo ab =

$$\left((H - \tfrac{1}{2}b).W\mathfrak{G} + \mathfrak{K} - Q - F\right).gt^2 - \frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).b^2W\mathfrak{G}}{4}$$

und nun

$$t = \surd\left(\frac{ab + \frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).b^2W\mathfrak{G}}{4}}{[(H - \frac{1}{2}b).W\mathfrak{G} + \mathfrak{K} - Q - F].g}\right)$$

Auch hat man

$$Q = (H - \tfrac{1}{2}b).W\mathfrak{G} + \mathfrak{K} - F - \frac{ab}{t^2g} - \frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).b^2W\mathfrak{G}}{4t^2g}$$

wo dann a =

$$\frac{W}{w}\lambda W\mathfrak{G} + \mathfrak{M} + \tfrac{2}{3}\alpha^2\mathfrak{X} + \tfrac{1}{3}(\mathfrak{l} - \alpha)^2 Y + \beta^2 Z$$

iſt.

Und weil (§. 122) $P = (H - \frac{1}{2}b).W\mathfrak{G}$ iſt, ſo hat man überdas

$$P = Q - \mathfrak{K} + F + \frac{4ab + (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).b^2W\mathfrak{G}}{4t^2g}$$

für die Kraft, welche gegen des Kolbens Grundfläche drucken muß, um ihn in der Zeit t durch den Raum b zu erheben.

Die hierzu erfoderliche Waſſermenge, welche durch die Maſchine konſumirt wird, iſt für die Zeit des Hubs $= b.W$; und da während der Zeit des Niedergangs, die ich τ nennen will, die Fallröhre verſchloſſen bleibt, ſo bedarf die Maſchine in der Zeit $t + \tau$ überhaupt nur die Waſſermenge $b.W$, alſo in jeder Sekunde die Waſſermenge $\frac{bW}{t+\tau}$.

Zuſ. 1.

§. 126. Dieſe Waſſerſäulenmaſchine bedarf alſo einer beſtändigen Ueberwucht, die in den vorigen Kapiteln allemal durch V ausgedruckt wurde und die hier $= \frac{4ab + (\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\, b^2 W \mathfrak{G}}{4t^2 g}$ iſt.

Setzt man die zu einem Hube erfoderliche Waſſermenge $= M$, ſo iſt $M = b.W$, und

$$P = Q - \mathfrak{K} + F + \frac{4ab + (\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\, bM\mathfrak{G}}{4t^2 g}$$

Heißt die bei Erhebung des Kolbens in 1 Sek. zufließende Waſſermenge A, ſo iſt $A = \frac{M}{t}$, alſo

$$P = Q - \mathfrak{K} + F + \frac{4a.\frac{b}{t} + (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).\, bA\mathfrak{G}}{4tg}$$

Zuſ. 2.

§. 127. Heißt in Kub. Fuſſen die Waſſermenge, welche zur Betreibung der Maſchine überhaupt für

iede Sekunde in Anſchlag kommen muß, B; ſo hat man $B = \frac{bW}{t+\tau}$, alſo $bW = (t+\tau).B$. Daher

$$Q = P + \mathfrak{K} - F - \frac{4ab + (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).b.(t+\tau)B.\mathfrak{S}}{4t^2g}$$

Hieraus laſſen ſich leicht die Umſtände ableiten, von welchen die Vollkommenheit der ganzen Einrichtung abhängt.

Beſonders muß a, ingleichen $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ klein genug genommen werden. Um aber a klein zu machen, muß man auch $\beta^2.Z$ klein nehmen, ohne daß dadurch das ſtatiſche Moment $\beta.Z$ verändert wird; ſoll nämlich dieſes Moment $=\mathfrak{E}$ ſeyn, ſo iſt $Z = \frac{\mathfrak{E}}{\beta}$, und $\beta^2.Z = \beta.\mathfrak{E}$ deſto kleiner, ie kleiner man β nimmt. Daher die Regel:

> Je näher der Gewichtskaſten an die Axe des Wagbaums gerückt wird, ohne ſein ſtatiſches Moment zu ändern, deſto vollkommener iſt die Einrichtung.

Auſſerdem wird der Werth von a deſto kleiner, ie kleiner $\frac{W}{w}\lambda W\mathfrak{S}$ genommen wird, alſo:

> Je gröſſer bei einer beſtimmten Weite des Cylinders die Weite w der Fallröhre und ie kleiner ihre Länge λ bei einer beſtimmten Höhe H genommen wird, deſto vollkommener iſt die Einrichtung.

Die zweite Regel iſt um ſo viel wichtiger, weil dadurch auch zugleich der Werth von $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ vermindert wird.

Anm-

Anm. Man ſieht hieraus, daß die Unterbrechung der Bewegung des Waſſers in der Fallröhre für die Wirkung der Maſchine ſehr nachtheilich werden könne. Auch fällt in die Augen, daß die Maſſe des Wagbalkens mit dem Gewichtskaſten der Maſchine läſtig iſt. Daher würde eine ſolche Einrichtung der Maſchine wie (fig. 73) ihren Effekt merklich vergrößern.

Hier iſt A die Fallröhre, B ein Windkeſſel (ein weites metallenes Behältniß, worin ſich verſchloſſene Luft befindet, die durch den Druck des Waſſers in den kleineren Raum abcd zuſammengepreßt wird), der durch 2 Röhren mit dem Pippengehäuſe F kommunicirt, deſſen Pippe durch eine horizontale Schiedwand mn in zwei Theile getheilt iſt. Ebendieſes Pippengehäus kommunicirt auf der andern Seite gleichfalls mittelſt 2 Röhren mit einem Behältniſſe D, das wiederum durch eine horizontale Schiedwand $\alpha\beta$ in zwei Theile getheilt iſt, wovon der obere mit dem Raum im Cylinder oberhalb dem Kolben, und der untere mit dem Raum im Cylinder unterhalb dem Kolben kommunicirt.

Der Cylinder hat oben einen mit Hanf oder Tuch ausgefüllten Aufſatz mit einem Deckel, durch welche die cylindriſche Kolbenſtange durchgeht.

Wenn des Windkeſſels Durchmeſſer doppelt ſo groß als der des Cylinders iſt, ſo behält die darin verſperrte Luft eine beinahe unveränderliche Federkraft, und das Waſſer ſetzt in dem Augenblick der Umdrehung der Pippe ſeine Bewegung fort, indem es in den Windkeſſel ſtröhmt.

Bei dieſer Einrichtung iſt kein Wagbalken nöthig, und weil die Waſſermaſſe, deren reducirter Werth $= \frac{W}{w} \lambda W \mathfrak{G}$ iſt, hierbei in beſtändiger Bewegung bleibt, ſo wird (§. 125)

$$a = \mathfrak{M}$$

und man kann nun

$$P = Q + F + \frac{4 a \mathfrak{M} + (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) . b^2 W \mathfrak{S}}{4 t^2 g}$$

ſetzen.

Iſt für den Niedergang des Kolbens die Laſt $= Q'$, die Kraft $= P'$, die Zeit des Niedergangs $= \tau$, ſo wird

$$P' = Q' + F + \frac{4 a \mathfrak{M} + (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) . b^2 W \mathfrak{S}}{4 \tau^2 g}$$

Am beſten macht man $Q' = Q$, daher auch $\tau = t$, und es gehört alſo in dieſem Falle zur beſtändigen Betreibung der Maſchine eine Kraft

$$P = Q + F + \frac{4 a \mathfrak{M} + (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) . b^2 . W . \mathfrak{S}}{T^2 . g}$$

wenn T die Zeit eines ganzen Kolbenſpiels bedeutet.

Demnach auch

$$Q = P - F - \frac{4 a \mathfrak{M} + (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) . b^2 W \mathfrak{S}}{T^2 . g}$$

oder, wenn B die in ieder Sekunde erfoderliche Waſſermenge bezeichnet, alſo $\frac{2 b W}{B}$ ſtatt T geſetzt wird,

$$Q = P - F - \frac{4 a \mathfrak{M} B^2 + (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) . b^2 . B^2 W \mathfrak{S}}{4 b^2 W^2 . g}$$

und der Effekt $Q . \frac{2 b}{T} = Q . \frac{B}{W} =$

$$(P - F) . \frac{B}{W} - \frac{4 a \mathfrak{M} . B^3 + (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) . b^2 B^3 W \mathfrak{S}}{4 b^2 W^3 . g} \quad (\mathfrak{C}$$

der alſo deſto gröſſer iſt, ie gröſſer der Kolbenhub b genommen wird.

Subſtituirt man hingegen $\frac{BT}{2W}$ ſtatt b in ($\mathfrak{C}$), ſo giebt ſich der Effekt =

$$(P-F) \cdot \frac{B}{W} - \frac{4a\mathfrak{M} \cdot B^3 + (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) \cdot \frac{B^5 T^2}{4W} \cdot \mathfrak{G}}{B^2 T^2 \cdot g}$$

der alſo unter ſonſt gleichen Umſtänden deſto gröſſer wird, ie gröſſer man T nimmt.

Erklärung 36.

§. 128. Zu den Waſſerſäulenmaſchinen zähle ich hier den Heronsbrunnen, wegen der Anwendung, die man im Groſſen davon gemacht hat. Fig. 73* ſtellt ſolchen vor.

B iſt ein durchaus verſchloſſenes Behältniß mit einer Oeffnung und einem kurzen Röhrchen bei k, um es mit Waſſer füllen und dann wieder luftdicht verſtopfen zu können. Der Deckel iſt ringsum wie eine Schüſſel mit einem Rand verſehen, ſo daß abcd ein Becken bildet.

C iſt ein anderes unter dem B angebrachtes gleichfalls durchaus verſchloſſenes Behältniß, das mit dem Becken abcd durch die von dieſem Deckel herab bis an den Boden HJ geleitete Röhre E verbunden iſt.

D iſt eine vom unteren Deckel bis nahe an den oberen wie die vorige durch den Boden des oberen Behältniſſes durchgeführte Röhre.

F iſt eine über den Deckel des oberen Behältniſſes hervorragende und bis nahe an den Boden herabreichende Röhre, die oben mit einer dünnen

Platte verſchloſſen iſt, in der ſich eine kleine Oeffnung befindet.

Man fülle nun das obere Behältniß bei k mit Waſſer an, etwa bis mn, wozu ein bei m angebrachtes Seitenröhrchen dienen kann, das nebſt der Oeffnung k nach der Anfüllung wieder verſchloſſen wird; hierauf laſſe man ſolange Waſſer in die Röhre E einlaufen, bis dieſe Röhre oben überlauft, da dann in das Becken ſelbſt noch etwas Waſſer nachgegoſſen werden kann.

Während dieſen Füllungen kann die kleine Oeffnung in der Platte bei F verſtopft oder nur mit einem Finger zugehalten werden.

Sobald man nun das Zäpfchen oder den Finger von der Oeffnung bei F wegnimmt, ſpringt ein Strahl aus dem Röhrchen F deſto höher, ie höher die Waſſerſäule E iſt. Das Springen des Strahls dauert ſo lange fort, bis alles Waſſer, das im obern Behältniſſe von mn bis zu unteren Oeffnung der Röhre F liegt, herausgeſprungen iſt, woferne nur dafür geſorgt wird, daß das Becken das vom Strahl herabfallende Waſſer gehörig auffängt, damit die Röhre E beſtändig gefüllt bleibe.

Man ſieht gleich ein, daß die durch den Druck der Waſſerſäule in E zuſammengepreßte Luft dieſe Preſſung auf die Oberfläche des Waſſers in mn fortpflanzt und ſo das Waſſer des oberen Behältniſſes in die Röhre F preßt.

Anm. Dieſes bekannte Spielwerk verdient hier wenigſtens darum erwähnt zu werden, weil Höll darauf ſeine Luftmaſchine im Groſſen gegründet hat, die hier näher geprüft werden ſoll. Da die Waſſerſäule hierbei wie bei

der

der vorigen Maſchine die Gröſſe der bewegenden Kraft beſtimmt und die Luft dabei nichts weiter thut, als daß ſie den Druck der Waſſerſäule fortpflanzt, ſo ſcheint mir iene Benennung unſchicklich. Ich nenne ſie lieber nach ihren beiden Urhebern die Höllische Heronsmaſchine.

Erklärung 37.

§. 129. Bei der Hölliſchen Heronsmaſchine, welche dienen ſoll, Waſſer bei H (fig 74) bis zu einer gewiſſen Höhe G zu erheben, werden gleichfalls zwei Behältniſſe C, B mit einander verbunden. Dazu dienen hier

die Fallröhre E
Luftröhre D
Steigröhre F

Letztere hat bei h ein Ventil (einen ſich nach oben öffnenden Deckel oder ſich öffnendes Thürchen).

Das Waſſer aus H wird in B geleitet und nach iedesmaliger Anfüllung der Hahn bei a verſchloſſen.

Die Hahnen bei b und c werden durch Schlüſſel herumgedreht, die durch eine Kette mit einander verbunden ſind.

Die Hahnen bei d und e dienen, der Luft, ſo oft es nöthig iſt, einen Ausgang zu verſchaffen.

Angebliche Erfahrung.

§. 130. Bei einer von Höll in Schemnitz erbauten Maſchine dieſer Art hatte man angeblich folgende Beſtimmungen:

Höhe des Behältniſſes C	. .	60 Zolle
Durchmeſſer — — —	. .	50

Höhe des Behältniſſes B	. .	60 Zolle
Durchmeſſer — — —	. .	32
Der Durchmeſſer der Luftröhre		
oben	. . . . .	2
unten, allmälig zulaufend	.	1
Durchmeſſer der Fallröhre	. .	6
— — — Steigröhre	.	$3\frac{1}{2}$
Die Metalldicke der Keſſel	. .	$1\frac{1}{2}$
ihre Bodendicke	. .	$2\frac{1}{2}$

Die Maſchine hatte wegen des verſchiedenen Zufluſſes zwei verſchiedene Fallhöhen

Fallhöhe I. 40 Klafter

— — II. 22 ——

	Höhe der Steigröhre	Menge des Aufſchlagewaſſers in 24 St.	Erhobene Waſſermenge in 24 St.
I.	16 Klafter	20736 Eimer	10944 Eimer
II.	16 ——	17280 —	9120 —

Es iſt alſo

für I. das Produkt aus der Fallhöhe in die Menge des Aufſchlagewaſſers

$$40 . 20736 = 829440$$

Das Produkt aus der erhobenen Waſſermenge in die Höhe

$$16 , 10944 = 175104$$

alſo verhält ſich der Nutzeffekt zum größtmöglichen Totaleffekt wie 175104 zu 829440 oder wie 1 zu 4,7

für II. das Produkt aus der Fallhöhe in die Menge des Aufſchlagwaſſers

$$22 . 17280 = 380160$$

Das

Das Produkt aus der erhobenen Waſſermenge in die Höhe

16 . 9120 = 145920

alſo der Nutzeffekt zum größtmöglichen Totaleffekt = 145920 zu 380160 oder wie 1 zu 2,6

Demnach hätte die no. I. beträchtlich weniger als die Maſchine (§. 123) geleiſtet, hingegen die no. II. etwas mehr als die (§. 123). Wie wenig ſich aber auf ſolche angebliche Beobachtungen zu verlaſſen ſey, wird die nachfolgende Theorie ergeben, aus welcher die Unmöglichkeit dieſer Effekte offenbar erhellet, indem beſonders die II. bei weitem weniger leiſten mußte, als hier angegeben wird. Dieſes wird dann zugleich von dem Nutzen theoretiſcher Unterſuchungen zeugen.

Aufg. 34.

§. 131. Eine Gleichung zwiſchen den bei der Hölliſchen Heronsmaſchine vorkommenden Beſtimmungsſtücken zu finden (fig. 74).

Aufl. 1. Es ſey

die Fallhöhe, von A herab bis etwa zur Mitte des Behältniſſes C, lothrecht gemeſſen	H
die ganze Länge der Fallröhre	λ
der Durchmeſſer der Fallröhre . . .	d
die zugehörige Kreisfläche	w
der Durchmeſſer des cylindriſchen Behältniſſes C	D
die zugehörige Kreisfläche	W

die

die Höhe xy des Waſſers im Behältniſſe B über der unteren Oeffnung y nach gehöriger Anfüllung, alſo am Anfange der Bewegung . . . . . b

der Durchmeſſer des Behältniſſes B . $\mathfrak{D}$

die zugehörige Kreisfläche . . $\mathfrak{W}$

Am Anfange ſtehe die Oberfläche rs des Waſſers im Behältniſſe C bei n, am Ende des iedesmaligen Ausguſſes, d. h. ſo oft die ganze zwiſchen x und y im Behältniſſe B befindliche Waſſermenge bei G ausgegoſſen worden, ſtehe die Oberfläche des Waſſers in C bei m, und die Höhe mn ſey . . $\mathfrak{b}$

Die ganze Höhe der Steigröhre Xy . q

ihre Länge . . . . . $\mathfrak{l}$

der Durchmeſſer der Steigröhre . . $\mathfrak{d}$

die zugehörige Kreisfläche . . $\mathfrak{w}$

das Gewicht von 1 Kub. Fuß Waſſer in Pfunden . . . . $\mathfrak{G}$

ſo hat man

$$b \,.\, \mathfrak{W} = \mathfrak{b} \,.\, W$$

oder

$$\mathfrak{W} : W = \mathfrak{b} : b$$

2. Der Druck im Querſchnitte rs im Behältniſſe C gegen die darüber ſtehende komprimirte Luft iſt, wenn alles in Füſſen ausgedruckt wird, für den Stand der Ruhe genau genug $= H \,.\, W \,.\, \mathfrak{G}$.

Der Gegendruck der Waſſerſäule Xy im Mittel genommen $= (q - \frac{1}{2} b) \,.\, W \,.\, \mathfrak{G}$.

3. Die Zeit, in welcher die Waſſermaſſe $b \,.\, \mathfrak{W}$ bei G ausgegoſſen wird, ſey in Sekunden $= t$, ſo

ſteigt

ſteigt der Waſſerſpiegel rs in C in derſelben Zeit t von n bis m auf die Höhe b; es iſt alſo dieſes Waſſerſpiegels mittlere Geſchwindigkeit $= \frac{b}{t} = \frac{\mathfrak{W} \,.\, b}{W \,.\, t}$, und die hierzu gehörige Höhe iſt

$$\frac{\mathfrak{W}^2 \,.\, b^2}{4 W^2 t^2 \,.\, g}$$

alſo

die zur mittleren Geſchw. des Waſſers in der Fallröhre gehörige Höhe $= \frac{W^2}{w^2} \,.\, \frac{\mathfrak{W}^2 \,.\, b^2}{4 W^2 t^2 \,.\, g}$

$$= \frac{\mathfrak{W}^2 \,.\, b^2}{4 w^2 \,.\, t^2 \,.\, g}$$

die zur mittleren Geſchw. des Waſſers in der Steigröhre gehörige Höhe $= \frac{W^2}{w^2} \,.\, \frac{\mathfrak{W}^2 \,.\, b^2}{4 W^2 \,.\, t^2 \,.\, g}$

$$= \frac{\mathfrak{W}^2 \,.\, b^2}{4 w^2 \,.\, t^2 \,.\, g}$$

Daher die Hindernißhöhen wegen der Bewegung des Waſſers durch Röhren

für die Steigröhre $= \frac{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \,.\, \mathfrak{W}^2 \,.\, b^2}{4 w^2 \,.\, t^2 \,.\, g}$

Fallröhre $= \frac{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \,.\, \mathfrak{W}^2 \,.\, b^2}{4 w^2 \,.\, t^2 \,.\, g}$

Zur Abkürzung will ich die erſtere $\mathfrak{H}$, die letztere $\mathfrak{H}'$ nennen.

Es muß aber nach (Hydraul. §. 35) für jede der beiden Röhren der Werth von $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ beſonders berechnet werden, wenn ihre Weiten verſchieden ſind.

4. Dem-

4. Demnach iſt die noch übrige bewegende Kraft in rs =

$$\left(H - q + \tfrac{1}{2}b - \mathfrak{H} - \mathfrak{H}'\right).W.\mathfrak{G}$$

5. Die geſammte Maſſe, welche durch dieſe bewegende Kraft in Bewegung geſetzt werden muß, iſt nach ihrer wahren Gröſſe =

$$\left(\tfrac{1}{2}bW + \tfrac{1}{2}bW + \lambda w + \mathfrak{l}.\mathfrak{w}\right).\mathfrak{G}$$

aber nach der hier erfoderlichen Reduktion in Rückſicht auf die Momente der Trägheit =

$$\left(\tfrac{1}{2}bW + \tfrac{1}{2}b.\frac{W^2}{\mathfrak{W}^2}.\mathfrak{W} + \frac{W^2}{w^2}.\lambda w + \frac{W^2}{\mathfrak{w}^2}.\mathfrak{l}\mathfrak{w}\right).\mathfrak{G}$$

wofür man aber ohne merklichen Fehler ſchlechthin die beiden letzten Glieder

$$= \left(\frac{W}{w}.\lambda W + \frac{W}{\mathfrak{w}}.\mathfrak{l}W\right).\mathfrak{G}$$

ſetzen kann.

6. Demnach iſt die in rs wirkende beſchleunigende Kraft =

$$\frac{\left(H - q + \tfrac{1}{2}b - \mathfrak{H} - \mathfrak{H}'\right).W\mathfrak{G}}{\left(\frac{W}{w}.\lambda + \frac{W}{\mathfrak{w}}.\mathfrak{l}\right).W\mathfrak{G}}$$

$$= \frac{H - q - \tfrac{1}{2}b - \mathfrak{H} - \mathfrak{H}'}{\frac{W}{w}.\lambda + \frac{W}{\mathfrak{w}}.\mathfrak{l}}$$

7. Wenn nun dieſe beſchleunigende Kraft p heißt, ſo hat man

$$t^2 = \frac{\mathfrak{b}}{pg} = \frac{W.b}{W.p.g}$$

oder

oder

$$t^2 = \frac{\mathfrak{W}.b.\left(\frac{W}{w}.\lambda + \frac{W}{\mathfrak{w}}.l\right)}{W.\left(H - q - \frac{1}{2}b - \mathfrak{H} - \mathfrak{H}'\right).g}$$

$$= \frac{\left(\frac{\mathfrak{W}}{w}.\lambda + \frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{w}}.l\right).b}{\left(H - q - \frac{1}{2}b - \mathfrak{H} - \mathfrak{H}'\right).g}$$

oder (no. 3)

$$t^2 = \frac{\left(\frac{\mathfrak{W}}{w}.\lambda + \frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{w}}.l\right).b}{\left(H - q - \frac{1}{2}b - \frac{b^2}{4t^2g}.\left(\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\mathfrak{W}^2}{\mathfrak{w}^2} + \frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\mathfrak{W}^2}{w^2}\right)\right).g}$$

Zuſ. 1.

§. 132. Man hat alſo auch

$$H - q - \frac{1}{2}b - \frac{b^2}{4t^2g}.\left(\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\mathfrak{W}^2}{\mathfrak{w}^2} + \frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\mathfrak{W}^2}{w^2}\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{\mathfrak{W}}{w}.\lambda + \frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{w}}.l\right).b}{t^2g}$$

und

$$H = q + \frac{1}{2}b + \frac{b}{t^2g}.\left(\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})b\mathfrak{W}^2}{4\mathfrak{w}^2} + \frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})b\mathfrak{W}^2}{4w^2} + \frac{\mathfrak{W}}{w}.\lambda + \frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{w}}.l\right)$$

welches die erfoderliche Druckhöhe iſt.

Zuſ.

Zuſ. 2.

§. 133. Wenn alſo K die Höhe einer Waſſerſäule iſt, die mit dem Druck der äuſſeren Luft, welche das Behältniß C umgiebt, im Gleichgewicht iſt, und daher die Federkraft dieſer atmoſphäriſchen Luft durch K, hingegen die der verſperrten Luft während dem Gang der Maſchine $= n.K$ geſetzt wird, ſo muß

$$n.K = H + K$$

ſeyn, alſo

$$n = 1 + \frac{q + \frac{1}{2}b}{K} + \frac{b}{K.t^2 g}\left(\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).b.\mathfrak{W}^2}{4\mathfrak{w}^2} + \frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).b.\mathfrak{W}^2}{4W^2} + \frac{\mathfrak{W}}{w}.\lambda + \frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{w}}.l\right)$$

Denkt man ſich alſo die gefüllte Steigröhre anfänglich bei $\mathfrak{X}$ verſchloſſen, und ſetzt den kub. Inhalt des Luftraums über x im Behältniſſe $B = \beta$, den kub. Inhalt des Behältniſſes C bis zur untern Oeffnung k der Fallröhre $E = \gamma$, und den kub. Inhalt der Luftröhre $= \delta$, ſo muß bis zur gehörigen Verdichtung der verſperrten Luft das Waſſer von k bis rs ſo hoch ſteigen, daß, $kn = \mathfrak{H}$ geſetzt,

$$\frac{\beta + \gamma + \delta}{\beta + \gamma + \delta - \mathfrak{h}.W} = n$$

wird.

Daher

$$\mathfrak{h} = \frac{\beta + \gamma + \delta - \frac{\beta + \gamma + \delta}{n}}{W}$$

$$= \frac{(n-1).(\beta + \gamma + \delta)}{n.W}$$

Dem-

Demnach wird mit iedem Hub ein Theil des Aufſchlagewaſſers, der $= \mathfrak{h}.W$ oder

$$= \frac{n-1}{n}.(\beta+\gamma+\delta)$$

iſt, ohne Nutzen konſumirt.

Der zum Nutzen der Maſchine verwendete Theil iſt

$$b.W = \mathfrak{W}.b$$

Um alſo die Waſſermenge $b.\mathfrak{W}$ zu erheben, braucht man eine Waſſermenge $=$

$$b.\mathfrak{W} + \frac{n-1}{n}.(\beta+\gamma+\delta)$$

Hieraus folgt für die vortheilhafte Einrichtung der Maſchine:

> Man muß das Behältniß B ganz mit Waſſer anfüllen, damit β ganz verſchwinde; die Luftröhre muß ſo enge und kurz gemacht werden als andere Umſtände es erlauben; und die ganze Höhe des Behältniſſes C ſoll ſo klein als möglich, alſo nur $= \mathfrak{h}+b$ genommen werden.

Hiernach erhält man

$$\mathfrak{h} = \frac{(n-1).((\mathfrak{h}+b).W+\delta)}{n.W}$$

oder nach gehöriger Reduktion

$$\mathfrak{h} = \frac{(n-1).(bW+\delta)}{W}$$

$$= (n-1).b + (n-1).\frac{\delta}{W}$$

daher die ganze Höhe des Keſſels C =

$$(n-1).b + (n-1).\frac{\delta}{W} + b$$

$$= n.b + (n-1).\frac{\delta}{W}$$

$$= n.\frac{\mathfrak{W}}{W}.b + (n-1).\frac{\delta}{W}$$

Oder des Keſſels C kubiſcher Inhalt ſoll den Werth von

$$n.b\mathfrak{W} + (n-1).\delta$$

nicht merklich übertreffen, und dabei $\beta = 0$ ſeyn.

Wird die Anordnung hiernach gemacht, ſo braucht man, um die Waſſermaſſe $b.\mathfrak{W}$ zu erheben, eine Menge von Aufſchlagewaſſer =

$$b\mathfrak{W} + \frac{n-1}{n}(n.b\mathfrak{W} + n.\delta)$$

$$= n.b\mathfrak{W} + (n-1).\delta$$

Anm. Hieraus erhellet nun die offenbare Unmöglichkeit der oben (§. 130) angegebenen Effekte.

Es iſt nämlich für beide Maſchinen q beiläufig = 3 K, alſo nach (§. 133) n > 4; um alſo eine Waſſermaſſe $b.\mathfrak{W}$ zu erheben und bei H auszugieſſen, wird mehr, beträchtlich mehr, als $4.b\mathfrak{W}$ an Aufſchlagwaſſer erfodert.

Von der wirklich konſumirten Waſſermenge mußte alſo, wenn auch der größtmögliche Totaleffekt, welcher nach Abzug des von der Kompreſſion der Luft herrührenden Verluſtes noch hätte eintreten können, wirklich erreicht worden wäre, bei no. II. merklich weniger als

$\frac{22}{16}.\frac{1}{4}.17280$ oder merklich weniger als 6000 Eimer

in

in 24 Stunden auf die Höhe von 16 Klaſtern erhoben werden.

In der That hätte aber dieſe beträchtlich unter 6000 Eimer fallende Waſſermenge nur auf die Höhe q =

$$H - \left(\tfrac{1}{2} b + \frac{b}{t^2 g} \cdot \left(\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) . b . \mathfrak{W}^2}{4 . \mathfrak{w}^2} + \frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) . b . \mathfrak{W}^2}{4 W^2} + \frac{\mathfrak{W}}{W} . \lambda + \frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{w}} . l \right) \right)$$

erhoben werden können, die noch weit unter die angegebene Höhe von 16 Klaſtern herabfällt.

Nicht viel weniger übertrieben iſt die Angabe des Effekts von no. I. Ueberhaupt erhellet hieraus, daß dieſe Hölliſche Heronsmaſchine ein unglücklicher Einfall war, der weiter keine Nachahmung verdient. Die Maſchine gehört unter die unvollkommenſten, wenn man auch den Umſtand bei Seite ſetzen wollte, daß bezahlte Arbeiter zum wechſelſeitigen Wenden der Hahne die Stelle der Steuerung vertreten müſſen.

Hierher gehörige Schriften.

Delius angef. Bergbauk.

Poda angef. Beſchr. der Maſchinen zu Schemnitz.

Langsdorf angef. Lehrb. der Hydraul.

Sechzehentes Kapitel.
Von den Dampfmaſchinen.

Allgemeine Bemerkungen.

§. 134. I. Die Expanſivkraft der Waſſerdämpfe und die zugleich damit verbundene Eigenſchaft, durch Berührung eines kalten Körpers

 plötz-

plötzlich ihrer Expanſivkraft beraubt zu werden, hat zur Erfindung der **Dampfmaſchine** Anlaß gegeben, die unter allen bis ietzt bekannten Maſchinen bei weitem am mächtigſten wirkt.

II. Die weſentliche Einrichtung einer ſolchen Maſchine iſt ſehr einfach und kann durch die Waſſerſäulenmaſchine (fig. 72) ſehr gut erläutert werden.

Man denke ſich die dortige Fallröhre A weg, ſtatt B aber einen groſſen Keſſel mit einem kurzen Aufſatze, aus welchem die Seitenröhren x, y ausgehen, durch welche die erhitzten Dämpfe des ſiedenden Waſſers ebenſo wie bei der Waſſerſäulenmaſchine abwechſelnd über und unter den Kolben in den Cylinder einſtröhmen können; man denke ſich ferner von ieder der beiden Oeffnungen des Pippengehäuſes eine Röhre in ein luftdichtes Behältniß abgeleitet, das von einem Waſſerkaſten umgeben iſt, aus welchem Röhren durch ienes Behältniß durch bis in die erwähnten Ableitungsröhren geführt ſind, ſo daß den Dämpfen in dieſen Ableitungsröhren beſtändig kaltes Waſſer entgegenſpritzt, ſo hat man einen allgemeinen Begriff von der weſentlichen Beſchaffenheit einer ſolchen Maſchine. Indem nämlich die Dämpfe unter den Kolben im Cylinder treten, finden zu gleicher Zeit die oberhalb demſelben ihren Ausgang durch den oberen Kondenſator, d. h. durch die obere Ableitungsröhre, indem ſolche durch das entgegenſpritzende kalte Waſſer ſogleich verdichtet und wieder tropfbar flüſſig werden; daſſelbe begegnet hiernächſt den Dämpfen unter dem Kolben, wenn neue Dämpfe oberhalb den Kolben treten.

Das Kondenſirungswaſſer kann durch eine mit der Maſchine verbundene Pumpe beſtändig wieder ausgehoben und als erwärmtes Waſſer in ein beſonderes

Be-

Behältniß ausgegoſſen werden, aus welchem es durch eine Röhre, die Speiſeröhre, von Zeit zu Zeit dem Waſſer im Keſſel wieder zugeführt wird, um deſſen Abgang zu erſetzen.

Die von Höll angegebene Steuerung bei der Waſſerſäulenmaſchine könnte bei der Einrichtung mit der Pippe (fig. 72) allerdings auch bei einer ſo eingerichteten Dampfmaſchine angebracht werden, wodurch zugleich die ganze Maſchine ſehr vereinfacht würde. Inzwiſchen haben Watt und Bolton weder dieſe Pippe noch iene Hölliſche Steuerung beibehalten, ſondern haben ganz andere Vorrichtungen angebracht, wodurch der ganze Bau der Maſchine weit verwickelter geworden iſt. Hier kann ich mich aber in keine nähere Beſchreibung dieſer Einrichtung einlaſſen.

III. Schon in meinem Lehrb. der Hydraul. habe ich auf den ſchädlichen Umſtand aufmerkſam gemacht, daß nach iedesmaligem Kolbenſchub die Dämpfe in ihrer vollen Dehnkraft, mit der ſie noch beträchtlichen Nutzen leiſten könnten, abgeleitet und kondenſirt werden, indem nach damaliger Einrichtung dieſer Maſchine die Dämpfe im Keſſel mit dem Dampfraum im Cylinder iedesmal bis zur Vollendung des ganzen Schubs in Kommunikation blieben.

Aber auch dieſem Umſtande iſt durch die neueſte Einrichtung von Watt und Bolton ſo abgeholfen worden, daß iezt die Dämpfe erſt in einem ſehr geſchwächten Zuſtande abgeleitet und kondenſirt werden. Dieſes wird ſehr leicht dadurch bewerkſtelliget, daß die Kommunikation des Dampfraums im Cylinder mit dem des Keſſels durch die Steuerung der Maſchine während dem Kolbenſchube abgeſchnitten wird, ſobald der Kolben nur den 4ten Theil ſeines ganzen Schubs vollendet hat.

hat. Hierdurch wird beträchtlich an der Feuerung geſpart.

IV. Eine einzige groſſe Dampfmaſchine kann 20 anſehnliche oberſchlächtige Räder entbehrlich machen. So kann z. B. eine Dampfmaſchine, deren Cylinder 5 Rhl. Fuſſe im Durchmeſſer hält, bei gehöriger Feuerung in ieder Minute 160 Kub Fuſſe Waſſer auf eine Höhe von 200 Fuſſen heben.

V. Zur beiläufigen Beſtimmung der Steinkohlen, welche nöthig ſind, um in einer beſtimmten Zeit mittelſt gut eingerichteter Pumpen eine gegebene Waſſermenge auf eine verlangte Höhe zu heben, darf man nur die zu erhebende Waſſermenge, in Kub. Fuſſen ausgedruckt, mit der Erhebungshöhe, gleichfalls in Fuſſen ausgedruckt, multipliciren, und dieſes Produkt mit 1500 dividiren. Der Quotient giebt die in eben der Zeit erfoderliche Menge guter Steinkohlen in Nürnberger Pfunden ziemlich genau an.

Hierher gehörige Schriften.

Prony angef. Archit. Hydraul. II. Theil. (In der teutſchen Ueberſ. der 3te Band.)

Wiebeking Allgemeine Waſſerbaukunſt IVter Band. *)

Sieben-

*) Dieſer 4te Band wird erſt im künftigen Jahre erſcheinen. Ich kann ihn aber zum voraus als hierher gehörig nennen, weil er eine umſtändliche Beſchreibung der Dampfmaſchinen nebſt ihrer Theorie von mir enthalten wird.

Siebenzehentes Kapitel.

Vom hydrauliſchen Stöſſer.

Erklärung 38.

§. 135. Ich verſtehe unter dem hydrauliſchen Stöſſer die unter dem Namen Bélier hydraulique von Montgolfier und Argant vor ein paar Jahren erfundene äuſſerſt einfache Waſſerhebungsmaſchine, die (fig. 75) im lothrechten Durchſchnitte vorgeſtellt wird.

Sie beſteht aus einer Durchflußröhre mit einer angeſetzten Steigröhre, in ieder iſt ein Klappenventil (ein Thürchen, das leicht auf- und zufällt) angebracht.

Erſtere liegt in einem ſtröhmenden Waſſer, das durch abwechſelnde Bewegung der beiden Klappen nach und nach genöthiget wird, in gewiſſer Menge in letzterer, der Steigröhre, in die Höhe zu ſteigen und in einer gewiſſen Höhe auszuflieſſen.

Um einen ſteten Ausfluß zu erhalten, haben ſie einen Windkeſſel damit verbunden, wie p im horizontalen Durchſchnitte (fig. 76).

Die Wirkungsart iſt folgende. Schon aus bekannten hydroſtatiſchen Gründen ſteigt das Waſſer, auch wenn keine Klappen vorhanden wären, in der Steigröhre bis mn, d. h. bis zu der horizontalen Ebene, in welcher die äuſſere Waſſerfläche MN liegt (fig. 75).

Wäre die Klappe α, die ſich bei δ leicht dreht, nicht vorhanden, ſo würde das Strohmwaſſer durch den Kanal oder die Röhre A durchflieſſen und in beſtändiger Bewegung bleiben. Aber der Waſſerſtoß treibt dieſe Klappe (die bei ε mit einem Haken verſehen iſt, damit ſie auch bei ihrem Niederfallen nicht ganz bis γ herabkommen könne, ſondern immer noch unter einem gewiſſen Winkel gegen das ſtröhmende Waſſer geneigt bleibe), die im ruhigen Waſſer gegen γ herabfallen würde, zurück, ſo daß ſich das Waſſer ſelbſt den Durchgang längſt dem Kanale verſperrt. Indem dieſes geſchieht, ſtrebt doch die ganze Waſſermaſſe von ζ bis η im Kanale vermöge der Trägheit ihre Bewegung fortzuſetzen; ſie ſtößt daher in dieſem Augenblick die Steigrohrklappe β auf und erhebt die ſchon bis mn ſtehende Waſſerſäule um etwas, ſo daß dadurch das Waſſer z. B. bis rs ſteigt, wenn hier die Geſchwindigkeit des ſteigenden Waſſers = o wird. In dieſem Augenblicke verhält ſich das Waſſer von ζ nach η ruhig, daher muß die Klappe β nieder- und die α herabfallen, die aber wegen des Hakens ε doch in ſchiefer Stellung liegen bleibt.

Dadurch erhält alſo das Waſſer A wieder einen Ausgang bei α, es geräth daher wieder in Bewegung und ſtößt nun die ſchief liegende Klappe α wieder hinauf, ſo daß ietzt wieder der erſte Erfolg eintrit, daß nämlich ietzt wiederum die Klappe β erhoben wird und das Waſſer in der Steigröhre aufs neue um etwas zu ſteigen genöthigt wird, z. B. bis tu. Auf ſolche Weiſe ſteigt alſo das Waſſer nach und nach bis zum Ausguſſe, wo dann bei iedem folgenden Spiele Waſſer ausgegoſſen wird oder, wenn ein Windkeſſel angebracht wird, das Waſſer beſtändig ausfließt.

Anm. Der teutſche Namen iſt von mir ſo gewählt worden, weil er der Sache wenigſtens eben ſo gut entſpricht, als der franzöſiſche.

Aufg. 35.

§. 136. Die Umſtände zu beſtimmen, von welchen der Effekt des hydrauliſchen Stöſſers abhängt.

Aufl. 1. Der Querſchnitt des Kanals A ſey $= W$, der des Steigrohres $= w$, die zugehörigen Durchmeſſer ſeyen D, d; das Waſſer ſtehe auf der Höhe x über der Klappe β; die Geſchwindigkeit des Waſſers im Kanale im Augenblick, da die Klappe wieder zurückgetrieben worden, alſo der Durchgang bei α wieder verſchloſſen iſt, ſey $= C$, die Geſchwindigkeit deſſelben in dem Augenblick, da die Klappe β aufgeſtoſſen wird, $= c$, und die gleichzeitige Geſchwindigkeit des Waſſers im Steigrohre $= v$; die Länge der im Kanale befindlichen Waſſermaſſe $\zeta\eta = \lambda$; ſo iſt

Gröſſe der Bewegung im Kanale im Augenblick des Anſtoſſes an β $\Big\} = \lambda W . C$

Gröſſe der Bewegung alles Waſſers im Kanale und Steigrohre nach Erhebung der Klappe β $\Big\} = \lambda Wc + xwv$

und man hat

$$\lambda WC = \lambda Wc + xwv$$

alſo

$$v = \frac{\lambda WC - \lambda Wc}{xw} = \frac{\lambda W}{xw} . (C - c)$$

Es iſt aber auch

$$v = \frac{W}{w} . c$$

alſo

$$\frac{W}{w} . c = \frac{\lambda . W}{x . w} . (C - c)$$

oder

$$c = \frac{\lambda}{x} C - \frac{\lambda}{x} . c$$

Daher

$$c = \frac{\frac{\lambda}{x} . C}{1 + \frac{\lambda}{x}} = \frac{\lambda}{\lambda + x} . C$$

2. Die Höhe der Waſſerfläche MN über der Klappe β ſey $= a$, ſo iſt die Druckhöhe am Boden des Steigrohres $= a + \frac{c^2}{4g} = a + \frac{\lambda^2}{4(\lambda+x)^2 g} . C^2$

3. Die zu c gehörige Höhe heiſſe h, ſo iſt die Hindernißhöhe, die bloß von der Bewegung des Waſſers herrühret, =

$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) . h$ (Hydraul. §. 35)

Dabei iſt (a. a. O. §. 31)

$$\mathfrak{A} = 0{,}03 . \left(\frac{\lambda}{D} + \left(\frac{W}{w}\right)^2 . \frac{x}{d}\right)$$

und (a. a. O. §. 35), wenn der Querſchnitt des äuſſeren Strohms mit $\mathfrak{W}$, und die von der Klappe β bedeckte Oeffnung mit β bezeichnet wird,

$\mathfrak{B} =$

$$\mathfrak{B} = \left(\frac{W^2}{\gamma^2 W^2} - \frac{W^2}{\mathfrak{W}^2}\right) + \left(\frac{W^2}{\gamma^2 \beta^2} - 1\right)$$

oder, weil hier $\frac{W^2}{\mathfrak{W}^2}$ als Null angeſehen werden kann,

$$\mathfrak{B} = \frac{1 - \gamma^2}{\gamma^2} + \frac{W^2}{\gamma^2 \beta^2}$$

wo das γ im erſten Gliede auf die vordere Oeffnung bei ζ, das γ im andern Gliede aber auf die Oeffnung β geht, iedes γ alſo beſonders beſtimmt werden muß.

4. Auſſerdem iſt nun noch bei β eine Waſſerſäule von der Höhe x entgegengeſetzt.

5. Alſo iſt die auf die geſammte Waſſermaſſe bei ζ wirkende bewegende Kraft =

$$\left(a + \frac{\lambda^2}{(\lambda+x)^2} \cdot \frac{C^2}{4g} - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \cdot h - x\right) \cdot W$$

6. Dieſe Kraft wirkt in die Maſſe

$$\lambda \cdot W + \frac{W^2}{w^2} \cdot xw = \lambda W + \frac{xW}{w} \cdot W$$

alſo iſt die beſchleunigende Kraft, welche die Geſchwindigkeit des Waſſers im Kanale während dem Steigen des Waſſers im Steigrohre beſtimmt,

$$= \frac{a + \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^2 \cdot \frac{C^2}{4g} - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \cdot h - x}{\lambda + \frac{W}{w} \cdot x}$$

und

und wenn p die beſchleunigende Kraft bezeichnet, welche die Geſchwindigkeit des im Steigrohre ſteigenden Waſſers beſtimmt, ſo hat man

$$p = \frac{a + \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^2 . \frac{C^2}{4g} - (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) . h - x}{\frac{w}{W}\lambda + x}$$

7. Die zur Geſchw. des Waſſers im Steigrohre gehörige Höhe heiſſe H, ſo iſt, wie (§. 124. no. 7)

$$dH = p . dx$$

und

$$h = \frac{W^2}{w^2} . H$$

alſo

$$dH = \frac{a + \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^2 . \frac{C^2}{4g} - (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) . \frac{W^2}{w^2} . H - x}{\frac{w}{W} . \lambda + x} . dx$$

8. Bezeichnet z die Höhe über der horizontalen MN, bis zu der das Waſſer geſtiegen iſt, ſo hat man $x = a + z$, und

$$dH = \frac{w}{W} \times$$

$$\frac{\left(\frac{\lambda}{\lambda+a+z}\right)^2 . \frac{C^2}{4g} - (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) . \frac{W^2}{w^2} . H - z}{\frac{w}{W} . \lambda + a + z} . dz$$

9. Man kann zum voraus überſehen, daß beim erſten Hube, der von $z = 0$ anfängt, die Waſſer-

erhe-

erhebungshöhe oder z nur klein ausfallen könne, ſo daß man $\frac{\lambda}{\lambda+a}$ ſtatt $\frac{\lambda}{\lambda+a+z}$, und $\frac{w}{W}\lambda+a$ ſtatt $\frac{w}{W}\lambda+a+z$ ſetzen kann, ohne merklich zu fehlen. So giebt ſich dH =

$$\frac{\left(\frac{\lambda}{\lambda+a}\right)^2 \cdot \frac{C^2}{4g} - (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) \cdot \frac{W^2}{w^2} \cdot H - z}{\frac{w}{W} \cdot \lambda + a} \cdot dz$$

oder $\left(\frac{w}{W} \cdot \lambda + a\right) \cdot dH =$

$$\left(\left(\frac{\lambda}{\lambda+a}\right)^2 \cdot \frac{C^2}{4g} - z\right) dz - (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) \cdot \frac{W^2}{w^2} \cdot H \cdot dz$$

Vergleicht man dieſe Formel mit der oben (§. 124. no. 9), ſo iſt

dort	$\frac{w^2}{W^2} \cdot a$	$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})$	z	h
hier	$\frac{w}{W}\lambda+a$	$-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) \cdot \frac{W^2}{w^2}$	$\left[-\left(\frac{\lambda}{\lambda+a}\right)^2 \cdot \frac{C^2}{4g}+z\right]$	H

Alſo (§. 124. no. 11), wenn man z' ſtatt $z - \left(\frac{\lambda}{\lambda+a}\right)^2 \cdot \frac{C^2}{4g}$ ſchreibt

$$\text{Const} + \frac{\left(\frac{w}{W}\lambda+a\right) H}{e^{\left(\frac{-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) \cdot \frac{W^2}{w^2}}{\lambda + \frac{W}{w} \cdot a}\right) \cdot z'}} =$$

$-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})$

$$= \frac{-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) \cdot \frac{W^2}{w^2} \cdot \left(\frac{w}{W}\lambda + a\right) \cdot z' + \left(\frac{w}{W}\lambda + a\right)^2}{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})^2 \cdot \frac{W^4}{w^4} \cdot e^{\frac{\left(-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) \cdot \frac{W^2}{w^2}\right) \cdot z'}{\frac{w}{W}\lambda + a}}}$$

Nun iſt, für $z = 0$, alſo für $z' = -\left(\frac{\lambda}{\lambda+a}\right)^2 \cdot \frac{C^2}{4g}$, $h = \frac{c^2}{4g} = \left(\frac{\lambda}{\lambda+a}\right)^2 \cdot \frac{C^2}{4g}$, und

$$H = \left(\frac{W.\lambda}{(\lambda+a).w}\right)^2 \cdot \frac{C^2}{4g}$$ alſo

$$\text{Conſt} + \frac{\left(\frac{w}{W}.\lambda + a\right) \cdot \frac{C^2}{4g} \cdot \frac{W^2\lambda^2}{w^2(\lambda+a)^2}}{e^{\left(\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) \cdot \frac{W^2}{w^2}}{\frac{w}{W}\lambda + a}\right) \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda+a}\right)^2 \cdot \frac{C^2}{4g}}} =$$

$$\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) \cdot \frac{W^2}{w^2} \cdot \left(\frac{w}{W}\lambda + a\right) \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda+a}\right)^2 \cdot \frac{C^2}{4g} + \left(\frac{w}{W}\lambda + a\right)^2}{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})^2 \cdot \frac{W^4}{w^4} \cdot e^{\left(\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) \cdot \frac{W^2}{w^2}}{\frac{w}{W}\lambda + a} \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda+a}\right)^2 \cdot \frac{C^2}{4g}\right)}}$$

Man

Man hat alſo den Werth der Konſtante, der in der vorigen Gleichung ſtatt Const ſubſtituirt die vollſtändige Integralgleichung giebt.

10. Wenn nun der gröſte Werth von z durch $\mathfrak{h}$ ausgedruckt wird, ſo muß, für z $=$ $\mathfrak{h}$ alſo für $z' = \mathfrak{h} - (\frac{\lambda}{\lambda + a})^2 . \frac{C^2}{4g}$, $H = 0$ werden.

Schreibt man alſo in der gefundenen Gleichung $\mathfrak{h} - (\frac{\lambda}{\lambda + a})^2 . \frac{C^2}{4g}$ ſtatt z', und ſetzt darin $H = 0$, ſo erhält man eine Gleichung für $\mathfrak{h}$, oder für die Höhe, bis zu welcher das Waſſer bei der erſten Erhebung, die von $z = 0$ anfängt, über die horizontale MN ſteigen kann.

11. Für die 2te Erhebung bleibt die bisherige Berechnung ungeändert, nur daß in vorſtehenden Formeln $\mathfrak{h}$ ſtatt a und $\mathfrak{h}'$ ſtatt $\mathfrak{h}$ geſchrieben wird, indem man ietzt $\mathfrak{h}'$ für die Höhe nimmt, um welche ſich bei der ietzigen Erhebung das Waſſer im Steigrohr aufs Neue erhebt; u. ſ. w.

12. Setzt man für $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) . \frac{W^2}{w^2} . H$ eine unveränderliche Gröſſe ϕ, alſo

$$dH = \frac{a + (\frac{\lambda}{\lambda + x})^2 . \frac{C^2}{4g} - \phi - x}{\frac{w}{W} \lambda + x} . dx$$

ſo

ſo kann, wenn y die Höhe des geſtiegenen Waſſers über der MN bedeutet, a + y ſtatt x ſetzen, und für $\frac{\lambda}{\lambda+a+y}$ bloß $\frac{\lambda}{\lambda+a}$ ſchreiben; ſo wird

$$dH = \frac{(\frac{\lambda}{\lambda+a})^2 . \frac{C^2}{4g} - \phi - y}{\frac{w}{W}\lambda + a + y} . dy$$

Setzt man nun

$$\frac{w}{W}\lambda + a + y = z$$

ſo wird

$$dH = \frac{(\frac{\lambda}{\lambda+a})^2 . \frac{C^2}{4g} - \phi - z + \frac{w}{W}\lambda + a}{z} \times dz$$

$$= \left(a + \frac{w}{W}\lambda + (\frac{\lambda}{\lambda+a})^2 . \frac{C^2}{4g} - \phi\right) . \frac{dz}{z} - dz$$

alſo

$$H = \left(a + \frac{w}{W}\lambda + \frac{\lambda^2}{(\lambda+a)^2} . \frac{C^2}{4g} - \phi\right) . \ln z - z + \text{Conſt}$$

Nun wird, für y = o, alſo für $z = \frac{w}{W}\lambda + a$,

$$H = \frac{W^2}{w^2} . (\frac{\lambda}{\lambda+a})^2 . \frac{C^2}{4g}; \text{ alſo}$$

$$\text{Conſt} = \frac{W^2}{w^2} . (\frac{\lambda}{\lambda+a})^2 . \frac{C^2}{4g} + \frac{w}{W}\lambda + a$$

$$- \left(a + \frac{w}{W}\lambda + (\frac{\lambda}{\lambda+a})^2 . \frac{C^2}{4g} - \phi\right) \ln (\frac{w}{W}\lambda + a)$$

und

und

$$H = \left(a + \frac{w}{W}\lambda + \frac{\lambda^2 . C^2}{(\lambda + a)^2 . 4g} - \phi\right) \ln\left(1 + \frac{y}{\frac{w}{W}\lambda + a}\right)$$

$$- y + \frac{W^2}{w^2} . \left(\frac{\lambda}{\lambda + a}\right)^2 . \frac{C^2}{4g}.$$

13. Iſt nun $\mathfrak{h}$ der größte Werth von y bei der erſten Erhebung, ſo hat man

$$\left(a + \frac{w}{W}\lambda + \frac{\lambda^2 . C^2}{(\lambda + a)^2 . 4g} - \phi\right) . \ln\left(1 + \frac{\mathfrak{h}}{\frac{w}{W} . \lambda + a}\right)$$

$$- \mathfrak{h} + \frac{W^2}{w^2} . \left(\frac{\lambda}{\lambda + a}\right)^2 . \frac{C^2}{4g} = 0$$

14. Die Natur der Sache leitet ſchon darauf, daß $\frac{\mathfrak{h}}{\frac{w}{W}\lambda + a}$ ein kleiner Bruch ſeyn müſſe; nun iſt nach (Alg. S. 404)

$$\text{logn}\left(1 + \frac{\mathfrak{h}}{\frac{w}{W}\lambda + a}\right) = \frac{\mathfrak{h}}{\frac{w}{W}\lambda + a} - \frac{\mathfrak{h}^2}{2 . \left(\frac{w}{W}\lambda + a\right)^2}$$

$$+ \frac{\mathfrak{h}^3}{3\left(\frac{w}{W}\lambda + a\right)^3} - \text{etc.}$$

man kann ſich alſo hier mit den beiden erſten Gliedern begnügen.

So erhält man

$$\left(a+\frac{w}{W}\lambda+\frac{\lambda^2 C^2}{(\lambda+a)^2.4g}-\phi\right).\left(\frac{\mathfrak{h}}{\frac{w}{W}\lambda+a}-\frac{\mathfrak{h}^2}{2(\frac{w}{W}\lambda+a)^2}\right)$$

$$-\mathfrak{h}+\frac{W^2}{w^2}.\left(\frac{\lambda}{\lambda+a}\right)^2.\frac{C^2}{4g}=0$$

oder

$$\mathfrak{h}^2-\left(2(\frac{w}{W}\lambda+a)-\frac{2(\frac{w}{W}\lambda+a)^2}{a+\frac{w}{W}\lambda+\frac{\lambda^2 C^2}{(\lambda+a)^2.4g}-\phi}\right).\mathfrak{h}$$

$$=\frac{2(\frac{w}{W}\lambda+a)^2.W^2.\lambda^2.C^2}{w^2.(\lambda+a)^2.4g.\left(a+\frac{w}{W}\lambda+\frac{\lambda^2 C^2}{(\lambda+a)^2.4g}-\phi\right)}$$

Setzt man hier $\frac{C^2}{4g}.\frac{\lambda^2}{(\lambda+a)^2}(1-\frac{1}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}})$ oder $\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}-1}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}.\frac{C^2}{4g}.(\frac{\lambda}{\lambda+a})^2$ ſtatt ϕ, ſo giebt ſich $\mathfrak{h}$ beiläufig.

Ex. Es ſey $a = 3$ Rhl. Fuß, $\lambda = 24$ Fuß, $d = D = 2$ F., $\beta = \frac{1}{4}W$; ferner γ, auf W bezogen, $= 0{,}81$; und γ, auf β bezogen, $= 0{,}62$; ſo erhält man

$$\mathfrak{A} = 0{,}03.(\frac{24}{2}+\frac{3}{2}) = 0{,}4$$

$$\mathfrak{B} = \frac{1-0{,}65}{0{,}65}+\frac{1}{0{,}38.1\frac{1}{6}} = 45$$

Setzt

Setzt man nun g = 15,6; ſo erhält man nach gehörigen Berechnungen

$$\mathfrak{h}^2 - \left(54 - \frac{2.729}{27{,}0011}\right).\mathfrak{h} = \frac{4608}{1684{,}86}.$$

oder

$$\mathfrak{h}^2 - 0{,}002\,.\,\mathfrak{h} = 0{,}273$$

und

$$\mathfrak{h} = 0{,}52 \text{ Rhl. Fuß}$$

für die Höhe, auf welche das Waſſer im Steigrohre bei der erſten Erhebung über die äuſſere Waſſerfläche beiläufig ſteigen wird.

Für die 2te Erhebung ſetzt man nun 3 + 0,52 ſtatt a und findet dann die Höhe $\mathfrak{h}$ der 2ten Erhebung über die vorige u. ſ. w.

Anm. Nur die Simplicität dieſer Maſchine könnte zu ihrem Gebrauche reitzen; übrigens gehört ſie gewiß nicht zu den vortheilhafteſten in Rückſicht auf die Benutzung eines ſtröhmenden Waſſers.

Nach der vorgetragenen Theorie würde zwar folgen, daß ſich ſo das Waſſer auf iede verlangte Höhe bringen lieſſe, weil bei iedem folgenden Klappenwechſel das Waſſer im Steigrohre durch die Waſſermaſſe im Kanale A immer wieder um etwas erhöhet werden müßte. Allein in der Ausübung muß man dieſen Gedanken aufgeben, weil dieſe Theorie einen Umſtand nicht enthält, der in der Ausübung unvermeidlich iſt, daß nämlich die Klappe β allemal eine kleine Zeit braucht, um wieder zurück zu fallen und die Oeffnung β wieder zu verſchlieſſen. Es iſt alſo unvermeidlich, daß während dem Zufallen dieſer Klappe ein Theil von dem Waſſer im Steigrohre ſelbſt wieder zurückfalle und dieſer wird bei den immer abnehmenden Erhebungen des Waſſers bald der Waſſermenge gleich werden, die bei einer neuen Erhebung hinzukommt.

Daher iſt zu erwarten, daß die Maſchine das Waſſer überhaupt auf keine beträchtliche Höhen erhebe und etwa nur zur Bewäſſerung ſolcher Wieſengründe gebraucht werden könne, welche an Bächen oder Flüſſen liegen, die keine gar hohe Ufer haben.

Einige Nachrichten von dieſer Maſchine findet man in dem

Bulletin des Sciences par la Société philomatique à Paris an. 6. No. 8. und hieraus in

Gilberts Annalen der Phyſ. I. Bd. 3tes Stück. Halle 1799.

Schon haben die Engländer Verbeſſerungen an dieſer Maſchine vorgenommen, die ich aber ſelbſt nicht näher kenne.

Achtzehentes Kapitel.

Von den Schöpfrädern.

Erklärung 39.

§. 137. Unter Schöpfrädern verſteht man Waſſerräder, die in Behältniſſen, welche auf eine geſchickte Weiſe an ihnen angebracht ſind, einen Theil von dem Waſſer, das ihren Umlauf bewirkt, mit ſich in die Höhe nehmen und denſelben in einen in der Höhe angebrachten Waſſerkaſten ausgieſſen.

Ich betrachte hier nur die gewöhnliche ganz einfache Einrichtung (fig. 77).

Man

Man benutzt dazu Räder im offenen Strohme, dem man beſonders in kleinen Flüſſen oder Bächen nur durch eine niedrige Verpfähiung und Verdammung, oder Aufhäufung von Steinen vor der Verpfählung einiges Gefälle zu verſchaffen ſucht.

Wegen der hierbei vorkommenden geringen Geſchwindigkeit des Stoſswaſſers werden die Schaufelbretter nicht leicht unter 6 Fuſſen lang gemacht und 12 — 15 Zolle breit. Daher ſchicken ſich zu ſolchen Rädern nur die Staberräder, die bei der Einrichtung (fig. 77) auch darum nöthig ſind, weil dabei die ſchöpfende Behältniſſe an der äuſſeren Fläche eines Kranzes angebracht werden.

Dieſe, am beſten angeſchrobene, Kufen haben die Geſtalt eines abgekürzten Kegels, der Durchmeſſer des Bodens iſt etwa doppelt ſo groß als der der Oeffnung.

Aufg. 36.

§. 138. op (fig. 77) ſey die Axe der koniſchen Kufe, die hier im lothrechten der äuſſeren Fläche des Kranzes parallelen Durchſchnitte vorgeſtellt wird, und zwar in dem Augenblicke ihrer Bewegung, da ihres oberen Randes niedrigſte Stelle d gerade die Oberfläche des äuſſeren Waſſerſpiegels mn erreicht hat, wo ds die Waſſerlinie in der Kufe iſt; ch ſey ein durch d gezogener Halbmeſſer, lk der lothrechte Durchmeſſer; df eine durch d willkührlich gezogene gerade Linie, de ein Perpendikel auf cd, das mit der df einen gegebenen Winkel α mache; der Winkel kch = u ſey gleichfalls gegeben; die Kufe ſoll ſich nun fortbewegen, bis die

niedrigſte Stelle μ vom Rande ihrer Oeffnung in die gerade $c\zeta$ kommt: man ſucht den Winkel $xd'f$, den iezt die zuvor gezogene df mit der durch die oberſte Stelle d gezogenen xy macht.

Aufl. Es iſt $mdf = mde + edf = u + \alpha$; da dieſes für iede Lage von ch gilt, ſo gilt es auch für die $c\zeta$, indem man iezt kcd' ſtatt u ſezt; es iſt alſo auch $xd'f = kcd' + \alpha$.

Zuſ. 1.

§. 139. Soll die Kufe bei μ gerade auszugieſſen anfangen, ſo muß der Winkel $yd'b$ dem $m\varepsilon a$ gleich ſeyn.

Man denke ſich alſo die df der εa parallel, und nun $edf = \alpha$ gegeben, ſo hat man $m\varepsilon a = mdf = u + \alpha$, und $yd'f = 180° - xd'f = 180° - (kcd' + \alpha)$ (§. 138); alſo

$$u + \alpha = 180° - kcd' - \alpha$$

und

$$kcd' = 180° - (u + 2\alpha)$$

wo $u = kch$ iſt.

Demnach

$$lcd' = u + 2\alpha$$

Zuſ. 2.

§. 140. Sollte die Kufe bis zu einer Stelle d' fortrücken, in welcher die Seite εa eine horizontale Lage hätte, ſo müßte, df der εa gleichlaufend angenommen, $yd'f = 0$ ſeyn, alſo (§. 139)

$$180° - kcd' - \alpha = 0$$

und

und

$$kcd' = 180° - \alpha$$

alſo für die ietzige Bedeutung der Stelle d'

$$lcd' = \alpha$$

Zuſ. 3.

§. 141. Wären die Kufen cylindriſch, ſo wäre $\alpha = 0$, wenn die Axe der Kufe auf dem Halbmeſſer ch ſenkrecht ſtände, alſo in dieſem Falle auch $lcd' = 0$; eine ſolche Kufe käme alſo in der höchſten Stelle des Rades horizontal zu liegen.

Bei einer koniſchen Kufe, deren Axe op auf dem Halbmeſſer ch ſenkrecht ſtände, müßte df zur Linken von de fallen; da würde alſo edf oder α verneint, und $lcd' = -\alpha$; ietzt müßte nämlich die Stelle d bis in δ fortrücken, ſo daß $\delta cl = \alpha$ würde, nämlich aus kcd' wird ietzt

$$kc\delta = 180° - (-\alpha) = 180° + \alpha$$

Zuſ. 4.

§. 142. Die Stelle für den Ausgußkaſten wird durch den Winkel (§. 139) $u + 2\alpha$ beſtimmt; der Kaſten muß nämlich etwas unter dieſer Erhebung liegen. Es gehört zur Unvollkommenheit dieſer Maſchine, daß nicht ſogleich an dieſer Stelle alles Waſſer plötzlich ausgeſchüttet, ſondern noch ein Theil auf eine gröſſere Höhe mit fortgeführt werden muß, bis es nach und nach vollends in den Ausgußkaſten herabfällt. Dieſe Stelle der erfolgten gänzlichen Ausleerung kann (§. 140) in der Stelle d' angenommen werden, für welche $lcd' = \alpha$ iſt; oder wenn dieſe Stelle in ψ liegt, ſo iſt $lc\psi = \alpha$; alſo iſt

$$\psi d' = u + 2\alpha - \alpha = u + \alpha$$

da dann d' die Stelle für den Anfang des Ausguſſes iſt.

Dieſen Bogen $\psi d'$ will ich den Verſchüttungsbogen nennen.

Es iſt alſo der Verſchüttungsbogen in Graden allemal $= u + \alpha$, und ie kleiner dieſer Bogen iſt, deſto vollkommener iſt die Maſchine.

Zuſ. 5.

§. 143. Man verſtehe hier unter dem Halbmeſſer des Rades die $c\varphi = cd' = R$, und die Höhe von φ bis zum oberen Rand des Ausgußkaſtens ſey $= h$, der Kufe Durchmeſſer $\mu d' = d$, ſo könnte, wenn die Kufe bei μ auszugieſen anfängt,

$$h = R + R . \operatorname{Cof} lcd' - d$$

genommen werden; aber zur Sicherheit nehme man

$$h = R . (1 + \operatorname{Cof} lcd') - 2d$$

ſo hat man (§. 139)

$$h = R . (1 + \operatorname{Cof} (u + 2\alpha)) - 2d$$

und hieraus giebt ſich, wenn h gegeben iſt,

$$R = \frac{h + 2d}{1 + \operatorname{Cof} (u + 2\alpha)}$$

Es ſey nun die Waſſertiefe $q\varphi = \mathfrak{h}$, ſo iſt

$$\operatorname{Cof} u = \frac{R - \mathfrak{h}}{R}$$

Dieſer Werth in der Gleichung für R gehörig gebraucht, würde für R eine Gleichung vom 4ten Grade geben. Man thut aber am beſten, für R einen beſtimmten Werth, etwa von 6 oder 7 Fuſſen, feſtzuſetzen, da bei dem veränderlichem Werthe von $\mathfrak{h}$ der Halb-

Halbmeſſer des Rades doch ungeändert bleiben muß, hingegen die Kufen nach eintretenden Veränderungen von h leicht unter einem andern Winkel α geſtellt werden können.

So giebt ſich

$$1 + \operatorname{Coſ}(u + 2\alpha) = \frac{h + 2d}{R}$$

und

$$\operatorname{Coſ}(u + 2\alpha) = \frac{h + 2d - R}{R}$$

Hieraus findet man $u + 2\alpha$, und da u durch den Ausdruck $\operatorname{Coſ} u = \frac{R - h}{R}$ gegeben iſt, ſo findet man alsdann auch 2α, deſſen Hälfte $= \alpha$ iſt.

Eine allgemeine Auflöſung dieſer Gleichung giebt

$$\operatorname{coſ} 2\alpha = \frac{h + 2d - R}{R} . \operatorname{coſ} u \pm \operatorname{ſin} u \sqrt{\left(1 - \left(\frac{h + 2d - R}{R}\right)^2\right)}$$

Setzt man $\sqrt{\left(1 - \left(\frac{h + 2d - R}{R}\right)^2\right)} = A$, ſo hat man auch, $1 - 2 . \operatorname{ſin} \alpha^2$ ſtatt $\operatorname{Coſ} 2\alpha$ geſetzt (Trig. S. 265. III),

$$\operatorname{ſin} \alpha = \sqrt{\left(\frac{1 - \left(\frac{h + 2d - R}{R} . \operatorname{Coſ} u \pm A . \operatorname{ſin} u\right)}{2}\right)}$$

Zuſ. 6.

§. 144. Da die Kufen zur Rechten von kl auszugieſſen anfangen müſſen, wenn die Maſchine ihre gehörige Einrichtung haben ſoll, ſo muß lcd′ (§. 139)

allemal beiaht werden, alſo, wenn α verneint und daher $lcd' = u - 2\alpha$ wird, $2\alpha < u$ oder $\alpha < \frac{1}{2}u$ ſeyn. Es darf aber auch die Stelle der gänzlichen Ausleerung, wenn ſie zur Linken von l fällt, nicht unter den Ausgußkaſten herabfallen, alſo muß der Winkel lcd′ (§. 140) für einen verneinten Werth von α höchſtens $= u - 2\alpha$ ſeyn, alſo höchſtens

$$-\alpha = u - 2\alpha$$

oder wenigſtens

$$u - \alpha = 0$$

d. i. es darf nie α oder fde, wenn df zur Linken von de fällt, gröſſer als u ſeyn. Daher die allgemeine Regel:

> Wenn die durch d der εa parallel gezogene df zur Linken der auf den Halbmeſſer cd ſenkrecht gezogenen de fällt, ſo muß die Gröſſe des Winkels fde allemal $< \frac{1}{2}u$ ſeyn.

denn hierdurch geſchieht auch der letztern Foderung Genüge.

Iſt aber α beiaht, d. i. fällt die erwähnte df zur Rechten der de, ſo fällt der Winkel lcψ der gänzlichen Ausleerung nach (§. 140) allemal zur Rechten von l, und er iſt allemal $= \alpha$.

Bei einer ordentlichen Einrichtung kann, wenn der Ausgußkaſten über der Radwelle angebracht, alſo $h > R$ iſt, niemals $\text{Coſ}\,(u + 2\alpha)$ verneint ſeyn, weil $\frac{h + 2d - R}{R}$ alsdann allemal beiaht iſt. Daraus folgt, daß alsdann $u + 2\alpha$ allemal $< 90°$ ſeyn, folglich die Stelle d′, wo die Kufen auszugieſſen anfangen, alsdann allemal unterhalb l zur Rechten fallen müſſe. Aber α könnte dennoch einen verneinten

Werth

Werth haben, der aber klein genug wäre, damit $u + 2\alpha$ beiaht bliebe.

1. Ex. Es ſey $R = 6$ Fuß, $\mathfrak{h} = 1$ F., $h = 9$ F., $d = 0,4$ F.; ſo iſt $\mathrm{Cos}\, u = \frac{6-1}{6}$ $= \frac{5}{6} = 0,8333$ alſo $u = 33^\circ\ 34'$, und $\mathrm{Cos}(u+2\alpha)$ $= \frac{9+0,8-6}{6} = \frac{3,8}{6} = 0,6333$; alſo $u + 2\alpha$ $= 50^\circ\ 42'$; demnach $2\alpha = 50^\circ\ 42' - 33^\circ\ 34' =$ $17^\circ\ 8'$ und $\alpha = 8^\circ\ 34'$.

Die Kufen fangen alſo unter einem Winkel lcd' $= 50^\circ\ 42'$ an auszugieſſen, und der Winkel der erfolgten gänzlichen Ausleerung $lc\psi$ iſt $= 8^\circ\ 34'$.

2. Ex. Es ſey noch $R = 6$ Fuß, aber $\mathfrak{h} =$ 2 F., $h = 9\frac{1}{2}$ F., ſo wäre ietzt

$$\mathrm{Cos}\, u = \frac{6-2}{6} = 0,6666, \text{ alſo } u = 48^\circ\ 42'$$

und

$$\mathrm{Cos}\,(u+2\alpha) = \frac{9,5+0,8-6}{6} = 0,7166$$

alſo $u + 2\alpha = 44^\circ\ 13'$; demnach

$$2\alpha = 44^\circ\ 13' - 48^\circ\ 12 = -3^\circ\ 59'$$

und

$$\alpha = -2^\circ.$$

Jetzt fällt die Stelle ψ, wo die gänzliche Ausleerung erfolgt iſt, um 2° von l nach der linken Seite, d. i. etwa $2\frac{1}{2}$ Zolle zur Linken von l.

Anm. Der Einfluß der Schwungkraft auf die Waſſertheilchen in den Kufen iſt hier ganz unbedeutend; ſie leiden nämlich den Eindruck einer Centrifugalkraft, der, unſere Schwe-

Schwere = 1 geſetzt, $= \frac{2v}{R}$ iſt (Dyn. §. 112), wenn v die zur Geſchwindigkeit der Kufen gehörige Höhe iſt; es iſt aber ſelten $v > \frac{1}{7}$ Fuß, alſo $\frac{2v}{R}$ nicht leicht gröſſer als $\frac{1}{20}$. Der Erfolg wäre, daß die Kufen noch etwas ſpäter auszugieſſen anfangen; aber der Unterſchied iſt zu klein, um in Rechnung gebracht zu werden.

Auch iſt die Vorausſetzung, daß an der Stelle, wo die Seite sa der Kufe in die horizontale Lage kommt, alles Waſſer vollends ausgegoſſen werde, nicht in aller Schärfe richtig. Inzwiſchen iſt doch, was alsdann noch in der Kufe zurück iſt, unbedeutend, und überdas iſt die ſchon angenommene Stellung des Ausgußkaſtens völlig hinreichend, ſelbſt in dem äuſſerſten Falle, da $\alpha = \frac{1}{2}u$ und zwar verneint würde, zu verhüten, daß der Reſt des Ausguſſes nicht dann erſt erfolge, wann die Kufe zur Linken von l ſchon unter den Ausgußkaſten gekommen iſt. Es muß aber bei einer guten Einrichtung der erwähnte Fall überhaupt nie eintreten.

Aufg. 37.

§. 145. **Einen allgemeinen Ausdruck für den Effekt des Schöpfrades zu beſtimmen, wenn die darauf Einfluß habenden Beſtimmungsſtücke gegeben ſind (fig. 77).**

Aufl. Ich berechne zuerſt das ſtatiſche Moment der Laſt.

1. Die Waſſermenge, mit welcher iede Kufe aus dem Strohme herauf ſteigt, iſt dem Inhalt des ſchief abgekürzten Kegels gleich, deſſen Axendurchſchnitt das Viereck acdb darſtellt.

Wenn

Wenn nun df der εa gleichlaufend iſt, ſo iſt rdf $= 180° - ard$, und $rdε = rdf - (εde + edf) = rdf - (u + \alpha) = 180° - (ard + u + \alpha)$; daher auch $rεd = 180° - (ard + rdε) = u + \alpha$; und nunmehr

$$\sin(u + \alpha) : rd = \sin ard : εd$$

oder, wenn $rd = d$ geſetzt wird,

$$εd = \frac{\sin ard}{\sin(u + \alpha)} . d$$

2. Die Oberfläche des Waſſers in der Kufe iſt beim Hervortreten aus dem Strohme eine Ellipſe, deren groſſe Axe die εd, alſo $= \frac{\sin ard}{\sin(u + \alpha)} . d$ iſt.

3. Die kleine Axe dieſer elliptiſchen Oberfläche iſt die gerade Linie, welche ſich ergiebt, wenn man durch die Mitte der εr eine gerade der rd gleichlaufend bis an die Seite bd zieht.

Nun ſey der Kufe Höhe so $= a$, ſo wäre, wenn des vollſtändigen Kegels Höhe $= A$ und des Bodens Durchmeſſer $ab = D$ geſetzt wird,

$$\tfrac{1}{2}(D - d) : a = \tfrac{1}{2} D : A$$

alſo

$$A = \frac{a . D}{D - d}$$

Es iſt ferner

$$\sin rεd : rd = \sin εdr : rε$$

alſo

$$rε = \frac{\sin(ard + u + \alpha)}{\sin(u + \alpha)} . d$$

Denkt

Denkt man ſich nun den Kegel auf die ganze Höhe A ergänzt, ſo hat man

$$A : D = (A - a + \tfrac{1}{2} r\varepsilon) : \text{geſuchten kleinen Axe}$$

Ich kann alſo iezt auch die elliptiſche Oberfläche des Waſſers in der Kufe als bekannt annehmen.

Es iſt ferner des oberen Kegelſtücks Höhe über der elliptiſchen Grundfläche durch die Geſtalt der Kufe und durch u und α gegeben. Nämlich die Seite bd bis zur Spitze des Kegels verlängert iſt $= \frac{A}{\sin abd}$, alſo das Ergänzungsſtück von d bis zur Spitze des ganzen Kegels $= \frac{A}{\sin abd} - bd$; der Winkel, den dieſe Linie mit der horizontalen dn macht, iſt $= abd + \varepsilon dr$, alſo die Höhe des oberen Kegelſtücks =

$$\left(\frac{A}{\sin abd} - bd\right) . \sin (abd + \varepsilon dr)$$

Der dritte Theil dieſer Höhe mit der elliptiſchen Grundfläche multiplicirt, giebt den Inhalt des oberen Kegelſtücks, das von $\frac{1}{3} A . 0,785 . D^2$, d. i. vom ganzen Kegel abgezogen, den Inhalt der Waſſermaſſe abdε giebt.

Dieſer ſoll k, und das Gewicht eines ſolchen kubiſchen Maaßes, welches als Einheit von k gebraucht wird, ſoll G heiſſen, ſo iſt

das Gewicht des in ieder Kufe beim Anfange des Ausgieſſens enthaltenen Waſſers } = k . G

4. Die

4. Die Vollkommenheit der Maſchine erfodert, daß man α beiaht mache.

Es ſey alſo d' der oberſte Punkt der Kufenöffnung beim Anfange des Ausgieſſens, ψ die Stelle dieſes Punktes in dem Augenblick, da sa oder μi in die horizontale Lage kommt, ſo iſt

$$\text{Bogen } dd' \text{ in Graden} = 180^\circ - (u + lcd')$$
$$= 180^\circ - 2(u + \alpha)$$
$$(\S.\ 139)$$

Es ſey nun $d'\tau'$ ſenkrecht auf cl, ſo iſt, $cd' = R$ geſetzt,

$$q\tau' = R.(\mathrm{Coſ}\,u + \mathrm{Coſ}\,lcd')$$
$$= R.(\mathrm{Coſ}\,u + \mathrm{Coſ}(u + 2\alpha))$$

Iſt $\mu\tau$ ſenkrecht auf cl und mw die Verlängerung von $\tau\mu$, ſo iſt $\tau'\tau = \mu d'.\,\mathrm{ſin}\,d'\mu w$, alſo, wenn d'f der μi gleichlaufend genommen wird,

$$\tau'\tau = \mu d'.\,\mathrm{ſin}\,(d'\mu i - w\mu i)$$
$$= \mu d'.\,\mathrm{ſin}\,(d'\mu i - yd'f) \quad \text{oder}$$
$$(\S.\ 138)\quad \tau'\tau = \mathrm{ſin}\,d'\mu i - [180^\circ - (kcd' + \alpha)]$$

und, weil $kcd' = 180^\circ - u - 2\alpha$ iſt (§. 139),

$$\tau'\tau = \mathrm{ſin}\,(d'\mu i - (u + \alpha)).\,d$$

Daher

$$q\tau = R.\big(\mathrm{Coſ}\,u + \mathrm{Coſ}(u + 2\alpha)\big)$$
$$- \mathrm{ſin}\,(d'\mu i - (u + \alpha)).\,d$$

Es iſt ferner

$$C\tau'''' = R.\,\mathrm{Coſ}\,\alpha \quad (\S.\ 140).$$

Wenn aber d oder d' in ψ kommt, ſo fällt s oder μ tiefer herab, z. B. in s', und es iſt

$$\tau''''\tau''' = d.\,\mathrm{ſin}\,d'\mu i$$

alſo

alſo

$$C\tau''' = C\tau'''' - \tau''''\tau''' = R.\,\mathrm{Cos}\,\alpha - d'.\,\sin d\mu i$$

Liegt alſo τ'' in der Mitte zwiſchen τ und τ''', ſo hat man

$$C\tau'' = \frac{C\tau + C\tau'''}{2}$$

$$= \frac{R.\,\mathrm{Cos}\,(u+2\alpha) + R.\,\mathrm{Cos}\,\alpha - d.\,\sin d'\mu i}{2}$$

alſo

$$q\tau'' = qC + C\tau''$$

$$= \mathrm{Cos}\,u + \frac{R.\,\mathrm{Cos}\,(u+2\alpha) + R.\,\mathrm{Cos}\,\alpha - d.\,\sin d'\mu i}{2}$$

Dieſes druckt hier genau genug die Höhe aus, die man in Rückſicht auf die von τ bis τ''' erfolgende allmälige Abnahme des Waſſers in der Kufe ſtatt der ganzen Höhe $q\tau'''$ annehmen kann, ſo als ob die Kufe mit ihrer vollen Ladung $= k.\,\mathfrak{G}$ (no. 3) auf die Höhe $q\tau''$ erhoben würde.

5. Der zu dieſer Höhe gehörige Bogen iſt

$$R.\,(\mathrm{Bog}\,(90° - u) + \mathrm{Bog.\,Cos}\,C\tau'')$$

Daher das mittlere ſtatiſche Moment einer beladenen Kufe =

$$\frac{qC + C\tau''}{R.\,(\mathrm{Bog}\,(90° - u) + \mathrm{Bog\,Cos}\,C\tau'')}.\,R.\,k.\,\mathfrak{G}$$

(§. 91).

6. Sind nun am ganzen Rade N gleiche Kufen angebracht, ſo kommen, für den waſſerhaltigen Bogen $d\xi$,

$$\frac{\mathrm{Bog}\,(90° - u) + \mathrm{Bog\,Cos}\,C\tau'')}{2\pi}.\,N$$

Kufen

Kufen als Laſt in Rechnung, und das Moment der geſammten Laſt iſt

$$\frac{(qC+C\tau'').(\text{Bog}(90^\circ-u)+\text{Bog}\,\text{Coſ}\,C\tau'')}{R.2\pi.(\text{Bog}(90^\circ-u)+\text{Bog}.\text{Coſ}\,C\tau'')} \times N.R.k.\mathfrak{G}$$

$$= \frac{qC+C\tau''}{2\pi R}.R.N.k.\mathfrak{G}$$

d. i. die Sache verhält ſich ſo, als ob eine Laſt $\frac{qC+C\tau''}{2\pi R}.N.k.\mathfrak{G}$ in der Entfernung $Cd = R$ von der Axe angebracht wäre.

7. Aus (§. 109) giebt ſich die Gröſſe des Waſſerſtoſſes; wenn dieſe dem Gewicht einer Waſſermaſſe P in der Entfernung R von der Axe gleich iſt, ſo hat man endlich

$$P.R = \frac{qC+C\tau''}{2\pi}.N.k$$

alſo

$$P = \frac{qC+C\tau''}{2\pi R}.N.k$$

auch

$$N = \frac{2\pi R.P}{(qC+C\tau'').k}$$

und

$$k = \frac{2\pi R.P}{(qC+C\tau'').N}$$

8. Des Rades Geſchwindigkeit giebt ſich gleichfalls aus (§. 109); wenn dieſe v heißt, kommt das

Rad in $\frac{2\pi R}{v}$ Sekunden einmal herum, und in dieſer Zeit wird die Waſſermenge N.k ausgegoſſen; der Ausguß beträgt alſo in ieder Sekunde $\frac{N.k.v}{2\pi R}$.

Anm. Im Bisherigen iſt die ganze Theorie der Schöpfräder in ihrer völligen Allgemeinheit enthalten. Zur Wieſenbewäſſerung leiſten ſie die trefflichſten Dienſte. Die Frage, wie viel Waſſer zur hinlänglichen Bewäſſerung einer Wieſe oder eines Wieſengrundes von beſtimmter Gröſſe ſtündlich geſchöpft werden müſſe, gehört eigentlich in die Landwirthſchaft. Inzwiſchen kann man immer darauf rechnen, daß in allen Fällen der Ertrag der Wieſen beträchtlich gewinnt, wenn ihnen für iede Quadratruthe zu 144 Rhl. Quadratfuſſen ſtündlich auch nur $\frac{1}{2}$ Kub. Fuß Waſſer zugeführt wird.

Neunzehentes Kapitel.
Die Saugſchwungmaſchine.

Erklärung 40.

§. 146. ABCD (fig. 78) ſey ein horizontaler ringförmiger Boden eines durch zwei cylindriſche lothrechte Wände gebildeten Behältniſſes, das alſo eine lothrecht durchgehende cylindriſche Höhlung hat, von der abcd einen wagrechten Durchſchnitt vorſtellt.

Im Boden ſey irgendwo eine Oeffnung mit einem Thürchen (einer Klappe) n angebracht. Oben, einige

nige Zolle unter dem oberen Rande des ringförmigen Behältniſſes, ſey dieſes Behältniß mit einem Deckel verſchloſſen, ſo daß fig. 79 einen horizontalen Durchſchnitt durch die Maſchine in der Stelle des Deckels vorſtellt; in dieſem Deckel befinde ſich irgendwo eine Oeffnung oder ein kurzes Aufſatzröhrchen α zum Anfüllen des Behältniſſes mit Waſſer, das dann gleich nach der Anfüllung wieder luftdicht verſtopft wird.

Durch die Höhlung gehe eine lothrechte Welle, an der die innere cylindriſche Wand des Behältniſſes befeſtigt iſt, ſo daß mit dieſer Welle, die mittelſt Zapfen aufgeſtellt iſt, zugleich das Behältniß um eine gemeinſchaftliche Axe lauft. Etwa $\frac{1}{2}$ bis 1 Zoll tief unter dem Deckel ſey ein Seitenrohr, wie fig. 80, angebracht, das in einer dünnen Platte xy eine Oeffnung w hat. Vor dieſer Oeffnung ſey auſſen ein Thürchen angebracht, das durch eine ſchwache Feder doch ſtark genug angedruckt werde, um bei Anfüllung der Maſchine mit Waſſer vom bloſſen Druck des Waſſers beim ruhigen Stande der Maſchine ſich nicht öffnen zu laſſen.

An der Welle kann ein Trilling angebracht ſeyn, der durch ein eingreifendes Rad eine beträchtliche Umlaufsgeſchwindigkeit bekommt. Im Kleinen kann eine kleine Rolle an der Wellenaxe angebracht und ſolche durch ein Seil mit einer beträchtlich gröſſeren Rolle verbunden werden, da dann durch Umdrehung der letzteren die erfoderliche Umlaufsgeſchwindigkeit der erſteren bewirkt wird, mit der zugleich das mit Waſſer gefüllte Behältniß mit groſſer Schnelligkeit um dieſelbe Axe herumlauft.

Fig. 81. Tab. IX. ſtellt die Maſchine nach der letzteren Einrichtung im lothrechten Durchſchnitt vor,

wo die Kurbel ab zur Umdrehung der groſſen Scheibe dient.

Ich nenne dieſe Maſchine eine Saugſchwungmaſchine.

Sie dient, Waſſer aus einem Behältniß in ein kreisförmiges Gerinne δε zu heben, das unter dem Schwungrohre β angebracht wird.

Wird nämlich dieſe Maſchine in ein Waſſerbehältniß EF eingeſetzt, dann mit Waſſer bis zur Oeffnung α angefüllt, hierauf dieſe Oeffnung luftdicht verſtopft und ſogleich die Maſchine in Umlauf gebracht, ſo erhält die Waſſermaſſe im Schwungrohre β vermöge der Schwungkraft ein deſto ſtärkeres Beſtreben, ſich von der Umlaufsaxe zu entfernen, ie gröſſer die Umlaufsgeſchwindigkeit bei einem beſtimmten Halbmeſſer γw iſt. Daher wird bei hinlänglicher Umlaufsgeſchwindigkeit das Thürchen bei w aufgeſtoſſen und das Waſſer ſtröhmt heraus. Dadurch entſteht unter dem Deckel der Maſchine eine Leere. Wenn nun die Waſſerhöhe vom oberen Rand des Schwungrohres bis zum Waſſerſpiegel im unteren Kaſten EF kleiner als die Höhe einer Waſſerſäule iſt, welche mit dem Druck der Atmoſphäre auf die Oberfläche EF im Gleichgewicht iſt, ſo ſtröhmt vermöge des ſtärkeren atmoſphäriſchen Drucks immer wieder neues Waſſer durch die Bodenöffnung n in die Maſchine und der Ausfluß bei w dauert, ſo lange die Maſchine in hinlänglich ſchnellem Umlaufe bleibt, beſtändig fort.

Anm. Ich übergehe hier die Theorie dieſer Maſchine, die auf der des Segneriſchen Waſſerrades beruht. Man findet ſie in meinem Lehrb. der Hydraul. vollſtändig abgehandelt. Der Durchmeſſer des Schwungrohres ſoll wenigſtens 5 oder 6mal ſo groß als der der Ausflußöffnung w ſeyn. Die

Umdre-

Umdrehung muß der Richtung, nach welcher der Strahl ausfließt, entgegengeſetzt ſeyn. Um das Gleichgewicht der Maſchinentheile unter ſich zu erhalten, bringt man zwei Schwungrohre einander gegenüber an. Wenn der Halbmeſſer der äuſſeren Wand $\gamma\zeta$ mit r und der Halbmeſſer γw mit R bezeichnet wird, ſo leiſtet die Maſchine deſto mehr, ie weniger $\frac{r}{R}$ von 1 verſchieden iſt. Die Maſchine, welche ich im Kleinrn habe verfertigen laſſen, thut treffliche Dienſte.

Zwanzigſtes Kapitel.
Die archimediſche Waſſerſchnecke.

Erklärung 41.

§. 147. Man denke ſich einen von allen Seiten verſchloſſenen, nur an beiden Enden offenen Kanal um den äuſſeren Umfang eines Cylinders ſo herumgelegt, daß ſeine centriſche Linie mit allen auf die Axe des Cylinders ſenkrechten Ebenen einerlei Winkel mache, ſo hat man eine archimediſche Waſſerſchnecke (fig. 82). Der Cylinder, um welchen der Kanal ſchraubenförmig herumgeht, heißt die Spindel.

Wird die Maſchine unter gehöriger Neigung ſo aufgeſtellt, daß die untere Oeffnung n des Kanals unter Waſſer ſteht, wenigſtens bei iedesmaliger Umdrehung der Spindel unter die Oberfläche des Waſſers

treten muß, ſo trit Waſſer in den Kanal bis zur Höhe des äuſſeren Waſſerſpiegels; bei der erſten Umdrehung wird ein Theil vom erſten Schraubengang über der Waſſerfläche MN mit Waſſer angefüllt, der bei der 2ten Umdrehung in den 2ten Schraubengang übergeht, indeß zugleich der erſte wieder mit demſelben Theil angefüllt wird. Bei der 3ten Umdrehung tritt das Waſſer aus dem 2ten Gange in den 3ten, aus dem 1ten (allemal über MN gerechnet) in den 2ten und aus dem Waſſer unter MN wieder in den 1ten u. ſ. f.

Auf ſolche Weiſe wird nach und nach ieder einzele Gang bis zum oberſten mit derſelben Waſſermaſſe beſchwert, welche bei der erſten Umdrehung vom erſten Gange über MN geſchöpft wird, und bei ieder ferneren Umdrehung wird iedesmal die ganze Waſſermaſſe, die im oberſten Gange enthalten iſt, bei u ausgegoſſen.

Erklärung 42.

§. 148. Man erhält den ſchraubenförmigen Kanal durch zwei parallele bretterne Wände, die, aus einzelen Brettſtücken zuſammengeſetzt, ſchraubenförmig in den äuſſern Umfang der Spindel eingeſetzt werden. Der Rand von ieder dieſer beiden Wände wird durchaus mit einem ſchraubenförmig herumgelegten Faden belegt, hiernächſt werden der Spindelaxe parallel Bretter zur Bedeckung des Kanals aufgenagelt, wobei wiederum zwiſchen iedem Paar Brettern, zur Verwahrung der Fugen, ein Faden durchgezogen wird.

Dieſe bretterne Bedeckung heißt der **Mantel.** Derienige Theil eines Ganges, welcher mit Waſſer angefüllt iſt, heißt der **waſſerhaltige Bogen.**

Es

Es können auch mehrere ſolche Kanäle um eine Spindel geführt werden, die einen gemeinſchaftlichen Mantel bekommen. Daraus entſtehen **doppelte** und **dreifache Schnecken.**

Erklärung 43.

§. 149. Hier verdienen beſonders drei Winkel bemerkt zu werden.

1.) Der Winkel vrs, welchen die Spindelaxe vr mit der in derſelben lothrechten Ebene liegenden horizontalen sr macht. Ich nenne ihn den **Standwinkel.**

2.) Der Winkel, welchen die centriſche Linie des Schneckengangs mit einer auf die Axe ſenkrechten Ebene macht. Ich nenne ihn den **Schneckenwinkel.**

3.) Der Winkel, welchen die centriſche Linie des Schneckengangs bei aufgeſtellter Maſchine mit einer horizontalen Ebene macht. Ich nenne ihn den **Fallwinkel**, weil er derjenige Winkel iſt, unter welchem das in den Gängen ſich fortbewegende Waſſer aus jedem unteren Gange in den nächſtfolgenden fällt.

Aufg. 38.

§. 150. MN (fig. 83) ſey eine Horizontallinie; in der durch dieſe Horizontallinie gehenden lothrechten Ebene ſey edc ein willkührlich genommener Winkel $= \eta$; in derſelben lothrechten Ebene gehe die übrigens willkührlich gezogene vr ſenkrecht durch die cd, ſo daß ſie die horizontale MN unter

einem Winkel ϑ ſchneidet; dg ſey der MN gleichlaufend: man ſucht den Winkel edg = ε, den die de mit der horizontalen dg macht.

Aufl. Man verlängere die de bis ſie in f die MN ſchneidet, ſo iſt

$$dcM = \eta + \varepsilon, \quad \text{und}$$
$$\vartheta = 90° - (\eta + \varepsilon)$$

alſo

$$\varepsilon = 90° - (\eta + \vartheta)$$

Zuſ.

§. 151. Bei unſerer Maſchine kann ϑ den Standwinkel, η den Schneckenwinkel und ε den Fallwinkel bezeichnen.

Demnach iſt der Winkel, unter welchem das Waſſer bei der archimediſchen Schnecke durch die nach einander folgenden Gänge fällt, allemal =

$$90° - (\eta + \vartheta)$$

Soll alſo das Waſſer, das hier bloß der Wirkung der Schwere überlaſſen bleibt, bei Umdrehung der Spindel aus einem Gang in den andern ſich fortbewegen können, ſo muß

$$\eta + \vartheta < 90°$$

ſeyn, weil ſonſt kein Fallen möglich wäre.

In der Ausübung nimmt man gerne den Standwinkel (ϑ) zwiſchen 40 und 60 Graden, und den Schneckenwinkel (ε) zwiſchen 20 und 10 Graden, ſo daß $\eta + \vartheta$ zwiſchen 60 und 70 Grade fällt.

Anm. 1. Es wird allemal nur ein gewiſſer Theil eines Schneckengangs mit Waſſer angefüllt, deſſen genaue Beſtim-

ſtimmung äuſſerſt ſchwierig iſt, deſto ſchwieriger, ie weiter die Gänge ſind.

Wenn der Kreis, in welchem die Schöpföffnung n herumlauft, nicht ganz unter Waſſer liegt, ſondern vor ſeinem Umfang ein Bogen, der in Graden $= 2\alpha$ iſt, über die Waſſerfläche hervorragt, ſo faßt die Schnecke unter ſonſt gleichen Umſtänden die größtmögliche Waſſermenge, wenn

$$\sin\alpha = \tan\eta \,.\, \tan\vartheta$$

iſt.

II. Wenn man $\tan\eta \,.\, \tan\vartheta = T$ ſetzt, und α' durch die Formel

$$T \,.\, \text{Bogenlänge}\,\alpha' + r \,.\, \text{Coſ}\,\alpha' = T \,.\, \text{Bogenlänge}\,\alpha + r \,.\, \text{Coſ}\,\alpha$$

mittelſt einiger Rechnungsproben ſucht, ſo wäre, woferne ſich alles Waſſer in der centriſchen Linie eines Schneckenganges befände, die Länge eines waſſerhaltigen Stücks eines ieden Schneckenganges =

$$(\text{Bogenlänge}\,\alpha' - \text{Bogenlänge}\,\alpha) \,.\, \sec\eta$$

wo nämlich die Bogenlängen für den Halbmeſſer der Schnecke, d. i. für die Entfernung der centriſchen Linie von der Spindelaxe berechnet werden.

Wenn alſo die Weite oder der Querſchnitt eines Schneckengangs W heißt, und die geſammte in der Schnecke enthaltene Waſſermenge = Q geſetzt wird, ſo hat man, woferne die Schnecke n Gänge führt,

$$Q = n \,.\, W \,.\, \sec\eta \,.\, (\text{Bogenl.}\,\alpha' - \text{Bogenl.}\,\alpha)$$

Aber in der Ausübung, wo das Waſſer nicht in der centriſchen Linie beiſammen iſt, weicht dieſe Formel deſtomehr von der Wahrheit ab, ie weiter die Gänge ſind.

In Rückſicht auf die Berechnung des Effekts wird es für die Ausübung genügen,

$$Q = \tfrac{2}{3}\, n W \,.\, \sec\eta \,.\, (\text{Bogenl.}\,\alpha' - \text{Bogenl.}\,\alpha)$$

anzunehmen.

III. Eine in der Entfernung $\mathfrak{L}$ von der Spindelaxe angebrachte Kraft, die der geſammten Waſſerlaſt das Gleichgewicht zu halten vermag, heiſſe p; die Höhe eines Schraubenganges, die centriſche Linie als die Schraubenlinie angenommen, heiſſe l; ſo iſt

$$p = \frac{l . \sin \vartheta}{2 \pi \mathfrak{L}} . Q$$

Wird die Summe der Nebenhinderniſſe, auf die Entfernung $\mathfrak{L}$ von der Axe gebracht, mit Φ bezeichnet, und die Kraft, welche dem geſammten Widerſtand das Gleichgewicht hält, mit P, ſo hat man

$$P = \frac{l . \sin \vartheta}{2 \pi \mathfrak{L}} . Q + \Phi$$

IV. Bei ieder Umdrehung wird eine Waſſermenge = $\frac{1}{n}$ Q ausgeſchüttet.

Iſt alſo die Zeit eines Umgangs in Sekunden = t, ſo ſchüttet die Maſchine in t Sekunden eine Waſſermenge

$$M = \frac{1}{n} Q$$

aus.

V. Wird die Schnecke von Menſchen betrieben, ſo wechſeln dabei die Arbeiter gewöhnlich ab, und dann kann die Kraft eines Menſchen dem Gewicht von $\frac{1}{2}$ Par. Kub. Fuß Waſſer gleich geſetzt, auch ſeine Geſchwindigkeit = $2\frac{1}{4}$ Par. Fuß angenommen werden.

Iſt nun N die Anzahl der zugleich angreifenden Arbeiter, ſo hat man, in Bezug auf Par. Kub. Fuſſe Waſſer,

$$P = N . \tfrac{1}{2}, \text{ und } t = \frac{2 \pi \mathfrak{L}}{2{,}25} = \tfrac{8}{9} \pi \mathfrak{L} \text{ Sek.}$$

wo $\mathfrak{L}$ ſich auf Par. Fuſſe beziebt.

Demnach (no. III)

$$\tfrac{1}{2} N = \frac{l . \sin \vartheta}{2 \pi \mathfrak{L}} . Q + \Phi$$

oder

$$N = \frac{l . \sin \vartheta}{2 \pi \mathfrak{L}} . Q + 2 \Phi$$

oder, den Unterſchied beider Bogenlängen (no. II) = D geſetzt,

$$N = \frac{2 l . \sin \vartheta}{3 . \pi l} . nW . \sec \eta . D + 2 \Phi$$

Auch hat man

$$M = \frac{1}{n} Q = \tfrac{2}{3} W . \sec \eta . D$$

alſo

$$W = \frac{1{,}5 . M}{D . \sec \eta}$$

und

$$N = \frac{l . \sin \vartheta . n . M}{\pi . \mathfrak{L}} + 2 \Phi$$

Wenn übrigens gleich die Formel für Q (no. II) der Erfahrung nur beiläufig entſpricht, ſo bleiben doch dieſe Berechnungen brauchbar, weil der Erfolg einer etwaigen Abweichung nur der wäre, daß eine etwas geringere oder etwas gröſſere Laſt mit einer etwas gröſſeren oder etwas geringeren Geſchwindigkeit betrieben wird, als man vorausgeſetzt hat.

Ausführlicher habe ich dieſe Maſchine in der hier unten angezeigten Schrift betrachtet. Beſonders hat ſich Hr. Eytelwein ſehr viele Mühe gegeben, die Reſultate der Theorie denen der Erfahrung bei dieſer Maſchine näher zu bringen. Er hat hierüber eine groſſe Menge von Verſuchen angeſtellt, deren Reſultate mit ſeinen Berechnungen trefflich zuſammenſtimmen. Inzwiſchen betrug die gröſte

Waſſer-

Waſſermenge, welche ſeine Maſchine bei einer Umdrehung ausſchüttete, noch nicht 20 Kub. Zolle, und es läßt ſich daher auf gleichgute Zuſammenſtimmung mit Erfahrungen im Groſſen noch nicht ſchlieſſen.

Hierher gehörige Schriften.

Vitruvius Pollio, Baukunſt, aus der römiſchen Urſchrift überſetzt von Rode, Leipz. 1796. 2ter B.

Leupold, angef. Theatr. machin. hydraul. I. Th.

Pitot, Théorie de la Vis d'Archimede. Mem. de l' Acad. des Sc. ann. 1736.

D. Bernoulli, Hydrodynamica ſiue de viribus et motibus fluidorum commentarii. Argentor. 1738.

Euler, de cochlea Archimedis. Comment. Nou. Petrop. T. V.

Hennert, Diſſertation ſur la Vis d'Archimede, qui a remporté le prix de mathematique adjugé par l'Acad. roy. des Sc. et belles-lettres de Pruſſe, 1766; à Berlin 1767. — Sie iſt einer Abh. ſur la Nutrition in fortlaufender Seitenzahl beigedruckt.

Woltmann, Beiträge zur Hydrauliſchen Architektur, 4ter Band.

Karſten, angef. Lehrbegr. VI. Th.

Langsdorf, angef. Lehrb. d. Hydraul.

Eytelwein, angef. Handb. d. Mech.

Ein und zwanzigſtes Kapitel.
Von der Spiralpumpe.

Erklärung 44.

§. 152. Man denke ſich eine um eine horizontale eiſerne Stange oder andere Welle xy (fig. 84) ſich herumſchlängelnde Röhre abc df...nopqrs, deren eines Ende α bei der Umdrehung der Welle zum Theil durch die Luft, zum Theil durch Waſſer durchgeht, und deren anderes Ende bei s mit einer Röhre tx verbunden iſt, die in eine Steigröhre eingreift, in die ſie zwar luft- und waſſerdicht einpaßt, in der ſie ſich aber doch bei Umdrehung der Welle xy, die Reibung bei Seite geſetzt, frei herumdreht, ſo hat man die Wirziſche Spiralpumpe. Das erweiterte Ende bei a heißt das Horn.

Anm. Andrea's Wirz, ein Zinngieſſer in Zürch, hat dieſe Spiralpumpe ums J. 1746 erfunden. Ich halte ſie bei aller Simplicität für eine der ſinnreichſten Erfindungen in der Maſchinenlehre. In ihr findet man Wirkungen der archimediſchen Schnecke mit Wirkungen des Heronsbrunnens vereint. Die Eigenſchaft der Luft, Druck fortzupflanzen, iſt dabei ungleich beſſer und vortheilhafter benutzt worden, als bei der Hölliſchen Heronsmaſchine.

Sie bringt das Waſſer auf folgende Weiſe zum ſteigen.

Wirkungsart.

Beim Herumdrehen der Welle ſchöpft das Horn Waſſer und alle Gänge werden völlig auf die Weiſe wie

wie bei der archimediſchen Schnecke bei fortgeſetzter Umdrehung mit Waſſer beſchwert, ſo daß waſſerhaltige und lufthaltige Bögen mit einander abwechſeln, nämlich

waſſerhaltige Bögen	lufthaltige Bögen
s · 1	1 · 2
2 · 3	3 · 4
4 · 5	5 · 6
6 · 7	7 · 8
8 · 9	9 · 10

Nun ſtehe im Falle des Gleichgewichts das Waſſer in der Steigröhre bis v, ſo daß $v - 1$ lothrecht gemeſſen $= H$ ſey; die Höhe einer Waſſerſäule, mit der die Elaſticität der freien atmoſphäriſchen Luft im Gleichgewicht iſt, ſey $= k$; ſo iſt der Druck oder die Dehnkraft der verſperrten Luft bei 1, wenn die Röhrenweite $= W$ iſt,

$$= (k+H) . W$$

Wenn nun die Unterſchiede der Waſſerhöhen in den verſchiedenen Schenkeln auf folgende Weiſe bezeichnet werden

$$p3 - p2 = h'$$
$$l5 - l4 = h''$$
$$h7 - h6 = h'''$$

ſo iſt

der Druck des Waſſers oder die Dehnkraft der verſperrten Luft bei 3 . . . . $= (k+H-h')W$

der Druck bei 5 . . . . $= (k+H-h'-h'') . W$

. . . bei 7 . $= (k+H-h'-h''-h''') . W$

. . . bei 9 $= (k+H-h'-h''-h'''-h'''') . W$

Steht

Steht nun das Horn a auſſer dem Waſſer, ſo iſt die Dehnkraft der Luft, die durch das Horn gegen das Waſſer bei 9 druckt, bloß $= k . W$; folglich wäre für den Fall des Gleichgewichts

$$k + H - (h' + h'' + h''' + h'''') = k$$

d. i.

$$H = h' + h'' + h''' + h''''$$

Man ſieht alſo, daß die Preſſung des Waſſers in den verſchiedenen Gängen von 9 bis 1 aus den Differenzen der Waſſerhöhen in den verſchiedenen kommunicirenden Schenkeln zuſammengeſetzt ſeyn müſſe.

Aufg. 39.

§. 153. Die Anzahl und Abmeſſungen der Gänge einer Spiralpumpe iſt gegeben, man ſoll einen allgemeinen Ausdruck für die Summe der Preſſungen angeben, welche bei 1 dem Waſſer in der Steigröhre im Falle des Gleichgewichts entgegen wirken.

Aufl. 1. Die Längen der lufthaltigen Bögen bezeichne man ſo:

den 2 . 1 mit λ'
4 . 3 — λ''
6 . 5 — λ'''
8 . 7 — λ''''

und

die Höhe d . 9 mit $\mathfrak{h}$

ſo iſt

die in 7 . 8 verſperrte Luft, auf die Dichtigkeit der freien atmoſphäriſchen reducirt,

$$= \frac{k + h''''}{k} . \lambda'''' . W$$

Weil

Weil aber in allen lufthaltigen Bögen gleichviele atmoſphäriſche Luft enthalten ſeyn muß, ſo ergiebt ſich hieraus

$$\frac{k+H}{k} \cdot \lambda' \cdot W = \frac{k+h''''}{k} \cdot \lambda'''' \cdot W$$

Wenn nun die Entfernung der beiden Linien AB, CD die ganze Höhe von der centriſchen Linie der Spiralbögen oder den Durchmeſſer eines Cylinders bezeichnet, in welchen ſich die centriſche Linie der Spiralbögen gerade einſchieben lieſſe, und dieſe Entfernung mit D bezeichnet wird, ſo kann man $h'''' = D$ ſetzen, und wenn η, wie bei der archimediſchen Schnecke, den Winkel bezeichnet, welchen die centriſche Linie eines Gangs mit einer auf die Axe xy ſenkrechten Linie macht, ſo hat man

$$\frac{k+H}{k} \cdot \lambda' \cdot W = \frac{k+D}{k} \cdot \frac{\pi D}{2 \sin \eta} \cdot W$$

alſo

$$\lambda' = \frac{(k+D) \cdot \pi D}{2 \cdot (k+H) \cdot \sin \eta}$$

wo H die Höhe des Waſſerdrucks über CD ausdruckt.

2. Hieraus ergiebt ſich die Länge des waſſerhaltigen Bogens $3p2 = \frac{\pi \cdot D}{\sin \eta} - \frac{(k+D) \cdot \pi D}{2(k+H) \cdot \sin \eta}$

und

$$\text{Bogenſtück } p2 = \frac{\pi D}{2 \cdot \sin \eta} - \lambda'$$

$$= \frac{\pi D \cdot ((k+H)-(k+D))}{2 \cdot (k+H) \cdot \sin \eta}$$

Die

Die lothrechte Höhe, welche zu dem Bogen 2·1 gehört, will ich ſo ausdrucken

Höhe λ'

ſo iſt

$$h' = \text{Höhe } \lambda'$$

Es iſt aber die Höhe des Spiralbogens λ' oder $\frac{(k+D).\pi D}{2.(k+H).\sin\eta}$ einerlei mit der Höhe des Kreisbogens, der $= \frac{(k+D).\pi D}{2(k+H)}$ und deſſen Durchmeſſer $= D$ wäre.

Der Quadrant von dieſem Halbmeſſer iſt $= \frac{1}{4}\pi . D$ und

$$h' = \tfrac{1}{2}D + \sin \text{Bog}\left(\frac{(k+D).\pi D}{2.(k+H)} - \tfrac{1}{4}\pi D\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}D + \tfrac{1}{2}D . \sin \text{Bog}\left(\frac{(k+D).\pi}{k+H} - \tfrac{1}{2}\pi\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}D + \tfrac{1}{2}D . \sin \text{Bog}. \frac{(k+2D-H).\pi}{2.(k+H)}$$

Es iſt aber, wenn dieſer Bogen β heißt,

$$\sin \text{Bog}\, \beta = \beta - \frac{\beta^3}{6} + \frac{\beta^5}{120} - \text{ꝛc.}$$

wovon hier die beiden erſten Glieder hinlänglich ſind. Alſo

$$h' = \tfrac{1}{2}D - \tfrac{1}{2}D . (\beta - \frac{\beta^3}{6})$$

3. Betrachtet man nun die Werthe von h,, h'', h''' ꝛc. als eine arithmetiſch ſteigende Reihe, deren letztes

tes Glied allemal = D iſt, ſo hat man für n Glieder, d. i. für n Gänge (§ 152)

$$H = \tfrac{1}{2}n\,.\,(h' + D)$$

alſo vermöge (no. 2)

$$H = \tfrac{1}{2}n\,.\Big(\tfrac{1}{2}D + \tfrac{1}{2}D\,.(\beta - \frac{\beta^3}{6}) + D\Big)$$

$$= n\,.\Big(\tfrac{3}{4}D + \tfrac{1}{4}D\,.\,\frac{(k+2D-H)\,.\,\pi}{2\,.(k+H)}$$

$$+ \tfrac{1}{4}D\,.\,\frac{(k+2D-H)^3\,.\,\pi^3}{6\,.\,8\,.(k+H)^3}\Big)$$

oder H =

$$\tfrac{1}{4}nD.\Big(3 - \big(\frac{H-(k+2D)}{2\,.(k+H)}\,.\pi + \tfrac{1}{6}\big(\frac{(H-(k+2D))}{2\,.(k+H)}\big)^3.\pi^3\big)\Big)$$

4. Wäre H nicht ſehr viel von k verſchieden, ſo dürfte man ſchlechtweg

$$H = \tfrac{1}{4}nD\,.\,\big(3 - \frac{H-(k+2D)}{2\,.(k+H)}\,.\,\pi\big)$$

ſetzen; dieſes gäbe

$$H = -\frac{8k - 6nD + \pi nD}{16}$$

$$+ \sqrt{\Big(\big(\frac{8k-6nD+\pi nD}{16}\big)^2 + \frac{\pi nD.(k+2D)+6nDk}{8}\Big)}$$

Es ſey z. B. n = 8, D = 6 Fuß, k = 32, ſo findet man

$$H = 37{,}6 \text{ Fuß}$$

Dabei wird allemal der erſte Gang vom erſten Waſſerbogen (z. B. fig. 84. von 9 bis 7) an gerechnet.

Zuſ.

Zuſ.

§. 154. Die ſo beſtimmte Höhe H iſt die Höhe des Waſſerdrucks, mit der die ſämmtlichen Preſſungen bei 1 im Gleichgewicht ſind.

Die Höhe, zu der das Waſſer in der Steigröhre über die Stelle 1 erhoben werden kann, heiſſe ℌ, ſo iſt ℌ beträchtlich gröſſer als H, weil die in der Steigröhre enthaltene Waſſermaſſe durch die dazwiſchen liegenden Luftmaſſen getrennt wird, ſo daß von oben herab in der Steigröhre Waſſer und Luftſäulen mit einander abwechſeln, woferne ſich nicht Waſſer und Luft mit einander vermengen.

Anm. Da das Gewicht der Luft in Vergleichung mit der des Waſſers hier bei Seite geſetzt werden kann, ſo erhellet, daß dieſe Abwechſelung oder Vermengung des Waſſers mit Luft in der Steigröhre die Förderungshöhe vergröſſert, ohne zugleich die Laſt in der Steigröhre zu vergröſſern. Dennoch wird hierdurch der Effekt der Maſchine gar nicht vergröſſert, weil ebendarum auch allemal ein Theil der Umdrehung der Walze bloß den Erfolg hat, daß Luft aus der Steigröhre kommt, daß alſo die zur Umdrehung der Welle erfoderliche Kraft zum Theil ohne Wirkung verwendet werden muß. Uebrigens iſt es wohl eine vergebliche Bemühung, allgemeine Berechnungen über den Effekt dieſer Maſchine anſtellen zu wollen, da die Luft in der Steigröhre das Waſſer bald in beſondere Säulen trennt, bald ſich mit demſelben vermengt, bald in gröſſeren und kleineren Blaſen durch das Waſſer hinauf ſteigt. Schon dieſes wird mich entſchuldigen, wenn ich mich hier in keine tiefere Unterſuchungen einlaſſe. Ob übrigens dieſe Maſchine, wie Hr. Eytelwein behauptet, allen übrigen Schöpfmaſchinen vorzuziehen ſey, getraue ich um ſo weniger zu entſcheiden, als mir eigene Erfahrungen über dieſe Maſchine fehlen. Die oben beſchriebenen Schöpfräder werden

wenigſtens zur Wieſenbewäſſerung durch ſie nicht verdrängt werden.

Hierher gehörige Schriften.

Abhandl. der Naturforſchenden Geſellſchaft in Zürich vom J. 1766.

Neue Abh. der Königl. Schwed. Akad. d. Wiſſ. 4ter u. 5ter Bd.

Eytelwein, angef. Handb. der Mech.

Zwei und zwanzigſtes Kapitel.

Von den Püſchel- oder Paternoſterwerken, Kaſtenkünſten und Schaufelwerken.

Erklärung 45.

§. 155. Um zwei prismatiſche Wellen, deren horizontale Axen in einer lothrechten Ebene liegen, denke man ſich eine Kette ohne Ende gelegt, an der in gewiſſen Entfernungen von einander Käſten befeſtigt ſind, ſo hat man eine Kaſtenkunſt. Die untere Welle liegt im Waſſer; beim Herumdrehen der oberen gehen die Käſten auf der einen Seite nieder, ſchöpfen unter der unteren Welle Waſſer und gehen ſo gefüllt auf der entgegengeſetzten Seite wieder hinauf, ſtürzen ſich, indem ſie über die obere Welle herumgehen, um und gieſſen da ihr Waſſer aus.

Zuſ.

Zuſ.

§. 156. In einer gewiſſen Entfernung von der Umdrehungsaxe wirke eine bewegende Kraft F mit der Geſchwindigkeit C; die Reibung und ſonſtige Nebenhinderniſſe, auf dieſelbe Entfernung gebracht, heiſſe ϕ; die Waſſermenge, welche die Maſchine in der Zeit T auf die Höhe H bringt, heiſſe im kubiſchen Maaſe M, ſo iſt

$$M = \frac{(F - \phi) . C . T}{H}$$

Erklärung 46.

§. 157. Statt der Käſten denke man ſich lederne ausgeſtopfte Kugeln oder gelinderte maſſive Scheiben an einer Kette ohne Ende, die beim Aufſteigen durch eine Röhre durchgehen, an deren Wände ſie genau anpaſſen, ſo hat man ein Paternoſterwerk oder Roſenkranzmühle. Insbeſondere heißt dieſe Maſchine auch ein Püſchelwerk, wenn die Kette ohne Ende keine Scheiben, ſondern ausgeſtopfte Kugeln oder elliptiſche Sphäroiden führt.

Zuſ.

§. 158. Für die Püſchelwerke iſt wie für die Kaſtenkünſte allgemein

$$M = \frac{(F - \phi) . C . T}{H}$$

Die Püſchel müſſen nicht zu gedränge durch die Steigröhre durchgehen.

Es ſey nun die Reibung der ſämmtlichen Püſcheln in der Steigröhre ſo groß, als das Gewicht einer Waſſermaſſe, deren kub. Inhalt $= \phi'$

Die Höhe vom untern Waſſerſpiegel bis zur Ausgußrinne in der Steigröhre . . $= H$

Der Halbmeſſer der Wellzapfen . . $= \varrho$

Die mittlere Entfernung der Laſt von der Wellenaxe . . . . . . $= r$

Die Entfernung der von der Kraft angegriffenen Stelle von der Wellenaxe . . $= R$

Die Weite der Steigröhre, oder ihr innerer Querſchnitt . . . . $= w$

Der kubiſche Inhalt eines Püſchels ſamt zugehörigem Kettenſtück . . . $= K$

Die Länge eines Püſchels ſamt zugehörigem Kettenſtück . . . . $= \lambda$

Die ſpec. Schwere des aufzufördernden Waſſers $= \sigma$

Für ſüſſes Waſſer iſt $\sigma = 1$

Das Gewicht der Kette gleiche dem Gewicht einer Waſſermenge, deren kubiſcher Inhalt $= \mathfrak{K}$

Das Gewicht der oberen Welle ſamt Zapfen gleiche dem einer Waſſermaſſe, deren kubiſcher Inhalt . . . . $= \mathfrak{k}$

Die Reibung an den Zapfen auf die Entfernung R reducirt gleiche dem Gewicht einer Waſſermaſſe, deren kubiſcher Inhalt . $= \Phi''$

ſo findet man

$$\Phi'' = \frac{\varrho}{R} \times$$

$$\left(\frac{R+r}{10.R} . (H.\sigma.(w - \frac{K}{\lambda}) + \Phi') + \frac{\mathfrak{K}+\mathfrak{k}}{10}\right) \text{Kub. Fuſſe Waſſer}$$

wenn alles in Fuſſen ausgedruckt wird.

Erklä-

Erklärung 47.

§. 159. Man denke ſich eine Kette ohne Ende in gewiſſen Entfernungen von einander mit Schaufelbrettern verbunden und über zwei parallele Wellen gelegt, deren Axen in einer ſchiefen Ebene liegen; im Niedergange gleiten die Schaufelbretter über einen zur Unterſtützung angebrachten ſchiefen Steg ab, und zu gleicher Zeit gehen die aufwärts ſteigenden Schaufelbretter durch einen bloß oben offenen ſchief gelegten parallelepipediſchen Kanal, deſſen unteres Ende im Waſſer ſteht. Dieſe Maſchine heißt ein **Schaufelwerk**; während der Umdrehung der oberen Welle wird unaufhörlich am obern Ende des Kanals Waſſer ausgegoſſen, das iedesmal zwiſchen zweien auf einander folgenden Schaufeln enthalten iſt. Einen beiläufigen Begriff giebt fig. 85.

Zuſ.

§. 160. Es iſt auch hier wie (§. 156)

$$M = \frac{(F - \phi).C.T}{H}$$

Es ſollen σ, R, r, ϱ, K, k und ϕ'' die vorige Bedeutung behalten; überdas ſey

die Anzahl der im Kanale enthaltenen Waſſerprismen . . . . . $= n$

die Höhe eines ieden Schaufelbretts wie a b (fig. 85) . . . . . $= h$

die Länge deſſelben . . . . $= \delta$

ſo daß $\delta . h$ die Gröſſe der Schaufelfläche ausdruckt.

Die Entfernung zweier Schaufeln von einander, wie d e . . . . . $= f$

Der Winkel BAC, unter welchem der Kanal-
boden gegen den Horizont geneigt iſt . $= \eta$

Dieſer iſt dem Winkel gleich, welchen die Ebene, in der beide Wellenaxen liegen, mit dem Horizont macht.

Der kubiſche Inhalt von dem zwiſchen iedem Paar Schaufeln mit Waſſer bedeckten Kettenſtück . . . . . $= k$

ſo iſt, wenn alles in Fuſſen ausgedruckt wird,

$$\Phi'' = \frac{\varrho}{R} \times$$

$$\left(\frac{(R+r).n \sin\eta}{10.R} . \sigma . \left(\frac{\delta f.(2h - f.tg\eta}{2} - k\right) + \frac{\mathfrak{K}+\mathfrak{k}}{10}\right)$$

Anm. 1. Der Kanal kann auch über den Schaufeln eine Bedeckung haben, an die aber die Schaufeln nicht anſtoſſen dürfen. Es kann dadurch das Verſchütten des Waſſers etwas vermindert werden.

Anm. 2. Die Beſtimmung des Winkels η iſt offenbar nicht gleichgültig; ie kleiner er iſt, deſto mehr Waſſer faſſen die Schaufeln zwiſchen ſich, alſo deſto mehr Waſſer wird bei einerlei Geſchwindigkeit der Schaufeln gehoben. Je gröſſer η iſt, deſto kleiner iſt bei derſelben Geſchwindigkeit die in einer beſtimmten Zeit erhobene Waſſermenge, ſo daß ſie, für $\eta = 90^\circ$, $= 0$ ſeyn würde; hingegen nimmt mit Vergröſſerung des Winkels η auch die Laſt ab; es iſt alſo dann auch eine geringere Kraft nöthig. Der gröſte Effekt erfolgt daher bei einem beſtimmten Werthe von η.

Nimmt man mit Belidor $f = h$, ſo findet man für den gröſten Effekt

$$\eta = 37^\circ\ 40'$$

oder

$$CD = \tfrac{2}{3} AC$$

Anm.

Anm 3. Kaſtenkünſte und Büſchelwerke ſind ſehr unvollkommene Maſchinen, die keinen Gebrauch verdienen. Hingegen leiſten die Schaufelwerke beim Waſſerbau, wo ſehr viel Waſſer etwa nicht über 6 bis 8 Fuſſe hoch ausgeſchöpft werden ſoll, und die Arbeit nur auf ein Paar Monathe eingeſchränkt iſt, ſehr gute Dienſte. Die obere Welle wird in ſolchen Fällen von Arbeitern mittelſt Kurbeln herumgetrieben. Sie laſſen ſich zwar auch durch Waſſerräder betreiben, aber ſolche Anſtalten ſetzen einen fortdauernden Gebrauch voraus, wozu ſie nicht empfohlen werden können.

Hierher gehörige Schriften.

Leupold, angef. Theatr. mach. hydraul.

Belidor, angef. Archit. hydraul. I. Th.

Perronet, Deſcript des projets et de la conſtruct. des ponts de Neuille etc. Nouv. Ed, Paris 1788.

Karſten, angef. Lehrbegr. VI. Th.

Langsdorf, angef. Lehrb. der Hydraul.

Drei und zwanzigſtes Kapitel.

Von der Veraſchen waſſerhebenden Seilmaſchine.

Erklärung 48.

§. 161. Man denke ſich zwei eiſerne Stangen oder andere Wellen mit horizontalen in einer lothrechten Ebene liegenden Axen, die untere im Waſſer, welches aufgefördert werden, die obere in der Höhe, zu welcher das Waſſer erhoben werden ſoll; um iede dieſer parallelen Wellen ſeyen Rollen, die an der oberen Welle gerade über den unteren liegend,

ſoviele man will, mit umgelegten Seilen ohne Ende angebracht, ſo daß die Rollen an den Wellen feſt liegen. Man denke ſich eine Vorrichtung zur ſchnellen Umdrehung beider Axen mit ihren Rollen hinzu, ſo hat man die Veraſche Seilmaſchine, bei der die Seile im Durchgehen durch das Waſſer vermöge der Attraktion und Kohäſion mit einer Waſſerrinde theils umgeben theils von Waſſer durchdrungen werden, das bei ſchneller Bewegung der Seilen mit bis zu den oberen Rollen erhoben wird, wo iedes Seil im Niedergange, nahe unter der zugehörigen Rolle, durch eine blechene Röhre durchgeleitet wird, an der ſich das Waſſer ausdruckt und abſtreift.

Anm. 1. Die bloß von der Attraktion und Kohäſion unmittelbar entſtehende Waſſerrinde beſtimmt nebſt der Geſchwindigkeit der Seilen die Waſſermenge, welche erhoben wird. Iſt nämlich die Geſchwindigkeit der Seilen C, der Querſchnitt des vom Waſſer aufgeſchwollenen Seils ſamt dem äuſſeren Waſſerring beim Aufſteigen aus dem Waſſer = W, und der Querſchnitt der Abſtreifröhre = w, ſo iſt die in ieder Sekunde von iedem Seile erhobene Waſſermenge = C. (W — w), woferne übrigens die Geſchwindigkeit, mit der das Waſſer am aufſteigenden Seile ſelbſt wieder herabfließt, kleiner als die Geſchwindigkeit des Seils iſt. Führt alſo die Maſchine an ieder Welle n Rollen, ſo iſt die in ieder Sekunde durch die Maſchine erhobene Waſſermenge = n. C. (W — w). Dabei muß, um nichts zu verliehren, w nur dem Querſchnitte des trockenen Seils gleich oder doch nur wenig gröſſer gemacht werden.

Anm. 2. Die Umdrehung der Wellen mit den Rollen kann bequem durch zwei Rollen oder Scheiben geſchehen, über welche man ein Seil ohne Ende ſo laufen läßt, wie fig. 86. Die obere kleinere Scheibe wird an der verlängerten oberen und die untere viel gröſſere Scheibe an der verlängerten unteren Welle angebracht, die zugleich mit einer Kurbel

bel cd verſehen wird, bei deren Herumtreibung die Maſchine ihre Dienſte thut.

Anm. 3. Die königl. Akad. d. W. zu Göttingen hatte vor etwa 8 Jahren einen Preiß auf die Begründung einer befriedigenden Theorie dieſer Maſchine ausgeſetzt; aber die Frage iſt ganz unbeantwortet geblieben. Dieſes wird mich entſchuldigen, wenn ich auch hier mich in keine theoretiſche Unterſuchungen darüber einlaſſe. Uebrigens iſt ihr Effekt nicht unbedeutend.

Vier und zwanzigſtes Kapitel.

Theorie der Bewegung bei Maſchinen im ungleichförmigen Beharrungsſtande, und insbeſondere der des Krummzapfens.

Aufg. 40.

§. 162. An einer Maſchine ſeyen die ſtatiſchen Momente der Kraft und der Laſt unveränderlich; ſämmtliche mit dem Gange der Maſchine zugleich in Bewegung geſetzte Maſſen denke man ſich nach der Lehre vom Moment der Trägheit auf den von der Laſt angegriffenen Punkt reducirt, ſo daß ſie nach dieſem reducirten Werthe an gedachtem Punkt daſſelbe Moment der Trägheit, alſo denſelben Einfluß auf die Bewegung der von der Kraft angegriffenen Stelle haben, wie an ihren wahren Stellen.

Dieſe

Dieſe reducirte Maſſen denke man ſich in drei Klaſſen abgetheilt; nämlich

I. Die reducirte Gröſſe der beim Gange der Maſchine in beſtändiger Bewegung bleibenden Maſſen ſey - - - = Π

II. Die reducirte Gröſſe der iedesmal nach t Sekunden von neuem aus der Ruhe in Bewegung zu ſetzenden flüſſigen Maſſe = W

III. Die reducirte Gröſſe der iedesmal nach t Sekunden von neuem aus der Ruhe in Bewegung zu ſetzenden Maſſe feſter Körper - - - - = Σ

Der Weg, welchen der Punkt, auf welchen die geſammte Maſſe und die geſammte Laſt reducirt iſt, in t Sekunden durchlauft, ſey - - - = b

Der vom Angriffspunkt der Kraft in eben der Zeit durchloffene Weg - = B

Die auf den gemeinſchaftlichen Punkt reducirte Laſt - - - - = Q

Die für den ungleichförmigen Beharrungsſtand erfoderliche Kraft, vermöge der iener von der Laſt angegriffene Punkt in der Zeit t den Weg b durchlaufen kann - - - - = P

Der beim freien Falle in der erſten Sekunde durchloffene Raum - - = g

Man

Man ſoll eine allgemeine Gleichung zwiſchen dieſen Beſtimmungsſtücken für den Beharrungsſtand *) finden.

Aufl. 1. Die Geſchwindigkeit des Kraftpunktes, die iedesmal nach t Sekunden am größten iſt, heiſſe C; im Augenblick des neuen Angriffs der Maſſe $\Sigma + W$ werde aus ihr die c, ſo iſt, weil im Augenblick dieſes neuen Angriffs bloß der Maſſe Π die Geſchwindigkeit $\frac{b}{B} C$ zukommt, nach geſchehenem Angriff aber die Maſſe $\Pi + \Sigma + W$ zugleich in Bewegung kommt,

$$\Pi . \frac{b}{B} . C = (\Pi + \Sigma + W) . \frac{b}{B} . c$$

alſo

$$c = \frac{\Pi}{\Pi + \Sigma + W} . C \text{ **)}$$

2. Die

*) In dieſem Kapitel iſt der Beharrungsſtand allemal ungleichförmig, daher ich nicht nöthig habe, dieſes Beiwort iedesmal ausdrücklich beizuſetzen. Der Kürze wegen will ich auch den Punkt, auf welchen Maſſe und Laſt reducirt ſind, ſchlechtweg den Laſtpunkt und den von der Kraft angegriffenen den Kraftpunkt nennen.

**) Es verſteht ſich von ſelbſten, daß die Maſſe $\Pi + \Sigma + W$ nie, im ſtrengſten Sinne des Worts, plötzlich die Geſchwindigkeit c erhalte, ſondern daß die Verwandlung der C in die c mit irgend einem kleinen Zeitaufwand τ verbunden ſey. Wäre dieſer Zeitaufwand τ von Bedeutung, ſo käme zu der vom Stoſſe herrührenden Aenderung auch noch die von der in der Zeit τ wirkenden beſchleunigenden Kraft herrührende Geſchwindigkeitsänderung, ſo daß am Ende der Zeit τ nicht mehr $c . (\Pi + \Sigma + W) = \Pi . C$ ſeyn

2. Die beſchleunigende Kraft, welche von dieſem Augenblick an in die Maſſe wirkt, iſt

$$\frac{\frac{B}{b}.P-Q}{\Pi+\Sigma+W}$$

alſo

$$b = t.\frac{b}{B}.c + t^2.\frac{\frac{B}{b}.P-Q}{\Pi+\Sigma+W}.g$$

$$= t.\frac{b}{B}.\frac{\Pi}{\Pi+\Sigma+W}.C + t^2.\left(\frac{\frac{B}{b}.P-Q}{\Pi+\Sigma+W}\right).g$$

3. Am Ende der iedesmaligen Beſchleunigungszeit iſt aus der anfänglichen $\frac{b}{B}.c$ die

$$\frac{b}{B}.c + 2t.\frac{\frac{B}{b}.P-Q}{\Pi+\Sigma+W}.g$$

$$= \frac{b}{B}.\frac{\Pi}{\Pi+\Sigma+W}.C + 2t.\frac{\frac{B}{b}.P-Q}{\Pi+\Sigma+W}.g$$

gewor-

ſeyn könnte. Da aber τ einen äuſſerſt kleinen Theil der geſammten Beſchleunigungszeit ausmacht, ſo erhellet, daß man auch noch am Ende der Zeit τ die Gröſſe der Bewegung $c.(\Pi+\Sigma+W) = C.\Pi$ ſetzen und die Sache ſo anſehen könne, als träte dieſe Verwandlung plötzlich ein. Möchte doch die ganze Maſchinenlehre nur auf ſolchen Fiktionen beruhen!

geworden; ſie iſt aber am Ende der Zeit t allemal $= \frac{b}{B} C$, alſo

$$\frac{b}{B} . C = \frac{b}{B} . \frac{\Pi}{\Pi+\Sigma+W} . C + 2t . \frac{\frac{B}{b} . P - Q}{\Pi+\Sigma+W} . g$$

oder

$$C = \frac{\Pi}{\Pi+\Sigma+W} . C + 2t . \frac{\frac{B}{b} . P - Q}{\Pi+\Sigma+W} . \frac{B}{b} g$$

oder

$$\frac{\Pi+\Sigma+W-\Pi}{\Pi+\Sigma+W} . C = 2t . \frac{\frac{B}{b} . P - Q}{\Pi+\Sigma+W} . \frac{B}{b} . g$$

d. i.

$$C = \frac{B}{b} . \frac{\frac{B}{b} . P - Q}{W+\Sigma} . 2tg$$

alſo

$$\frac{b}{B} . C = \frac{\frac{B}{b} . P - Q}{W+\Sigma} . 2tg$$

4. Dieſen Werth von $\frac{b}{B} . C$ (no. 2) gebraucht, giebt $b =$

$$\frac{2t^2 g . \Pi (\frac{B}{b} P - Q)}{(\Pi+\Sigma+W) . (\Sigma+W)} + \frac{(\frac{B}{b} . P - Q) . t^2 g}{\Pi+\Sigma+W}$$

$=$

$$= \frac{2t^2g.\Pi.(\frac{B}{b}.P-Q)+(\Sigma+W).(\frac{B}{b}P-Q).t^2g}{(\Sigma+W).(\Pi+\Sigma+W)}$$

Daher

$$(\Sigma+W).(\Pi+\Sigma+W).b = t^2g.(\frac{B}{b}P-Q)\times(2\Pi+\Sigma+W)$$

welches die geſuchte Fundamentalformel iſt.

Zuſ. 1.

§. 163. Man hat alſo für den Beharrungsſtand ſolcher ungleichförmigen Maſchinen

$$\frac{B}{b}.P = Q + \frac{(\Sigma+W).(\Pi+\Sigma+W).b}{t^2.g.(2\Pi+\Sigma+W)}$$

oder

$$P = \frac{b}{B}.\left(Q + \frac{(\Sigma+W).(\Pi+\Sigma+W).b}{t^2g.(2\Pi+\Sigma+W)}\right)$$

Für den gleichförmigen Beharrungsſtand wäre nur

$$P = \frac{b}{B}Q$$

Die Ungleichförmigkeit hat alſo den nachtheilichen Erfolg, daß allemal noch eine Ueberwucht

$$V = \frac{b}{B}.\frac{(\Sigma+W).(\Pi+\Sigma+W).b}{t^2g.(2\Pi+\Sigma+W)}$$

erfodert wird.

Dieſe erfoderliche Ueberwucht wird aber deſto kleiner, ie gröſſer Π in Vergleichung mit $\Sigma+W$ iſt.

Wäre

Wäre $\Sigma + W$ in Vergleichung mit Π unbedeutend, ſo könnte man

$$V = \frac{b}{B} \cdot \frac{(\Sigma + W) \cdot \Pi \cdot b}{t^2 g \cdot 2\Pi}$$

ſetzen, oder

$$V = \frac{b}{B} \cdot \frac{(\Sigma + W) \cdot b}{2 \cdot t^2 g}$$

Wäre hingegen Π in Vergleichung mit $\Sigma + W$ als unbedeutend anzuſehen, ſo hätte man ſehr nahe

$$V = \frac{b}{B} \cdot \frac{(\Sigma + W) \cdot (\Sigma + W) \cdot b}{t^2 g \cdot (\Sigma + W)}$$

oder

$$V = \frac{b}{B} \cdot \frac{(\Sigma + W) \cdot b}{t^2 g}$$

Alſo fällt die erfoderliche Ueberwucht allemal zwiſchen die beiden Gränzen

$$\frac{b}{B} \cdot \frac{(\Sigma + W) \cdot b}{2 t^2 g} \text{ und } \frac{b}{B} \cdot \frac{(\Sigma + W) \cdot b}{t^2 g}$$

Zuſ. 2.

§. 164. Wenn daher bei Maſchinen dieſer Art die in beſtändiger Bewegung bleibenden Theile zu wenig Maſſe haben, ſo kann die erfoderliche Ueberwucht dadurch verringert werden, daß Π vergröſſert oder zu dem Ende ein beſonderes Schwungrad angebracht wird, wie oben beim Hornhaſpel. Aus dem vor. §. erſieht man nun die Gränze des Vortheils, welchen ein ſolches Schwungrad verſchaffen kann; es kann nämlich dadurch die erfoderliche Ueberwucht nie über die Hälfte vermindert werden.

Aber der dadurch gewonnene Vortheil muß allemal **weniger als die Hälfte** der Ueberwucht, die für $\Pi = 0$ nöthig wäre, betragen, weil mit Vergröſſerung des Werths von Π zugleich die Reibung, alſo der Werth von Q vergröſſert wird. Da auf ſolche Weiſe im Werthe von P mit Vergröſſerung der reducirten Maſſe Π das zweite Glied (V) abhingegen zugleich das erſte (Q) zunimmt, ſo fällt in die Augen, daß es allemal einen Werth von Π geben müſſe, für welchen die erfoderliche Kraft P am kleinſten wird.

Zuſ. 3.

§. 165. Aus der Gleichung für $\frac{b}{B} . C$ (§. 162) oder aus

$$c = \frac{\frac{B}{b} . P - Q}{\Sigma + W} . 2 tg$$

welches die jedesmal nach t Sekunden eingetretene gröſte Geſchwindigkeit iſt, folgt der merkwürdige Satz:

> die gröſte Geſchwindigkeit, welche der Laſtpunkt bei einer Maſchine im ungleichförmigen Beharrungsſtand jedesmal erreicht, hängt gar nicht von Π ab, inſoferne die von Π herrührende Reibung bei Seite geſetzt wird.
>
> Da aber mit der Vergröſſerung von Π alſo durch die Vorrichtung eines Schwungrades zugleich die Laſt Q vergröſſert wird, ſo wird vielmehr, ſoweit dieſer Einfluß merkbar iſt, die gröſte Geſchwindigkeit

des

des Laſt, alſo auch des Kraftpunktes durch die Vorrichtung eines Schwungrades allemal verringert.

Der Vortheil eines Schwungrades oder überhaupt des vergröſſerten Werthes von Π beſteht alſo darin, daß dadurch die kleinſte Geſchwindigkeit der gröſten näher gebracht und eben dadurch eine gröſſere mittlere Geſchwindigkeit bewirkt werden kann.

Aufg. 41.

§. 166. An einer hierher gehörigen Maſchine ſey irgendwo um eine beſtändig herumlaufende Welle ein Kranz oder Ring von beſtimmter Materie angebracht; man ſoll ſeine vortheilhafteſten Abmeſſungen angeben.

Aufl. 1. Es kommt hier darauf an, denjenigen Werth von Π zu ſuchen, für welchen

$$Q + \frac{(\Sigma + W).(\Pi + \Sigma + W).b}{t^2 g.(2\Pi + \Sigma + W)}$$

bei einer beſtimmten Nutzlaſt ein minimum wird.

2. Zu dem Ende theile ich Π in zwei Theile Π′ und Π″; weil es nämlich Fälle geben kann, wo die vortheilhafteſten Abmeſſungen eines Kranzes beſtimmt werden ſollen, der ſchon um der Feſtigkeit willen eine beſtimmte Breite und Dicke haben muß, wie die Kränze der Waſſerräder, ſo ſey

die reducirte Maſſe eines Kranzes, deſſen Abmeſſungen ganz von unſerer Willkühr abhängen, die alſo als veränderlich angenommen werden können, ... $= \Pi'$

 die

die reducirte Maſſe aller übrigen in Bewegung bleibenden Theile . . . $= \Pi''$

Eben ſo will ich von der geſammten Laſt Q dieienige abrechnen, welche durch die von Π' herrührende Reibung verurſacht wird; es ſey alſo

die auf den Laſtpunkt gebrachte geſammte Laſt, auſſer der von Π' herrührenden Reibung $= Q'$

die von Π' herrührende Reibung auf den Laſtpunkt gebracht . . . . $= F'$

ſo hat man

$$\Pi = \Pi' + \Pi''$$
$$Q = Q' + F'$$

und nun kommt es alſo darauf an, daß

$$F' + \frac{(\Sigma + W).(\Pi' + \Pi'' + \Sigma + W).b}{t^2 g.(2\Pi' + 2\Pi'' + \Sigma + W)}$$

ein minimum werde, weil Q' ietzt als unveränderlich angeſehen werden muß.

3. Die Dicke eines Kranzes, parallel mit der Umlaufsaxe verſtanden, heiſſe δ, ſeines äuſſeren Umfanges Halbmeſſer ſey $= \mathfrak{R}$, ſeines inneren $= r$, alſo ſeine Breite $= \mathfrak{R} - r$, und ſein kubiſcher Inhalt $= \delta . 3{,}14 . (\mathfrak{R}^2 - r^2)$; ſeine ſpec. Schwere ſey $= \sigma$, die des Waſſers $= 1$ geſetzt, ſo iſt ſeine Maſſe $=$

$$3{,}14 . \delta . \sigma . (\mathfrak{R}^2 - r^2) \text{ Waſſer.}$$

Dieſer Kranz ſey der, deſſen reducirte Maſſe Π' heißt, oder deſſen Moment der Trägheit $= b^2 . \Pi'$ wäre; durchläuft nun ein Punkt in ſeinem äuſſeren Umfange in derſelben Zeit den Weg $n . \mathfrak{R}$, da der Laſtpunkt,

punkt, worauf ſich Π' bezieht, den Weg b durchlauft, ſo iſt

$$\Pi' = \frac{n^2 . 1,57 . \delta . \sigma . (\mathfrak{R}^4 - r^4)}{b^2}$$

4. Der Halbmeſſer der Zapfen, um welche der Kranz herumlauft, ſey $= \varrho$, und der Koefficient für die Reibung am Umfange der Zapfen $= \mu$, ſo iſt

$$F' = \frac{3,14 . n . \mu . \delta . \varrho . \sigma . (\mathfrak{R}^2 - r^2)}{b}$$

5. Setzt man alſo

$$\frac{3,14 . n . \mu . \varrho . \sigma . (\mathfrak{R}^2 - r^2)}{b} = \mathfrak{A}$$

$$(\Sigma + W) . (\Pi'' + \Sigma + W) . b = \mathfrak{E}$$

$$(\Sigma + W) . \frac{1,57 . n^2 . \sigma . (\mathfrak{R}^4 - r^4)}{b} = \mathfrak{B}$$

$$t^2 g . (2 \Pi'' + \Sigma + W) = \mathfrak{C}$$

$$2 t^2 g . \frac{1,57 . n^2 . \sigma . (\mathfrak{R}^4 - r^4)}{b^2} = \mathfrak{D}$$

ſo ſoll

$$\mathfrak{A} . \delta + \frac{\mathfrak{B} . \delta + \mathfrak{E}}{\mathfrak{D} . \delta + \mathfrak{C}}$$

ein minimum ſeyn.

Die Differentialrechnung giebt für dieſen Fall

$$\delta = \frac{-\mathfrak{C} + \sqrt{\frac{\mathfrak{D}\mathfrak{E} - \mathfrak{B}\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}}}{\mathfrak{D}}$$

Dabei müſſen dann, wenn alles in Fuſſen ausgedruckt wird, Π'', Σ und W in Zahlen ausgedruckt ſeyn, welche ſich auf Kub. Fuſſe Waſſer beziehen, d. h.

d. h. auf Kub. Fuſſe einer Maſſe, deren ſpec. Schwere = 1 iſt.

So wird alſo δ für einen Kranz beſtimmt, der aus einer Materie beſtände, deren ſpec. Schwere gleichfalls die des Waſſers oder = 1 wäre.

Wird alſo die ſpec. Schwere der Materie, woraus der Kranz verfertiget werden ſoll, mit ψ bezeichnet, ſo hat man

$$\delta = \frac{-\mathfrak{C} + \sqrt{\frac{\mathfrak{DE} - \mathfrak{BC}}{\mathfrak{A}}}}{\psi . \mathfrak{D}}$$

Anm. Dieſe wichtige Formel enthält für Maſchinen, von welchen hier die Rede iſt, die ganze Theorie der Schwungräder. Auch enthält ſie die Theorie der Radkränze bei Waſſerrädern in Rückſicht auf die Beſtimmung ihrer vortheilhafteſten Dicke.

Hat man nämlich diejenige Dicke beſtimmt, welche ſchon wegen der Feſtigkeit nöthig iſt, iſt ſolche z. B. = Δ feſtgeſetzt worden, ſo iſt die ganze zum größten Effekt gehörige Dicke = $\Delta + \delta$.

Findet man nun für δ einen verneinten Werth, ſo müßte für den größten Effekt die Kranzdicke weniger als Δ betragen; da aber die Feſtigkeit das erſte Geſetz iſt, ſo müßte in einem ſolchen Falle die Dicke = Δ beibehalten werden.

Hätte ein Rad zwei Kränze, ſo bezieht ſich Δ auf die Summe von den Dicken beider Kränze.

Uebrigens war in dieſem Kapitel bis jetzt von Maſchinen die Rede, bei welchen das ſtatiſche Moment der Laſt als unveränderlich angeſehen werden kann und die Maſſe $\Sigma + W$ plötzliche Geſchwindigkeitsänderungen leidet. Beim Gebrauch des Krummzapfens iſt das Moment von Null bis zum größten Werthe abwechſelnd; für dieſe Fälle folgen nun

Einige

Einige Bemerkungen über die Theorie des Krummzapfens.

Aufg. 42.

§. 167. Es ſey

derienige Theil der Laſt, deſſen ſtatiſches Moment unveränderlich iſt (z. B. die Reibung an den Wellzapfen), auf die Entfernung der Warze von der Umdrehungsaxe gebracht - - - - - - $= q$

der übrige Theil der Laſt, deſſen ſtatiſches Moment ſich mit der Umdrehung der Warze ändert - - - - $= Q$

die Kraft auf ebendieſen Laſtpunkt gebracht $= P$ *)

die zu Q gehörige Maſſe auf denſelben Punkt gebracht - - - - - - $= \mathfrak{Q}$

die zu P gehörige Maſſe eben ſo reducirt $= \mathfrak{P}$

Man ſucht für iede Stelle der Warze in ihrer Kreisbahn, die von der, wo das ſtatiſche Moment der Laſt $Q = 0$ iſt, um den zum Winkel α gehörigen Bogen abſteht, die Geſchwindigkeit der Warze.

Aufl. 1. Die beſchleunigende Kraft heiſſe f, ſo hat man

$$f = \frac{P - q - Q \cdot \sin\alpha}{\mathfrak{P} + \mathfrak{Q} \cdot (\sin\alpha)^2}$$

Pp 4 2. Die

*) ſo verſtanden, daß ihr unveränderliches ſtatiſches Moment $= r \cdot P$ iſt, wenn r die Länge vom Arm des Krummzapfens bedeutet.

2. Die Geſchwindigkeit, welche die Warze für jeden Winkel α hat, heiſſe c; ihre zugehörige Höhe v, die Länge vom Arm des Krummzapfens oder der Abſtand der Warze von der Axe = r, ſo hat man

$$f : 1 = dv : dr . \text{Bog}\,\alpha$$

alſo

$$f = \frac{dv}{r . d\,\text{Bog}\,\alpha}$$

und daher

$$\frac{P - q - Q . \sin\alpha}{\mathfrak{P} + \mathfrak{Q} . \sin\alpha^2} = \frac{dv}{r . d\,\text{Bog}\,\alpha}$$

3. Demnach

$$v = r . \int \frac{P-q}{\mathfrak{P}} . \frac{1 - \frac{Q}{P-q} . \sin\alpha}{1 + \frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{P}} . \sin\alpha^2} . d\,\text{Bog}\,\alpha$$

oder, wenn man

$$\frac{Q}{P-q} = m, \quad \frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{P}} = n$$

ſetzt,

$$v = \frac{(P-q) . r}{\mathfrak{P}} . \int \frac{1 - m . \sin\alpha}{1 + n . \sin\alpha^2}\, d\,\text{Bog}\,\alpha$$

$$= \frac{(P-q) . r}{\mathfrak{P}} . \left(\int \frac{d\alpha}{1 + n . \sin\alpha^2} + \int \frac{d\,\text{Cos}\,\alpha}{1 + n - n . \text{Cos}\,\alpha^2} \right)$$

(Alg.

(Alg. S. 384. II) =

$$\frac{(P-q).r}{\mathfrak{P}} \cdot \left(\frac{\text{Bog. Tang}\left(\tang\alpha \surd(1+n)\right)}{\surd(1+n)} + \right.$$

$$\left. \frac{m}{2\surd(1+n).n} \cdot \text{lnat} \frac{1 + \text{Coſ}\alpha . \surd \frac{n}{1+n}}{1 - \text{Coſ}\alpha \surd \frac{n}{1+n}} \right) + \text{Conſt}$$

(Alg. S. 427. XX. und S. 422 XII)

$$= \frac{(P-q).r}{\mathfrak{P}} \cdot \left(\frac{\text{Bog Tg} \frac{\sin\alpha}{\surd(1-\sin\alpha^2)} . \surd(1+n)}{\surd(1+n)} \right.$$

$$\left. + \frac{m}{2\surd(1+n).n} \cdot \text{lnat} \frac{1 + \surd(1-\sin\alpha^2) . \frac{n}{1+n}}{1 - \surd(1-\sin\alpha^2) . \frac{n}{1+n}} \right)$$

$$+ \text{Conſt.}$$

wo die Konſtante noch beſtimmt werden muß.

Zuſ. 1.

§. 168. Ich nehme nun an, die Bewegung ſey ſchon im ungleichförmigen Beharrungsſtande, und Kraft und Laſt an ſich unveränderlich, ſo daß die Warze beim Hingange und beim Rückgange immer dieſelbe Laſt zu wältigen habe, ſo muß die Warze die beiden Halbkreiſe ihres Umlaufs auf ganz gleiche Weiſe durchlaufen. Setzt man alſo für die Stelle, wie bei w (fig. 87), wo das Moment = 0 iſt, $\alpha = 0$, welches allemal für zwei gegenüber liegende Punkte ſtatt hat, und iſt in der Einen dieſer Stellen die Geſchwindigkeit = C,

 ſo

ſo muß auch für $\alpha = 180^\circ$ dieſe Geſchwindigkeit $= C$ ſeyn.

5. Zwiſchen den beiden einander gegenüber liegenden Punkten (no. 2) ändert ſich nun die Geſchwindigkeit der Warze auf folgende Weiſe.

Indem die Warze von w aus, wo das ſtatiſche Moment der Laſt $Q = 0$ iſt, den oberen Halbkreis durchlauft, hat die Kraft $P - q$ anfänglich eine beträchtliche Ueberwucht $P - q - Q \cdot \sin\alpha$, die aber deſto kleiner wird, ie gröſſer $\sin\alpha$ wird. Solange $P - q$ nicht $< Q \cdot \sin\alpha$ iſt, muß die Bewegung beſchleunigt werden. In dem Augenblick, da $P - q = Q \cdot \sin\alpha$ wird, iſt die Ueberwucht, alſo auch die beſchleunigende Kraft $= 0$, und weiterhin, bei fernerer Vergröſſerung des Winkels α, wird die Ueberwucht verneint, und die Geſchwindigkeit nimmt wieder ab.

6. Alſo iſt die Geſchwindigkeit der Warze für

$$\sin\alpha = \frac{P-q}{Q}$$ ein maximum.

Es ſey z. B. (fig. 87) $\sin\mu = \frac{P-q}{Q}$, ſo iſt a die Stelle für die gröſte Geſchwindigkeit der Warze.

Macht man $\mu + \beta = 90^\circ$ und $\gamma = \beta$, ſo ſind die Sinuſſen aller Winkel von μ an bis an den ſtumpfen wec gröſſer als $\sin\mu$, und es bleibt alſo für alle Stellen von a bis an c die Ueberwucht der Kraft, die in $a = 0$ war, verneint.

Dieſer verneinte Werth wächſt bis in b, dann nimmt er ab bis in c, und wird in c ſelbſt erſt wieder $= 0$.

Alſo

Alſo nimmt die Geſchwindigkeit der Warze von a bis c beſtändig ab, von a bis b immer mehr, von b bis c immer weniger, bis endlich in c ihr Abnehmen aufhört und nunmehr die Ueberwucht wieder beiaht wird.

Sobald alſo $\alpha = 180^\circ - \mu$ geworden iſt, wird die Ueberwucht und die beſchleunigende Kraft wieder beiaht und die Geſchwindigkeit wächſt wieder im übrigen Theile des Halbkreiſes beſtändig fort, bis ſie in d wieder $= C$ wird, wie bei w.

Demnach iſt während der Bewegung der Warze von a bis d ihre Geſchwindigkeit in c am kleinſten; da nun während der Bewegung von w bis a die Geſchwindigkeit in w am kleinſten und die in d der in w gleich iſt, ſo muß die Geſchwindigkeit in c, welche kleiner als in d iſt, noch um ſoviel mehr kleiner als jede Geſchwindigkeit zwiſchen w und a ſeyn.

Folglich iſt die Geſchwindigkeit in c, d. h. die Geſchwindigkeit für $\alpha = 180^\circ - \mu$, überhaupt die kleinſte Geſchwindigkeit der Warze im ganzen Halbkreiſe.

7. Weil nun im ungleichförmigen Beharrungsſtand die Geſchwindigkeit der Warze in w nicht $= 0$, ſondern ſchon $= C$ iſt und in d wiederum $= C$ wird, ſo muß, wenn obiger Werth von v mit $Z + \text{Conſt}$ bezeichnet wird, für den Beharrungsſtand

$$v = Z + \text{Conſt} + \frac{C^2}{4g}$$

geſetzt werden, und für $\alpha = 180^\circ$ muß dieſer Werth $= \frac{C^2}{4g}$, d. i. $\text{Conſt} = -Z$ werden.

Es

Es wird aber, $\alpha = 180^\circ$ geſetzt,

$$Z = \frac{(P-q).r}{\mathfrak{P}} \cdot \frac{m}{2\sqrt{(1+n).n}} \times$$

$$\text{lnat}\, \frac{1-\sqrt{\frac{n}{1+n}}}{1+\sqrt{\frac{n}{1+n}}}$$

alſo nunmehr vollſtändig

$$v = \frac{(P-q).r}{\mathfrak{P}} \cdot \Bigg(\frac{\text{Bog. Tg}(\text{tg}\,\alpha.\sqrt{(1+n)})}{\sqrt{(1+n)}}$$

$$+\frac{m}{2\sqrt{(1+n).n}}\Bigg(\ln\frac{(1+\text{Coſ}\,\alpha.\sqrt{\frac{n}{1+n}}).(1\pm\sqrt{\frac{n}{1+n}})}{(1-\text{Coſ}\,\alpha.\sqrt{\frac{n}{1+n}})(1\mp\sqrt{\frac{n}{1+n}})}\Bigg)\Bigg)+\frac{C^2}{4g}$$

wo das obere oder das untere Zeichen gilt, nachdem $\text{Coſ}\,\alpha$ verneint oder beiaht iſt. Statt $\text{tg}\,\alpha$ kann man nun $\frac{\text{ſin}\,\alpha}{-\sqrt{(1-\text{ſin}\,\alpha^2)}}$ und ſo auch $-\sqrt{(1-\text{ſin}\,\alpha^2)}$ ſtatt $\text{Coſ}\,\alpha$ ſubſtituiren.

Setzt man hiernächſt $\frac{P-q}{Q}$ ſtatt $\text{ſin}\,\alpha$, ſo erhält man den Werth für die Höhe, welche der kleinſten Geſchwindigkeit der Warze zugehört.

Der ſo herauskommende Werth der mit $\frac{(P-q).r}{\mathfrak{P}}$ multiplicirten Gröſſe heiſſe $-\mathfrak{X}$, ſo wird die der kleinſten Geſchwindigkeit zugehörige Höhe

$$= -\frac{(P-q).r}{\mathfrak{P}} . \mathfrak{X} + \frac{C^2}{4g}$$

oder

oder auch, wenn t die Zeit eines halben Umgangs iſt,

$$= - \frac{(P-q).r}{\mathfrak{P}}.\mathfrak{X} + \frac{\pi^2 r^2}{4gt^2}$$

Soll daher die Bewegung der Fortdauer fähig ſeyn, ſo muß

$$\frac{\pi^2 r^2}{4gt^2} - \frac{(P-q).r}{\mathfrak{P}}.\mathfrak{X} > 0$$

oder

$$\frac{\pi^2 r}{4g\,t^2} > \frac{P-q}{\mathfrak{P}}.\mathfrak{X}$$

ſeyn; alſo

$$t < \tfrac{1}{2}\pi.\sqrt{\frac{\mathfrak{P}.r}{g.(P-q).\mathfrak{X}}}$$

Dieſes iſt demnach die Bedingung, unter welcher die Maſchine ihre Bewegung beſtändig fortſetzen kann, oder unter der ſie eines Beharrungsſtandes fähig iſt.

Anm. Die Berechnungen, welche ich über dieſen Gegenſtand im 2ten Bande des Handb. der Maſchinenl. mitgetheilt habe, beruhen zwar mit den gegenwärtigen auf einerlei Betrachtungen. Es iſt aber fürs erſte die dortige Integration mittelſt Reihen äuſſerſt weitläuftig und ermüdend; fürs andere iſt dort die Konſtante des Integrals unrichtig beſtimmt worden; fürs dritte iſt dort unrichtig $P - q = 0{,}637 . Q$ geſetzt worden, denn hiermit wird zugleich angenommen, daß die Kraft in Anſehung des mittleren Momentes von Q keiner Ueberwucht bedürfe, welches falſch iſt, da ſonſten auch kein beſtimmter Werth von t zur Fortdauer der Umlaufsbewegung nöthig ſeyn könnte. Fürs vierte iſt dort ein Hauptrechnungsfehler eingeſchlichen, der nachher in alle folgende Formeln übergegangen iſt.

Zuſ.

Zuſ. 2.

§. 169. So intereſſant auch die vorſtehenden Sätze ſind, ſo wenig ſind ſie doch dazu geſchickt, einen brauchbaren Ausdruck für die Ueberwucht V (wie §. 163) daraus herzuleiten, und ich ſehe mich aufs Neue genöthigt, für die Ausübung bei einer Näherungsmethode ſtehen zu bleiben.

Man denke ſich nämlich die Warze zuerſt in b, wo ſie die mittlere Geſchwindigkeit hat, die ich C nennen will, ſo iſt hier die Gröſſe der Bewegung $= (\Pi+\Sigma+W).C$; kommt ſie in d, ſo iſt die Gröſſe der Bewegung der bewegten Maſſe noch $\Pi.C$; es wird alſo, wenn $\Sigma+W$ als eine unveränderliche Gröſſe nach ihrem mittleren Werth in Rechnung kommt, während der Bewegung der Warze durch den Raum $\frac{1}{2}\pi r$, die Geſchwindigkeit C in die $\frac{(\Pi+\Sigma+W).C-(\Sigma+W).C}{\Pi+W+\Sigma}$

oder in die $C-\frac{\Sigma+W}{\Pi+W+\Sigma}.C$ verwandelt.

Wenn nun dieſes in der Zeit τ geſchieht, und die verzögernde Kraft während dieſer Bewegung als eine unveränderliche Kraft nach ihrem mittleren Werthe durch f ausgedruckt wird, ſo muß

$$2fg.\tau=\frac{\Sigma+W}{\Pi+\Sigma+W}.C$$

ſeyn, alſo

$$f=\frac{(\Sigma+W).C}{(\Pi+\Sigma+W).2g\tau}$$

Wird nun alle auf die Stelle b reducirte Maſſe auſſer Π mit $\Sigma+W$ bezeichnet, ſo iſt für iede andere

dere Stelle dieſe reducirte Maſſe $= (\Sigma + W) . \sin \alpha^2$, und der mittlere Werth für alle mögliche Stellen iſt

$$0,424 . (\Sigma + W)$$

alſo

$$f = \frac{0,424 . (\Sigma + W) . C}{2 g \tau . (\Pi + 0,424 . (\Sigma + W))}$$

Setzt man nun auch die mittlere beſchleunigende Kraft =

$$\frac{P - q - 0,637 . Q}{\Pi + 0,424 (\Sigma + W)}$$

ſo hat man

$$\frac{P - q - 0,637 . Q}{\Pi + 0,424 . (\Sigma + W)} = \frac{0,424 . (\Sigma + W) . C}{2 g \tau . (\Pi + 0,424 . (\Sigma + W))}$$

oder, $\frac{\pi r}{2 \tau}$ ſtatt C geſetzt,

$$\frac{P - q - 0,637 . Q}{\Pi + 0,424 . (\Sigma + W)} = \frac{0,424 . (\Sigma + W) . \pi r}{4 g \tau^2 . (\Pi + 0,424 (\Sigma + W))}$$

alſo

$$(P - q) - 0,637 . Q = \frac{0,424 . (\Sigma + W) . \pi r}{4 g \tau^2}$$

Bezeichnet man nun die Zeit, in welcher die Laſt $\Sigma + W$ den Weg $2 r = wd$ (fig. 87) oder $= bf$ durchlauft, mit t, ſo hat man $t = 2\tau$ und $t^2 = 4\tau^2$

$$P = q + 0,637 . Q + \frac{0,424 . (\Sigma + W) . \pi r}{t^2 . g}$$

und die Ueberwucht

$$V = \frac{0,424 . (\Sigma + W) . \pi r}{t^2 g}$$

wo-

woferne die Kraft gleichfalls in der Entfernung r von der Axe angebracht wird.

Wird der ganze Schub $2r = b$ geſetzt, und iſt die Kraft in der Entfernung R angebracht, ſo hat man

$$V = \frac{0{,}424 . \pi . (\Sigma + W) . b}{2t^2 g} . \frac{r}{R}$$

und

$$P = \left(0{,}637 . Q + q + \frac{0{,}424 . \pi . (\Sigma + W) . b}{2t^2 g}\right) . \frac{r}{R}$$

So wäre alſo die erfoderliche Ueberwucht beim Krummzapfen nur ſo groß, als bei einer Maſchine mit plötzlicher Geſchwindigkeitsänderung (§. 163), wenn bei letzterer die reducirte Laſtmaſſe nur $= 0{,}424 . \pi . (\Sigma + W)$ und dieſe Maſſe in Vergleichung mit Π für nichts zu achten wäre.

Zuſ 3.

§. 170. Hiernach hängt alſo bei einem Rade, das einen Krummzapfen führt, die Bewegung und die Gröſſe der erfoderlichen Kraft gar nicht von der Maſſe des Rades ab, und ein ſolches Rad wäre alſo wie bei Maſchinen, die in einen gleichförmigen Beharrungsſtand treten, deſto vortheilhafter, ie leichter es gebaut iſt, woferne Q unverändert bleibt, wie vorſtehende Berechnungen vorausſetzen. Da aber ſelbſt die Bedingung, unter welcher die Fortdauer der Umlaufsbewegung möglich iſt, einen Werth von t erfodert, welcher von 𝔓 (alſo hier von Π) abhängt, ſo kann die Maſſe des Rades auch für den Werth von P nicht ganz gleichgültig ſeyn. Daher kann die obige Formel für P nur als Näherungsformel unter der Voraus-

ſetzung

ſetzung gelten, daß t nach (§. 168) nicht zu groß genommen werde.

Ueberhaupt erhellet hieraus, daß die Theorie des Krummzapfens hiermit noch keineswegs vollendet iſt.

Fünf und zwanzigſtes Kapitel.
Von den Saugwerken.

Erklärung 49.

§. 171. Die weſentlichen Stücke eines Saugwerks ſind (fig. 88)

das Kolbenrohr oder der Stiefel AB
die Saugröhre CD
der Kolben k.

Der Stiefel iſt eine metallene oder hölzerne cylindriſche Röhre.

Die Saugröhre CD iſt eine mit dem Stiefel entweder unmittelbar oder durch ein Fäßchen, wie F, verbundene Röhre, deren obere Oeffnung mit einer Klappe y (Thürchen, Klappenventil, Stöckel) bedeckt iſt.

In Teutſchland hat man gewöhnlich hölzerne Saugröhren, ſelten metallene. Iſt die Saugröhre aus mehreren Stücken zuſammengeſetzt, wie C, D (fig. 89), ſo heißt das oberſte, worauf die Klappe liegt, das Stöckelkiel, die unteren, wie D, Kielſtücke.

Iſt ein Kielſtück, wie C (fig. 90), in eine andere Röhre es eingeſchoben, ſo heißt die äuſſere es eine **Scheide** oder ein **Schleicher**; ſie dient bei Schachtabteufungen zu der von Zeit zu Zeit nöthigen Verlängerung der Saugröhre.

Wird die Saugröhre an den Stiefel angeſchroben, ſo wird die Klappe auf eine beſondere durchlochte metallene Platte befeſtigt, und nun dieſe Platte zwiſchen dem unteren Kranz des Stiefels und dem oberen der Saugröhre mit eingeſchroben, wie (fig. 91); oder man ſchraubt zwiſchen dieſe beide Kränze ein **Kegelventil** ein, wie (fig. 92 [1]).

Die Kolben der Saugwerke ſind durchbohrte mit Leder umgebene (**verliederte**) Cylinder oder mit Leder bedeckte (**verliederte**) Scheiben, die zur Bedeckung des Durchgangs oder der Durchgänge mit einem Klappenventil, zuweilen auch mit zweien bedeckt ſind.

Sie heiſſen **Eimer-** und **Taſchenkolben** oder **Scheibenkolben**, nachdem ſie mehr Eimer- oder mehr Scheibengeſtalt haben. Die Taſchenkolben verdienen den Vorzug. Einen mit **einer** Klappe zeigt Fig. 92 [2]; einen mit **zwei** Klappen Fig 92 [3]. Zum Annageln des Leders wird die cylindriſche Auſſenfläche zum Theil von oben herab koniſch vereinigt, und das Leder an dieſem koniſchen Stück der Auſſenfläche mit kurzen Nägeln angeſchlagen, wie man in der Zeichnung deutlich ſieht.

Der Raum zwiſchen dem Kolben in ſeinem tiefſten Stande und der Saugrohrklappe heißt der **ſchädliche Raum**, weil ſeine Gröſſe eine beſtimmte Gröſſe nicht überſchreiten darf, woferne der anfänglich mit Luft ausgefüllte Raum vom Kolben herab bis zum Waſſerſpiegel im unteren Behältniß durch den auf-

und

und niederſpielenden Kolben ſtatt der Luft mit Waſſer angefüllt werden ſoll.

Anm. Wer die ſchwierige Theorie der Saugwerke kennen zu lernen wünſcht, wird ſich gefallen laſſen, ſie nach meinem Handbuch der Maſchinenlehre II. Th zu ſtudieren. Sie daraus abzuſchreiben würde für dieſe Anfangsgründe zu weitläuftig ſeyn, wenn mich auch nicht andere Gründe davon abhielten.

Hier begnüge ich mich, nur nachſtehende allgemeine Reſultate mitzutheilen:

Es ſey

die Höhe des Kolbenhubs . . . = b

die Höhe der Saugrohrklappe über dem äuſſeren Waſſerſpiegel . . . . = h

des Stiefels Weite oder Querſchnitt . = $\mathfrak{W}$

die Höhe des ſchädlichen Raums . . = q

die mittlere Weite dieſes Raums . . = w

der kubiſche Inhalt des ſchädlichen Raums . = $\mathfrak{K}$

die Höhe einer Waſſerſäule, welche da, wo die Pumpe ſteht, mit dem Druck der Atmoſphäre im Gleichgewicht ſtehen würde . . = k

Soll nun das Waſſer durch das Spielen des Kolbens aus dem unteren Behältniß bis zur Ausgußrinne gehoben werden können, ſo müſſen die Abmeſſungen ſo gewählt werden, daß

$$h < \frac{b\mathfrak{W}}{\mathfrak{K}+b\mathfrak{W}} \cdot k$$

und zugleich

$$\begin{cases} \text{entweder } \dfrac{\mathfrak{W}}{w} \cdot b + q < h \\ \text{oder } \dfrac{\mathfrak{W}}{w} \cdot b + h \cdot q < 2\sqrt{\dfrac{\mathfrak{W}}{w}\, bk} \end{cases}$$

werde.

Auſſerdem hat man zur Vergröſſerung des Effekts folgende Regeln zu bemerken:

I. Man mache die geſammte Länge der Röhren, welche das Waſſer aus dem unteren Behältniß von der unteren Mündung an bis zum Kolben durchflieſſen muß, ſo klein als es für ihre lothrechte Höhe möglich iſt.

II. Je länger die Röhren ſind, welche die ganze Saugröhre ausmachen, deſto weiter mache man ſie, auch mache man die Ventilöffnungen weit genug. Bei 1 Fuß Geſchwindigkeit des Kolbens iſt die Kolbenöffnung groß genug, wenn ihr Durchmeſſer die Hälfte vom Durchmeſſer des Stiefels beträgt.

III. Wo es angeht, ſetze man allemal zwei Saugwerke von gleichen Abmeſſungen in eine ſolche Verbindung, daß der Kolben des einen niedergeht, wann der des andern gehoben wird, und umgekehrt; d. i. man lege ein doppeltes Saugwerk an.

IV. Bei einem einfachen Saugwerk bringe man einen Windkeſſel nahe an der Saugröhre zunächſt unter dem Stöckel oder der Saugrohrklappe mit dem Stöckelkiel in Verbindung. Auch bei einem doppelten thue man daſſelbe, ſetze aber überdas, woferne die Saugröhren durch Zuflußröhren mit dem unteren Waſſerbehältniß verbunden werden müſſen, zwei gegenüber ſtehende Saugröhren in eine und dieſelbe Zuflußröhre.

V. Man laſſe die Kolben, wo es die Umſtände erlauben, nicht langſamer als mit einer Geſchwindigkeit von 8 Zollen Rhl. in 1 Sek. ſpielen.

VI. Wenn die Höhe vom Waſſerſpiegel bis zum höchſten Kolbenſtand = H, die ganze Länge vom höchſten Kolbenſtand längſt den Röhren bis zur unteren Einflußmündung gemeſſen = λ, die mittlere Geſchwindigkeit des Kolbens = c, die Weite des Stiefels = 𝔚, die der Saugröhre = 𝔴 geſetzt wird, ſo kann man in der Ausübung

$$H = k - \left(\frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{w}} + \frac{1}{H}\right) . c$$

als

als eine empiriſche Regel annehmen. Dieſes giebt für lothrechte Saugröhren

$$H = k - \left(\frac{W}{w} + 1\right) . c$$

und allgemein für alle Saugröhren

$$H = \tfrac{1}{2}\left(k - \frac{W}{w}.c\right) + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\left(k - \frac{W}{w}.c\right)^2 - c.1\right)}$$

VII. Die Formel für P (§. 169. am Ende) läßt ſich hier zur beiläufigen Berechnung ſo anwenden.

Die zur mittleren Geſchwindigkeit des Waſſers in der Saugröhre gehörige Höhe ſetze man $= h$; ſie iſt

$$= \frac{W}{w} . \frac{c^2}{4g};$$

Daraus findet man (Hydraul. §. 35) die von den Röhren herrührende Widerſtandshöhe $= (A + B) . h$.

Der mittlere Druck des Waſſers in der Saugröhre iſt der einer Waſſerſäule von der Höhe $H - \frac{1}{2}b$, alſo leidet der Kolben von unten hinauf von der auf den unteren Waſſerſpiegel wirkenden Atmoſphäre einen Druck

$$= kW - \left((A+B).h + H - \tfrac{1}{2}b\right) \times W$$

Der mittlere Druck der Atmoſphäre und des Waſſers von oben herab iſt =

$$kW + \left(\mathfrak{H} + \tfrac{1}{2}b\right) . W$$

wenn die Höhe der Ausgußrinne über dem höchſten Kolbenſtand $\mathfrak{H}$ heißt.

Demnach bleibt von oben herab noch eine Laſt zu wältigen, die =

$$kW + (\mathfrak{H} + \tfrac{1}{2}b) . W - kW + ((A+B).h + H - \tfrac{1}{2}b) . W$$
$$= ((A+B).h + H + \mathfrak{H}) . W$$

wozu noch die Kolbenreibung Φ kommt.

Die reducirte Waſſermaſſe iſt hier

$$\frac{W}{\mathfrak{w}} \cdot \lambda \mathfrak{W} + (\mathfrak{H} + b) \cdot \mathfrak{W}$$

Wird nun ein doppeltes Saugwerk durch ein Waſſerrad betrieben, deſſen Halbmeſſer = R iſt, ſo iſt des Rades halber Umfang = π . R.

Während der Erhebung des einen Kolbens geht der andere nieder, deſſen Reibung alſo mit überwunden werden muß.

Setzt man alſo die übrigen Hinderniſſe, welche jedesmal der Niedergang des einen Kolbens bei der Erhebung des andern entgegenſetzt, bei Seite, und bezeichnet P die zur Erhebung des Kolbens erfoderliche Kraft am Umfang des Waſſerrades bei einem doppelten Saugwerk, ſo darf man in dem Werthe von P (§. 169) nur

$$((\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) . h + H + \mathfrak{H} + 2\,\phi) . \mathfrak{W} \text{ ſtatt } Q$$

$$(\frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{w}} + \mathfrak{H} + b) . \mathfrak{W} \text{ ſtatt } W$$

ſetzen, wo dann ϕ die Höhe einer Waſſerſäule bezeichnet, die auf dem Kolben ſtehen müßte, um ſeine Reibung aufzuheben.

Wird auſſerdem q und Σ gehörig berechnet und t wie dort für die Zeit eines halben Kolbenſpiels genommen, nämlich für die Zeit des Schubs oder des Hubs, ſo giebt die dortige Gleichung den beiläufigen Werth von P.

Man darf aber die in der Zeit t erhobene Waſſermenge in der Ausübung nie gröſſer als $\frac{4}{5}$. b $\mathfrak{W}$ annehmen.

Hierher gehörige Schriften.

Euler, Diſcuſſion plus particulière des diverſes manières d'élèver de l'eau par le moyen des pompes avec le plus grand avantage — Mem. de l'Acad. de Berlin 1752.

Karſten, angef. Lehrbegr. V. Th.

Du Buat, Principes d'Hydraulique.

Baader, Vollſtändige Theorie der Saug- und Hebepumpen, und Grundſätze zu ihrer vortheilhaften Anordnung. Bayreuth 1797.

Deſſelben Neue Vorſchläge und Erfindungen zur Verbeſſerung der Waſſerkünſte beim Bergbau und Salinenweſen. Bayreuth 1800.

Langsdorf angef. Lehrb. d. Hydraul.

Deſſelben Handb. d. Maſchinenl. 2. B.

Leupold, angef. Theatr. Machin.

Belidor angef. Archit. hydr. I. Th.

Calvör, hiſtoriſch-chronologiſche Nachricht und Beſchreibung des Maſchinenweſens bei dem Bergbaue auf dem Oberharze I. Th.

Lempe Magazin für die Bergbaukunde, in mehreren Bänden.

Sechs und zwanzigſtes Kapitel.

Von den Druck- insbeſondere den vereinbarten Saug- und Druckwerken.

Erklärung 50.

§. 172. Wenn bei einem Saugwerk die höchſte Stelle des Kolbenſtandes noch unter dem äuſſeren Waſſerſpiegel liegt und unter dem tiefſten Kolbenſtande an der Seite des Stiefels eine Steigröhre angebracht wird, in welche beim Nieder-

vergange eines Kolbens im Stiefel das Waſſer aus dem Stiefel treten kann, das zugleich durch eine in der Steigröhre angebrachte Klappe verhindert wird, beim Hube des Kolbens wieder zurückzufallen, ſo hat man ein bloſſes Druckwerk.

Liegt der äuſſere Waſſerſpiegel bei derſelben Einrichtung tiefer als der höchſte Kolbenſtand, ſo hat man ein vereinbartes Saug- und Druckwerk.

Erſteres kommt faſt nie vor, und da die Betrachtung des letzteren auch auf das erſtere anwendbar iſt, ſo wird wie gewöhnlich auch hier nur von vereinbarten Saug- und Druckwerken geredet.

Auch hier iſt der ſchädliche Raum zu bemerken, nämlich der Raum im Stiefel oberhalb dem oberen Rand der Seitenöffnung bis zum Kolben in ſeiner tiefſten Stelle. Man muß ihn ganz zu vermeiden ſuchen.

Um das Waſſer in der Steigröhre in beſtändiger Bewegung zu erhalten, bringt man in der Nähe des Stiefels einen Windkeſſel oder eine Windblaſe an.

Fig. 93 zeigt eine Steigröhre mit einer Windblaſe bei M, welche oberhalb mn mit zuſammengepreßter Luft angefüllt iſt und einer Klappe auf der kurzen Saugröhre.

Fig. 94 zeigt eine Steigröhre mit einem Windkeſſel M und einem Kegelventil auf der kurzen Saugröhre. Ich ziehe den Windkeſſel der Windblaſe vor.

Es verſteht ſich, daß ein Druckswerkskolben keine Oeffnung haben dürfe und durchaus waſſerdicht ſeyn müſſe.

Anm.

Anm. Wenn man durch eine hinlängliche Anzahl lederner Scheiben, die man zwiſchen zwei eiſerne Scheiben legt, einen ſtarken Polzen durchgehen läßt, der unten mit einem Gewinde verſehen iſt, hierauf unten eine Mutter mit groſſer Gewalt herumdreht, um die ſämmtlichen Scheiben dicht zuſammen zu preſſen, und dann den ſo zuſammengepreßten Kolben abdrehen läßt, ſo erhält man einen guten Kolben. Eine andere Einrichtung giebt fig. 95. cdef iſt ein einziges Stück, wie eine Büchſe. Um dieſe herum ſind lederne Ringe gelegt, die durch einen meſſingenen Ring vw bedeckt werden. Unten wird eine Scheibe xy angelegt. Auf dem Ring vw liegt die Scheibe ab, die unten mit einem Kranz mn verſehen iſt, welcher auf dem Ring vw aufſitzt. Durch die obere und untere Scheibe und durch das Mittelſtück, die Büchſe, wird der Polzen op durchgeſteckt, und nun bei p eine Mutter mit Gewalt angeſchroben. Die eiſernen Scheiben bekommen einen Durchmeſſer, der etwa $\frac{1}{4}$ Zoll kleiner als der des Stiefels iſt; der abgedrehte lederne Cylinder muß, ſolange er trocken iſt, ganz willig im Stiefel mit der Hand hin und her geſchoben werden können. Uebrigens muß auch hier, um Gleichheit der Laſt zu erhalten, allemal ein doppeltes Druckwerk angelegt werden. Hier kann ich mich in ihre Beſchreibung nicht einlaſſen, auch weil das Buch durch die vielen Kupfer zu koſtbar werden würde. Eine dergleichen Einrichtung theile ich bei Beſchreibung der Feuerſpritzen mit. Mehr davon findet man in meinem Lehrb. der Hydraul. und bei Hrn. Baader, deſſen Schrift von 1800 ich unten anzeigen werde. Dieſe verdient ganz vorzügliche Empfehlung.

Aufg. 43.

§. 173. An einem doppelten vereinbarten Saug- und Druckwerk, wobei die Höhe der Saugröhre als unbedeutend angeſehen werden kann, ſey

die Weite des Stiefels . . = W

die Weite der Steigröhre . . = w

die ganze Länge der Steigröhre bis zum Ausguſſe . . . . = λ

die lothrechte Höhe des Ausguſſes über dem mittleren Kolbenſtand . . = H

die Länge oder Tiefe des Schubs von der höchſten bis zur tiefſten Kolbenſtelle = b

die Zeit, in welcher der Kolben einen ſolchen Schub vollendet, in Sekunden = t

Man ſucht eine Gleichung zwiſchen dieſen verſchiedenen Beſtimmungsſtücken, die Betreibung mittelſt eines Krummzapfens vorausgeſetzt.

Aufl. I. Fall, für eine Steigröhre ohne Windkeſſel.

1. Des Kolbens mittlere Geſchwindigkeit iſt = $\frac{b}{t}$, alſo die mittlere Geſchwindigkeit des Waſſers in der Steigröhre = $\frac{W}{w} \cdot \frac{b}{t}$, und die hierzu gehörige Höhe

$$h = \frac{W^2 \cdot b^2}{4g \cdot w^2 t^2}$$

2. Man hat alſo mit Rückſicht auf (§. 35. der Hydraul.) die vom Waſſer herrührende geſammte Widerſtandshöhe

$$= H + (A + B) \cdot h$$

3. Die

3. Die reducirte Waſſermaſſe iſt hier

$$W = \frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{w}} . \lambda \mathfrak{W}$$

4. Wenn alſo q und Σ beſonders berechnet werden, $\frac{1}{2}$ b ſtatt r geſetzt wird und die zur Betreibung des Druckwerks am Umfange eines Rades, deſſen Halbmeſſer R iſt, erfoderliche Kraft P heißt und die Reibung eines Kolbens mit φ bezeichnet wird, ſo hat man (§. 169)

$$P = \left(0{,}637\,((\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).h + H + 2\varphi).\mathfrak{W} + q + \frac{0{,}424.\pi.(\Sigma + \frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{w}}.\lambda\mathfrak{W}).b}{2t^2 g}\right).\frac{b}{2R}$$

II. Fall, für eine Steigröhre mit einem hinlänglichen Windkeſſel.

Für dieſen Fall bleibt das Waſſer in der Steigröhre in ohnunterbrochener Bewegung; man hat alſo die iedesmal von neuem in Bewegung zu ſetzende Waſſermaſſe W = 0, und es wird

$$P = \left(0{,}637.(H + (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}).h + 2\varphi).\mathfrak{W} + q + \frac{0{,}424.\pi.\Sigma.b}{2t^2.g}\right).\frac{b}{2R}$$

Die Gröſſe q iſt hier der kubiſche Inhalt einer Waſſerſäule, die des Kolbens Grundfläche 𝔚 zur Grundfläche hätte; und wenn nun alles in Fuſſen ausgedruckt wird, ſo hat man den Werth von P in Kub. Fuſſen Waſſers.

Mul-

Multiplicirt man alſo den ſo berechneten Werth von P noch mit dem Gewicht eines Kub. Fuſſes Waſſers, ſo erhält man P in Pfunden. Aber in der Anwendung auf Waſſerräder iſt es am bequemſten, P in Kub. Fuſſen Waſſers auszudrucken.

Anm. 1. Es verſteht ſich, daß man hier mit beiläufigen Beſtimmungen zufrieden ſeyn muß.

Die Beſtimmung von Φ iſt äuſſerſt ſchwierig und gar keiner genauen Angabe fähig. Wiederum nur ſehr beiläufig kann man

$$\Phi = (0{,}15 \pm 0{,}05) . \frac{P}{\mathfrak{W}} . \left(\frac{d}{d+0{,}5} + 0{,}5\right) . \frac{b}{2R}$$

ſetzen, wo d den zu $\mathfrak{W}$ gehörigen Durchmeſſer bezeichnet. Das untere Zeichen geht auf nachgebohrte metallene, das obere auf gut gebohrte hölzerne Stiefel.

Setzt man nun

$$0{,}637 . (H + (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) . h) . \mathfrak{W} + q + \frac{0{,}424 . \pi . \Sigma . b}{2 . t^2 . g} = P'$$

ſo hat man

$$P = \left(P' + (0{,}3 \pm 0{,}1) . \frac{P}{\mathfrak{W}} . \left(\frac{d}{d+0{,}5} + 0{,}5\right)\right) \frac{b}{2R}$$

alſo nach gehöriger Reduktion

$$P = \frac{0{,}637 . (H + (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) . h) . \mathfrak{W} + q + \frac{0{,}424 . \pi . \Sigma . b}{2t^2 . g}}{\frac{2R}{b} . - 0{,}3 \pm 0{,}1 . \left(\frac{d}{d+0{,}5} + 0{,}5\right)}$$

Anm. 2. Der Windkeſſel iſt bei einem doppelten Druckwerk hinlänglich geräumig, wenn der kubiſche Inhalt des über dem oberen Rand der Steigröhrenöffnung enthaltenen Raums im Windkeſſel $= 4 b . \mathfrak{W}$ iſt. Bei einem einfachen Druckwerk dürfte dieſer Raum nicht unter $16 . b \mathfrak{W}$ betragen.

Anm. 3. Wenn die Höhe des ſchädlichen Raums = $\mathfrak{h}$ geſetzt wird, ſo iſt ſein kubiſcher Inhalt = $\mathfrak{h} \cdot \mathfrak{W}$, aus welchem, paſſende Kolben vorausgeſetzt, die atmoſphäriſche Luft nicht herausgeſchafft werden kann.

Die Höhe des tiefſten Kolbenſtandes über dem Waſſerſpiegel im Behältniß ſey = $\mathfrak{h}'$, wenn nun das Waſſer am Ende eines ieden Hubs auf die Höhe $\mathfrak{h}' + \mathfrak{h}''$ im Stiefel nachgefolgt iſt, und die Höhe des ietzt noch über dem Kolben vorhandenen Luftraums mit β bezeichnet wird, ſo muß der Druck $\left(\mathfrak{h}' + \mathfrak{h}'' + \frac{\mathfrak{h}}{\beta} \cdot k\right)\mathfrak{W}$ mit dem atmoſphäriſchen Druck $k \cdot \mathfrak{W}$ im Gleichgewicht ſeyn; alſo

$$\mathfrak{h}' + \mathfrak{h}'' + \frac{\mathfrak{h}}{\beta} \cdot k = k$$

und

$$\beta = \frac{\mathfrak{h} \cdot k}{k - \mathfrak{h}' - \mathfrak{h}''}$$

Es iſt aber auch

$$\mathfrak{h}'' + \beta = b$$

oder

$$\mathfrak{h}'' = b - \beta$$

alſo

$$\beta = \frac{\mathfrak{h} \cdot k}{k - \mathfrak{h}' - b + \beta}$$

und hieraus

$$\beta = -\frac{k - \mathfrak{h}' - b}{2} + \sqrt{\left(\mathfrak{h} \cdot k - \left(\frac{k - \mathfrak{h}' - b}{2}\right)^2\right)}$$

Es würde alſo mit iedem Schube nur eine Waſſermenge =

$$(b - \beta) \cdot \mathfrak{W} = \left(\frac{k - \mathfrak{h}' + b}{2} - \sqrt{\left(\mathfrak{h} \cdot k - \left(\frac{k - \mathfrak{h}' - b}{2}\right)^2\right)}\right) \cdot \mathfrak{W}$$

ausgegoſſen.

Dieſe

Dieſe wird aber, für $h = o, = b$ W. Man muß daher, um vollen Ausguß zu erhalten, bei Druckwerken den ſchädlichen Raum völlig vernichten d. i. den Kolben bis an den obern Rand der Steigröhrenöffnung in der Stiefelwand ſpielen laſſen.

Hierher gehörige Schriften.

Karſten angef. Lehrbegr. V. Th.

Baader, Vollſtändige Theorie der Saug- und Hebepumpen. Bayreuth 1797.

Deſſ. Neue Vorſchläge und Erfindungen zur Verbeſſerung der Waſſerkünſte. Bayreuth 1800.

Langsdorf angef. Lehrb. d. Hydraul.

Deſſ. angef. Handbuch der Maſchinenlehre II. Band.

Belidor angef. Archit. Hydraul.

Walther, Architectura Hydraulica oder Anleitung zu den Brunnenkünſten. Augsburg 1765.

Sieben und zwanzigſtes Kapitel.

Von den Feuerſpritzen.

Erklärung 51.

§. 174. Die gewöhnlichen Feuerſpritzen ſind nichts weiter als vereinbarte Saug- und Druckwerke, bei welchen man ihrem Zwecke gemäß nur noch beſonders darauf zu ſehen hat, daß das durch die Steigröhre gepreßte Waſſer mit einer hinlänglich groſſen Geſchwindigkeit aus der Gußöffnung ſtröhme, um ſich vermöge derſelben noch bis zu der Höhe frei durch die Luft zu erheben, welche bei möglichen Feuersbrünſten müſſen erreicht werden können.

Man hat einfache und doppelte, und beide Arten mit und ohne Windkeſſel. Die doppelten mit einem Windkeſſel ſind die beſten, die einfachen ohne Windkeſſel die ſchlechteſten.

Aufg. 44.

§. 175. Der meſſingenen Steigröhre oder dem Spritzenrohr eine ſolche Einrichtung zu geben, daß ſich das daran befindliche Gußrohr nicht nur nach ieder verlangten Weltgegend, ſondern auch in ieder lothrechten Ebene willkührlich auf- und nieder oder nach höheren und niederen Stellen richten läßt.

Aufl. Zur Wendung nach ieder Weltgegend dient die Einrichtung bei B (fig. 96); zur höheren und niedrigern Richtung die Einrichtung bei A.

mm bei A und B ſind bewegliche, keine angegoſſene Ringe.

Bei C iſt ein Hahn, wodurch das Steigrohr oder Spritzenrohr verſchloſſen werden kann, welches beſonders anfänglich geſchieht, um erſt die Luft im Windkeſſel zuſammenzupreſſen.

Hier kann auch bei v ſeitwärts am Rohre noch eine Angußröhre angebracht ſeyn, an die ſich der lederne Schlauch (die Schlange), der ſonſten bei D angeſchroben wird, anſchrauben läßt.

In dieſem Falle wird der Hahn C ſo durchbohrt, daß das Waſſer nach Willkühr aus E allein, oder aus dem bei v angeſchrobenen Schlauch allein, oder auch aus beiden zugleich ausſtröhmen kann. Dann ſollte aber die Steigröhre vom Windkeſſel bis an v ei-

gentlich viel weiter als gewöhnlich und nicht viel enger als einer von den Stiefeln ſeyn.

Aufg. 45.

§. 176. Einer doppelten Feuerſpritze eine zweckmäſſige Einrichtung zu geben.

Aufl. Man gebe ihr die Einrichtung, welche fig. 97. zeigt, die einen lothrechten Durchſchnitt des Spritzenkaſtens (Spritzenkumms) mit den beiden Stiefeln und dem Windkeſſel nach der Länge vorſtellt.

a, a ſind zwei lothrechte Schiedwände, wodurch ſich die Abtheilungen α, α ergeben, die bei n eine durchlochte horizontale Schiedwand, einen Seiher, haben. In ieder Schiedwand a befindet ſich unterhalb dieſem Seiher ein Loch, wodurch das in α, α eingeſchüttete Waſſer in den übrigen Theil des Spritzenkumms kommen kann.

Durch ein nach der Form (fig. 98) geſchmiedetes Eiſen können Stiefel und Windkeſſel mit den Wänden des Spritzenkumms feſt verbunden werden.

Die Abmeſſungen hat Hr. H. Karſten ſo angegeben:

I. Für eine Spritze, die durch 16 Mann bearbeitet werden ſoll:

	Rhl. Fuß	Zolle
Weite der Stiefel	—	6
Ganze Länge der Druckſtange . . .	11	—
Entfernung der Kolbenſtangen von der Umdrehungsaxe	1	2
Höhe des Kolbenzugs	—	$10\frac{1}{4}$

Weite

	Rhl. Fuß	Zolle
Weite der Knieröhren zwiſchen Stiefel und Windkeſſel	—	4
Weite der Ventilöffnung	—	3
Höhe des Kolbens	—	4
Höhe der Stiefeln	1	$7\frac{1}{2}$
Durchmeſſer des Windkeſſels . .	1	—
Seine Höhe nicht über . . .	1	8
Durchmeſſer der Gußmündung . .	—	$\frac{3}{4}$
Beim Gebrauch einer etwas langen Schlange wird er $\frac{1}{1}\frac{1}{2}$ bis .	—	1

Dieſe verſpritzt bei fleiſſigen Arbeitern in 1 Min. beinahe 14 Kub. Fuſſe Waſſer. Der Strahl ſteigt ohne Gebrauch einer Schlange gerade auf zu einer Höhe von 76 — 80 Fuſſen, und durch eine Schlange, die 40 — 60 Fuſſe hinauf gezogen iſt, 96—100 Fuſſe.

II. Für eine Spritze, die durch 8 Mann bearbeitet werden ſoll:

	Rhl. Fuß	Zolle
Weite der Stiefel	—	5
Ganze Länge der Druckſtange . . .	10	—
Entfernung der Kolbenſtangen von der Umdrehungsaxe	1	—
Höhe des Kolbenzugs	—	10
Weite der Knieröhren zwiſchen Stiefel und Windkeſſel	—	4
Weite der Ventilöffnung	—	3
Höhe des Kolbens	—	4
Höhe der Stiefeln	1	7
Durchmeſſer des Windkeſſels . . .	—	10
Seine Höhe nicht über	1	8
Durchmeſſer der Gußmündung . $7\frac{2}{2}$ Linien		
Beim Gebrauch einer etwas langen Schlange $9\frac{1}{2}$ Linien.		

Dieſe verſpritzt bei fleiſſigen Arbeitern in 1 Min. 9 Kub. Fuſſe.

Der Strahl ſteigt ohne Gebrauch einer Schlange gerade auf zu einer Höhe von 60 Fuſſen.

Hierher gehörige Schriften.

Karſten, Preißſchrift über die vortheilhafteſte Anordnung der Feuerſpritzen, Greifswalde 1773.

Klügel, von der beſten Anordnung der Feuerſpritzen auf dem platten Lande, Berlin 1774.

Helfenzrieder, von Verbeſſerung der Feuerſpritzen, München 1778.

Heſſe, Praktiſche Abhandl. zur Verbeſſerung der Feuerſpritzen, Gotha 1778.

Langsdorf, angef. Lehrb. der Hydr. Ein vorzügliches Werk über dieſen Gegenſtand hat man von Hrn. Baader zu erwarten.

Acht und zwanzigſtes Kapitel.

Vom Vorgelege und Zwiſchengeſchirr.

Erklärung 52.

§. 177. Wenn die Maſchine, durch welche eine Laſt in Bewegung geſetzt oder überhaupt ein Widerſtand gewältiget werden ſoll, mit dieſem Widerſtande nicht unmittelbar verbunden werden kann, alſo noch andere Maſchinentheile angebracht werden müſſen, wodurch iene Maſchine mit der in Bewegung zu ſetzenden Laſt in Verbindung gebracht wird, ſo

ſo heiſſen dieſe zur Verbindung der Kraft mit der Laſt angebrachten Maſchinentheile überhaupt das Zwiſchengeſchirr, und insbeſondere ein Vorgelege, wenn dieſe Zwiſchentheile aus Rädern beſtehen, die ſo geformt und mit einander verbunden ſind, daß keines in Bewegung kommen kann, ohne das nächſtfolgende zugleich mit in Bewegung zu ſetzen und ſo die Bewegung bis zu dem zu wältigenden Widerſtande fortzupflanzen.

Das Zwiſchengeſchirr, wodurch eine zum Angriffe der Kraft angelegte Maſchine mittelſt Stangen, die von Strecke zu Strecke gehörig unterſtützt werden, mit der Maſſe, an welcher der Widerſtand unmittelbar wirkt, in Verbindung geſetzt wird, heißt eine Stangenkunſt und insbeſondere ein Feldgeſtänge, wenn ſie auf eine etwas beträchtliche Länge fortgeführt wird.

Eine ſolche Stangenkunſt kann nach allen möglichen Richtungen gebrochen werden. Zur Unterſtützung der Stangen, die durch Verkammung, Schrauben und eiſerne Ringe zuſammengefügt werden, dienen bewegliche Aerme (Schwingen, Lenker), die in ſtehende oder liegende Wellen befeſtigt und im erſtern Falle noch durch Büge unterſtützt werden. Zum Brechen nach verſchiedenen Richtungen dienen Zwillinge (ein Paar Lenker, die unter dem erfoderlichen Winkel in eine gemeinſchaftliche Welle befeſtigt werden); ferner Viertelskreuze (Zwillinge, deren Lenker einen rechten Winkel mit einander machen); Halbkreuze, ganze Kreuze. Zwillinge mit ſtehenden Wellen heiſſen insbeſondere Wendeböcke, Werkſtempel. Zur lothrechten Erhebung einer Stange, z. B. einer Kolbenſtange, wie mn (fig. 99), dienen zwei Lenker E und F, die durch

die Stange EG mit einander verbunden werden, an der die Kolbenſtange in der Mitte m eingehenkt wird. Beim Hin- und Hergange der Stange D gehen die Stellen E und G mit der m ſo auf und nieder, daß die Stelle m während dieſer Bewegung ohne merkliche Abweichung in derſelben lothrechten Linie bleibt.

Anm. Hier kann ich mich in keine umſtändlichere Erläuterungen aller dieſer Vorrichtungen einlaſſen. Auf die zuletzt erwähnte Einrichtung bin ich für mich ſchon vor 6 Jahren gekommen, und habe ſie Hrn. Ingenieur Tulla in Karlsruhe damals mitgetheilt. Erſt ſpäterhin habe ich Hrn. Watt als Erfinder derſelben angegeben gefunden; er hat ſie bei einigen Dampfmaſchinen mit dem beſten Erfolge in Ausübung gebracht.

Erklärung 53.

§. 178. Die als Vorgelege dienende Räder ſind die Stirnräder, die Kammräder und die Trillinge, die in einander oder auch in verzahnte Stangen eingreifen. Die Stirnräder haben am äuſſern Umfange ihres Kranzes Zähne nach der Richtung des Halbmeſſers; die Kammräder haben an der einen Seitenfläche des Kranzes Kämme, die faſt immer der Axe des Rades parallel laufen, zuweilen aber auch mit ihr einen Winkel machen. Die Trillinge beſtehen aus zwei parallelen auf die Axe ſenkrechten Scheiben oder Kränzen, durch welche cylindriſche Stäbe (Triebſtöcke, Spindeln) vom einen Kranze bis zum andern der Axe parallel durchlaufen. Eine ſtarke Welle kann auch beſondere Kränze entbehrlich machen, indem man nach der Länge der Triebſtöcke, da wo ſie eingelegt werden ſollen, ringsum eine Vertiefung in die Welle und dann

zu

zu beiden Seiten dieſer Vertiefung oder dieſes Halſes in dem äuſſeren Umfang der Welle parallelepipediſche Vertiefungen ringsherum aushauen läßt, in welche die gleichfalls parallelepipediſch geformte Enden der Triebſtöcke eingelegt werden, wie man ſie im erſten Falle in die äuſſeren Einſchnitte der Kränze einlegt. Ueber die eingelegten Enden der Triebſtöcke werden ſtarke eiſerne Reiſe getrieben.

Aufg. 46.

§. 179. **Die Reibung der Stirnräder an den Triebſtöcken der Trillinge zu beſtimmen.**

Aufl. 1. Es ſey CD (fig. 100) der Halbmeſſer eines Stirnrades = b, dD die in die Kreisfläche, welche von den Mittelpunkten der Triebſtöcke umgeben wird, eingreifende Länge eines Zahns, der mit dem durch den anliegenden Triebſtock durchgehenden Halbmeſſer des Trillings cd gleichlaufend liegt.

Dieſe Zahnlänge Dd ſey = λ.

Des Trillings Halbmeſſer cd, von des Trillings Axe bis zur Mittellinie eines Triebſtocks gemeſſen, ſey = c.

Man denke ſich mit CD den Bogen DF, mit cd den Bogen df beſchrieben, ſo ergiebt ſich im Durchſchnitt e die Stelle, wo der Stab d von dem Endpunkt D des Zahns dD bei der Umdrehung verlaſſen wird.

Die Kraft muß den Triebſtock längſt dem Bogen de fortbewegen und in eben der Zeit gleiten die reibenden Punkte von d bis D; man kann alſo de als den Weg der Kraft und dD als den Weg der Reibungslaſt anſehen.

Wenn daher der Widerſtand des Triebſtocks d = R, die zur Ueberwindung der daher entſtehenden Reibung erfoderliche Kraft = Φ, und der Reibungskoefficient = μ geſetzt wird, ſo hat man

$$\Phi = \frac{Dd}{\text{Bog } de} \cdot \mu \cdot (R+\Phi) = \frac{\lambda}{\text{Bog } de} \cdot \mu \cdot (R+\Phi)$$

woraus ſich

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\text{Bog } de} \cdot \mu\right) \cdot \Phi = \frac{\lambda}{\text{Bog } de} \cdot \mu R$$

alſo

$$\Phi = \frac{\mu}{\frac{\text{Bog } de}{\lambda} - \mu} \cdot R$$

ergiebt.

2. Dieſer Ausdruck bedarf nur noch einer bequemern Einrichtung für die Ausübung.

Ich betrachte Cdc als eine einzige gerade Linie, weil ſich der Halbmeſſer von der Dicke des Triebſtocks d in Vergleichung mit der Entfernung Cc als Null anſehen läßt.

Nun ſey em ein Perpendikel auf cd, ſo iſt für alle Fälle der Ausübung hinlänglich genau

$$Dm : dm = c : b$$

alſo auch

$$Dm : (Dm + dm) = c : (c + b)$$

und

$$Dm = \frac{c \cdot (Dm + dm)}{b+c} = \frac{c \cdot \lambda}{b+c}$$

Es

Es iſt aber

$$Cm = CD - Dm = b - \frac{c \,.\, \lambda}{b+c}$$

alſo

$$mn^2 = b^2 - \left(b - \frac{c \,.\, \lambda}{b+c}\right)^2$$

$$= b^2 - b^2 + \frac{2bc \,.\, \lambda}{b+c} - \frac{c^2 \lambda^2}{(b+c)}$$

Ferner

$$dm = \frac{b \,.\, \lambda}{b+c} \text{ und } dm^2 = \frac{b^2 \lambda^2}{(b+c)^2}$$

Demnach ſehr nahe

$$\text{Bog } de = \sqrt{(mn^2 + dm^2)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2bc \,.\, \lambda}{b+c} - \frac{c^2 \lambda^2}{(b+c)^2} + \frac{b^2 \lambda^2}{(b+c)^2}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2bc(b+c) \,.\, \lambda + (b^2 - c^2) \,.\, \lambda^2}{(b+c)^2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{[(b+c) \,.\, \lambda \,.\, (2bc + (b-c) \,.\, \lambda)]}}{b+c}$$

Nun iſt $(b-c) \,.\, \lambda$ allemal ſehr viel kleiner als $2bc$, und man erhält daher immer noch mit hinlänglicher Genauigkeit

$$\text{Bog } de = \frac{\sqrt{(b+c) \,.\, \lambda \,.\, 2bc}}{b+c}$$

$$= \sqrt{\frac{2bc}{b+c} \,.\, \lambda}$$

Dieſen Werth in der Gleichung für Φ gebraucht, giebt

$$\Phi = \frac{\mu}{\sqrt{\left(\frac{2\,bc}{(b+c).\lambda}\right)} - \mu} . R$$

3. Ex. Es ſey $b = 40''$, $c = 15''$, $\lambda = 1''$, ſo iſt

$$\sqrt{\frac{2 . 40 . 15}{(40 + 15) . 1}} = \sqrt{\frac{1200}{55}} = 4{,}7$$

alſo

$$\Phi = \frac{\mu}{4{,}7 - \mu} . R$$

Wäre nun $\mu = 0{,}2$; ſo hätte man

$$\Phi = \frac{0{,}2}{4{,}5} . R = \frac{1}{22{,}5} . R$$

Für $\mu = 0{,}3$ gäbe ſich

$$\Phi = \frac{0{,}3}{4{,}4} . R = \frac{1}{14{,}8} . R$$

Es ſey aber z. B. $c = b$, ſo wird

$$\Phi = \frac{\mu}{\sqrt{\left(\frac{2\,b^2}{2\,b\lambda}\right)} - \mu} R = \frac{\mu}{\sqrt{\left(\frac{b}{\lambda}\right)} - \mu} . R$$

Für $b = 49''$, $\lambda = 1$ würde alſo ießt

$$\Phi = \frac{\mu . R}{7 - \mu} \text{ oder genau genug } = \tfrac{1}{7}\,\mu R$$

alſo ießt beträchtlich kleiner als vorhin.

4. Ueber-

4. Ueberhaupt erhellet, daß die Reibung zwiſchen den Zähnen des Stirnrades und den Triebſtöcken des Trillings deſto kleiner werden müſſe, ie gröſſer b und c ſind und ie kleiner λ iſt.

5. Man darf auch ohne Bedenken ſchlechthin

$$\Phi = \frac{\mu}{\sqrt{\frac{2bc}{(b+c).\lambda}}}.R$$

ſetzen, oder

$$\Phi = \mu.R.\sqrt{\frac{(b+c).\lambda}{2bc}}$$

welches, für $c = b$,

$$\Phi = \mu.R.\sqrt{\frac{\lambda}{b}}$$

giebt.

Aufg. 47.

§. 180. Die Reibung der Kammräder an den Triebſtöcken zu beſtimmen.

Aufl. 1. Die Buchſtaben ſollen die vorige Bedeutung behalten.

Durch die Axe des Kammrades denke man ſich eine Ebene, in der zugleich die Axe des Trillings und der Punkt liege, in welchem der Kamm einen Triebſtock berühre; man denke ſich überdas eine cylindriſche Wand, in welcher die Mittellinien aller Triebſtöcke liegen.

Der Endpunkt des erwähnten Zahns greift iezt auf eine Tiefe $= \lambda$ in dieſen von der cylindriſchen Wand umgebenen Raum hinein.

Wenn nun der Kamm ſich um ſeine Axe herumdreht, alſo einen Bogen beſchreibt, deſſen Halbmeſſer $= b$ iſt, ſo nähert ſich ſein Endpunkt bei dieſer Umdrehung der cylindriſchen Wand, bis er endlich in ſolche hineinfällt.

Wie weit iſt nun dieſer Punkt, wo der Endpunkt des Kamms bei der Umdrehung in die cylindriſche Wand fällt, von der gemeinſchaftlichen Ebene beider Axen entfernt? oder wie groß iſt das Perpendikel vom gedachtem Punkt auf die erwähnte Ebene?

Wenn dieſes Perpendikel y heißt, ſo hat man

$$\lambda : y = y : (2c - \lambda)$$

wo nämlich c der Halbmeſſer des Trillings oder der erwähnten cylindriſchen Wand iſt.

Man erhält alſo

$$y^2 = \lambda . (2c - \lambda)$$

2. Bei dieſer Umdrehung des Kamms nähert ſich dieſer nothwendig der Grundfläche des angenommenen Cylinders oder er gleitet an dem mit ihm in Berührung ſtehenden Triebſtock nach der Länge dieſes Triebſtocks herab. Wie lang iſt nun das Stück des Triebſtocks, über welches der Kamm bis zu dem Augenblick, da er den Triebſtock verläßt, abgleiten muß?

Oder wie tief liegt die Stelle, wo das Perpendikel y die oben gedachte Ebene trifft, unter der Stelle, wo der Kamm beim Anfang der Umdrehung den Triebſtock berührte?

Wenn dieſe Tiefe $\mathfrak{z}$ heißt, ſo muß, weil die Berührungsſtelle im letzten Augenblick der Berührung noch ebenſoweit als im erſten Augenblick oder am Anfang

fang der Umdrehung von der Umdrehungsaxe des Kammrades entfernt ſeyn muß,

$$\mathfrak{z} + \surd\,(b^2 - y^2) = b$$

ſeyn.

3. Man hat alſo nunmehr (no. 1 u. 2)

$$\mathfrak{z} + \surd\,(b^2 - 2\lambda c + \lambda^2) = b$$

und

$$\mathfrak{z} = b - \surd\,(b^2 - 2\lambda c + \lambda^2)$$

4. Die Reibung erfolgt zugleich nach der Länge der Triebſtöcke und nach der Länge der Kämme, ihr Weg nach der hieraus entſtehenden ſchiefen Richtung iſt $= \surd\,(\mathfrak{z}^2 + \lambda^2)$ der Weg der Kraft iſt eigentlich eine krumme Linie auf der Auſſenfläche eines Cylinders; er läßt ſich aber hier ohne merklichen Fehler für die Ausübung

$$= \surd\,(y^2 + \lambda^2 + \mathfrak{z}^2)$$
$$= \surd\,(2\lambda c - \lambda^2 + \lambda^2 + \mathfrak{z}^2)$$
$$= \surd\,(2\lambda c + \mathfrak{z}^2)$$

ſetzen.

5. Auf dieſe Weiſe ergiebt ſich für die Reibung der Kammräder

$$\Phi = \frac{\surd\,(\mathfrak{z}^2 + \lambda^2)}{\surd\,(\mathfrak{z}^2 + 2\lambda c)} \cdot \mu \cdot (R + \Phi)$$

wofür ich aber gleich

$$\Phi = \mu \cdot R \cdot \surd \frac{\mathfrak{z}^2 + \lambda^2}{\mathfrak{z}^2 + 2\lambda c}$$

beibehalte, wo dann für $\mathfrak{z}$ der vorhin gefundene Werth ſubſtituirt wird.

6. Für

6. Für b = c wird (no. 3)

$$\xi = b - \sqrt{(b^2 - 2\lambda b + \lambda^2)}$$
$$= \lambda$$

alſo

$$\Phi = \mu . R . \sqrt{\frac{2\lambda^2}{\lambda^2 + 2\lambda b}}$$
$$= \mu . R . \sqrt{\frac{\lambda}{\frac{1}{2}\lambda + b}}$$

demnach, weil $\sqrt{(b + \frac{1}{2}\lambda)}$ nicht merklich von $\sqrt{b}$ verſchieden iſt, noch genau genug

$$\Phi = \mu . R . \sqrt{\frac{\lambda}{b}}$$

alſo in dieſem Fall die Reibung an den Kämmen nicht gröſſer als an den Zähnen gleichgroſſer Stirnräder (§. 179. no. 5).

7. Ex. Es ſey $b = 40''$, $c = 15''$, $\lambda = 1$, ſo iſt (no. 3)

$$\xi = 40 - \sqrt{(1600 - 30 + 1)}$$
$$= 0{,}6$$

alſo (no. 5)

$$\Phi = \mu . R . \sqrt{\frac{0{,}36 + 1}{0{,}36 + 30}}$$
$$= 0{,}21 . \mu . R$$

Im vor. §. no. 3. fande man für das Stirnrad im ähnlichen Falle

$$\Phi = \frac{1}{4{,}7} . \mu R \text{ gleichfalls } = 0{,}21 . \mu R$$

8. Wäre c in Vergleichung mit b ſehr klein, ſo wäre $\sqrt{(b^2 - 2\lambda c + \lambda^2)}$ nicht merklich von b ver-

ſchieden,

ſchieden, und man könnte alſo auch $\frac{c}{b}$ (no. 3) als Null anſehen.

In dieſem Falle nun wäre nach (no. 5)

$$\Phi = \mu . R . \sqrt{\frac{\lambda^2}{2 \lambda c}} = \mu . R . \sqrt{\frac{\lambda}{2 c}}$$

Man erhält aber im ähnlichen Falle (vor. §. no. 5)

$$\Phi = \mu R \sqrt{\frac{b\lambda}{2 bc}} = \mu R \sqrt{\frac{\lambda}{2 c}}$$

9. Aus (no. 6. und 8) erſieht man, daß von einem ſehr kleinen Werth von $\frac{c}{b}$ bis zu $\frac{c}{b} = 1$, alſo überhaupt für die in der Ausübung vorkommenden Werthe von $\frac{c}{b}$ einerlei Reibung erhält, es mag das verzahnte Rad ein Stirnrad oder ein Kammrad ſeyn.

Erklärung 54.

§. 181. Die Gröſſe des Bogens, welchen die Dicke eines Triebſtocks, Zahns oder Kamms ſamt dem Raume zwiſchen zweien Triebſtöcken, Zähnen oder Kämmen einnimmt heißt die Schrift.

Aufg. 48.

§. 182. Für die gewöhnliche Geſtalt der Zähne und Kämme die Gröſſe der Schrift zu beſtimmen und ſie gehörig abzutheilen.

Aufl. Aus der Gröſſe des Widerſtandes und der Länge der Spindeln müßte man nach den Erfahrungen von der Stärke des dazu gewählten Holzes ihre Dicke beſtimmen.

Wenn

Wenn inzwiſchen die Triebſtöcke, wie es immer ſeyn ſollte, nicht über 4 bis 6 Zolle lang ſind, ſoweit ſie zwiſchen beiden Enden frei liegen, ſo weiß man ſchon aus der Erfahrung, daß der Durchmeſſer eines Triebſtocks auch bei beträchtlichen Getraidmühlen nie über $2\frac{1}{4}$ Rhl. Zolle groß zu ſeyn braucht; es dürfen alſo die Kämme noch etwas ſchwächer ſeyn, weil ſie beträchtlich kürzer ſind und ein Zahn oder Kamm nicht ſo oft angegriffen wird als ein Triebſtock.

Daher braucht der Zwiſchenraum zwiſchen ein Paar Triebſtöcken auch nur $2\frac{1}{4}$ Zoll groß zu ſeyn.

Bei Hammerwerken von Beträchtlichkeit kann man die Spindeln $2\frac{3}{4}$ bis 3 Zoll dick machen, und der Zwiſchenraum zwiſchen ein Paar Spindeln kann immer der Spindeldicke gleich ſeyn.

Damit nun beim Eingreifen gehöriger Spielraum für ieden Zahn zwiſchen den Triebſtöcken, und für ieden Triebſtock zwiſchen den Zähnen bleibe, ſo kann man folgende Regel beobachten:

man theile die ganze Schrift, alſo die doppelte Spindeldicke, in 16 gleiche Theile, davon gebe man

den Spindeln 8, ihrem Zwiſchenraum 8
den Kämmen 7 — — — 9

Aufg. 49.

§. 183. An der Hauptwelle, die durch irgend eine Kraft herumgedreht wird, liege ein verzahntes Rad (Stirnrad oder Kammrad), das in den Trilling einer 2ten Welle eingreift, die auſſer dem Trilling wiederum ein 2tes verzahntes Rad führt; die-

ſes

ſes 2te greiſe wiederum in den Trilling einer 3ten Welle; die Anzahl Umdrehungen, welche die erſte oder die Hauptwelle in einer Minute macht, iſt gegeben: man ſoll die Anzahl der gleichzeitigen Umdrehungen der letzten Welle beſtimmen.

Aufl. Es ſey

für die 1te Welle	die Anzahl Zähne	=	N
2te —	die Anzahl Triebſt.	=	n
—	die Anzahl Zähne	=	N′
3te —	die Anzahl Triebſt.	=	n′

ſo dreht das 1te Rad bei einem Umgange N Triebſtöcke herum, der 1te Trilling macht alſo $\frac{N}{n}$ Umgänge.

Mit einem Umgange dieſes 1ten Trillings macht auch das 2te Rad einen Umgang, womit N′ Triebſtöcke des 2ten Trillings herumgedreht werden; dieſer hat aber n′ Triebſtöcke, alſo macht er in derſelben Zeit $\frac{N'}{n'}$ Umgänge, da der 1te Trilling einen Umgang macht; oder $\frac{N}{n} \times \frac{N'}{n'}$ Umgänge, bis der 1te Trilling $\frac{N}{n}$ Umgänge, d. i. bis das 1te Rad einen Umgang macht.

Demnach gehören zu iedem Umgange der 1ten Welle $\frac{N}{n} \times \frac{N'}{n'}$ Umgänge des 2ten Trillings oder der 3ten Welle.

Zuſ.

Zuſ.

§. 184. Folgen alſo auf die vorſtehende Weiſe Räder mit N, N′, N″, N‴ ... Zähnen und Trillinge mit n, n′, n″, n‴ ... Triebſtöcken nach einander, und iſt die Anzahl Umgänge der erſten Welle in einer beſtimmten Zeit = 𝔑, ſo macht die letzte Welle in derſelben Zeit

$$\frac{N.N'.N''.N'''....}{n.n'.n''.n'''....}.\mathfrak{N} \text{ Umgänge}$$

Aufg. 50.

§. 184*. Den Einfluß zu beſtimmen, den ein Vorgelege auf das ſtatiſche Moment der Laſt hat.

Aufl. 1. An der Welle des Stirnrades C (fig. 101) ſey in der Entfernung R von der Umdrehungsaxe eine Kraft = P angebracht; der Zahn berühre ietzt den Triebſtock bei v (fig. 101); C, c ſeyen die Mittelpunkte des Stirnrades und des Trillings; mv ſey ſenkrecht auf den Halbmeſſer cv, und nv ſenkrecht auf den Halbmeſſer Cv; nm ſenkrecht auf mv, ſo wirkt die Kraft P bei v nach vn ſenkrecht auf Cv mit einem Druck $= \frac{R}{Cv}.P$, alſo nach der Richtung vm ſenkrecht auf cv mit einem Druck =

$$\frac{vm}{vn}.\frac{R}{Cv}.P$$

2. An der Trillingswelle ſey in der Entfernung r eine Laſt = Q angebracht, ſo wirkt ſolche in v nach mv ſenkrecht auf cv mit einem Druck $= \frac{r}{cv}.Q.$

3. Sol-

3. Sollen nun beide, P und Q einander im Gleichgewicht erhalten, ſo daß die angefangene Bewegung vermöge der Trägheit fortdauert, ſo muß

$$\frac{vm}{vn} \cdot \frac{R}{Cv} \cdot P = \frac{r}{cv} \cdot Q$$

ſeyn, oder

$$Q = \frac{vm}{vn} \cdot \frac{cv}{Cv} \cdot \frac{R}{r} \cdot P$$

$$= \frac{Cd}{Cv} \cdot \frac{cv}{Cv} \cdot \frac{R}{r} \cdot P$$

Werden alſo Q, P, R und r als unveränderliche Gröſſen angenommen, ſo können Kraft und Laſt während der Bewegung nur unter der Bedingung im Gleichgewicht bleiben, daß $\frac{Cd}{Cv} \cdot \frac{cv}{Cv}$ gleichfalls einen unveränderlichen Werth habe.

Es wird aber ſowohl $\frac{Cd}{Cv}$ als $\frac{cv}{Cv}$ deſto kleiner, iemehr ſich die Berührungsſtelle v von der durch Cc gehenden geraden Linie entfernt; daher kann während der Bewegung Q nicht mit P im Gleichgewicht bleiben; iſt, wenn der Berührungspunkt v in der geraden Cc liegt, P mit Q im Gleichgewicht, ſo iſt, ſolange ſich der Berührungspunkt noch zur Linken der geraden Cc befindet, das Uebergewicht auf der Seite der Laſt; ſobald hingegen v zur Rechten von Cc fällt, hat die Kraft P die Ueberwucht.

4. Zu beſtimmten Geſchwindigkeiten des Stirnrades gehören ganz verſchiedene Geſchwindigkeiten des Triebſtocks, nach den verſchiedenen Lagen, in welchen

 ſich

ſich die angegriffene Stelle befindet. Es iſt dieſe Geſchwindigkeitsverhältniß beim Stirnrade und Trilling auf der einen Seite von Cc allemal

$= \text{Coſ}\, cve : 1$ (fig. 101. zur Linken von Cc)

und auf der andern

$= 1 : \text{Coſ}\, cve$ (fig. 101. zur Rechten von Cc)

5. Wenn $Cc = a$ geſetzt und übrigens die Bedeutung der Buchſtaben (§. 179) beibehalten wird, ſo iſt

$$\text{Coſ}\, cve = -\text{Coſ}\, Cvc = -\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$$

aber $a = b + c - \lambda$, alſo

$$\text{Coſ}\, cve = \frac{(b+c)^2 - 2\,(b+c).\lambda + \lambda^2 - b^2 - c^2}{2\,bc}$$

$$= \frac{2\,bc - 2\,(b+c).\lambda + \lambda^2}{2\,bc}$$

$$= 1 - \frac{\lambda.[(b+c) - \frac{1}{2}\lambda]}{bc}$$

Da nun $\frac{1}{2}\lambda$ in Vergleichung mit $b + c$ allemal ſehr klein iſt, ſo hat man genau genug

$$\text{Coſ}\, cve = 1 - \frac{\lambda.(b+c)}{bc}$$

Es ſey z. B. $b = 60$, $c = 15$, $\lambda = 1$, ſo findet man

$$\text{Coſ}\, cve = 1 - \frac{75}{900} = 0{,}916$$

Befindet ſich nun die Angriffsſtelle des Zahns in er Mittellinie Cc, ſo ſind die Geſchwindigkeiten des

Zahns

Zahns und des Trillings oder des Triebſtocks gleich groß, aber beim erſten Angriff zur Linken iſt die Geſchwindigkeit des Triebſtocks $\frac{1}{0,916}$ oder beinahe 1,092 mal ſo groß als die des angreifenden Zahns, hingegen beim Abfall zur Rechten iſt iene nur 0,916 ſo groß als die des Zahns.

6. Wenn alſo die Triebſtöcke t und v zu gleicher Zeit von den Zähnen d und q angegriffen würden, ſo müßte zu gleicher Zeit der Triebſtock v vermöge des Zahns q eine kleinere Umdrehungsgeſchwindigkeit annehmen als der t vermöge des Zahns d; da aber der Triebſtock v nothwendig eben ſo ſchnell umlaufen muß, als der t, ſo folgt, daß der v von dem Zahn q gar nicht an den Triebſtock v zu gleicher Zeit mit dem d an t angreifen kann.

Ueberhaupt kann alſo, wenn irgend ein Zahn d einen Triebſtock t angegriffen hat, nicht auch noch ein anderer Zahn zugleich einen andern Triebſtock angreifen, oder es können niemals mehrere Triebſtöcke zugleich von verſchiedenen Zähnen angegriffen werden.

7. Es erhellet auch aus (no. 5), daß ein Vorgelege nie eine gleichförmige Bewegung geſtattet.

Der angreifende Zahn hat beim Abfall bei v die größte Geſchwindigkeit; doch kann dieſe Geſchwindigkeit nicht ſchon von der erſten Angriffsſtelle in t zu wachſen anfangen, denn ſonſten müßte ſie ewig fortbeſchleunigt werden, weil vermöge der Trägheit die Geſchwindigkeit im erſten Augenblick des Angriffs bei t dieſelbe ſeyn muß, welche der Zahn beim Abfall in v hat, die alſo, aufs neue von t bis v beſchleunigt, ohne Ende wachſen müßte. Vielmehr muß der Zahn

von t bis zur Mittellinie Cc in ſeiner Geſchwindigkeit abnehmen, und hiernächſt bis v erſt wieder in ſeiner Geſchwindigkeit zunehmen, um auf ſolche Weiſe für ieden Schub eines Zahns eine beſtändige mittlere Geſchwindigkeit zu erhalten.

Dieſes ergiebt ſich aus der abwechſelnden Gröſſe der Kraft, welche der Zahn zu Umdrehung des angegriffenen Triebſtocks verwendet.

Wenn ſeine Kraft, womit er in der Mittellinie Cc auf den Triebſtock wirkt, die beſtändige Kraft P iſt, und der Triebſtock einen Widerſtand $Q = P$ entgegenſetzt; ſo iſt (no. 5) zur Linken von Cc die Kraft, womit der Zahn den Triebſtock herumzudrehen ſtrebt, kleiner als P oder $< Q$, zur Rechten von Cc aber $> Q$; es muß alſo die vermöge der Trägheit am Anfang eines ieden neuen Angriffs fortdauernde Bewegung ſo lange abnehmen, bis die Angriffsſtelle in Cc kommt, nunmehr aber, weil iezt wieder Uebewucht eintritt, die Geſchwindigkeit bis in v wieder zunehmen.

Auf ſolche Weiſe erhält alſo die mit Q ins Gleichgewicht geſetzte Kraft die Maſchine, vermöge der gleichen Abwechſelungen zur Linken und zur Rechten von Cc, im ungleichförmigen Beharrungsſtand, und die Ungleichförmigkeit des Beharrungsſtandes, welche auf dieſe Weiſe durch das Vorgelege verurſacht wird, hat alſo für den Effekt keinen Nachtheil, weil P nicht gröſſer als Q ſeyn darf und der Beharrungsſtand vermöge der Trägheit fortdauert. Auch fällt in die Augen, daß die Ungleichförmigkeit kaum merkbar ſeyn müſſe und mehr aus der Theorie geſchloſſen als wirklich wahrgenommen werden kann.

Aufg. 51.

§. 185. Den Zähnen und Kämmen an ihrer angreifenden Fläche eine Form zu geben, bei der die im vor. §. entdeckte Ungleichförmigkeit der Bewegung wegfällt; auch den Erfolg dieſer Einrichtung zu beſtimmen.

Aufl. 1. mnp (fig. 102) ſey der Kreis, welcher die Mittellinien der Triebſtöcke begrenzt; pst der Umfang vom Kranz des Stirnrades, auf welchem die Zähne aufſitzen. Nun wälze ſich der Halbkreis mnp über die Kreislinie pst, ſo beſchreibt der Punkt m eine Epicycloide mqrs. Zugleich beſchreiben die Punkte x, n, Epicycloiden xwz, nq u. ſ. w.

2. Alle ſolche zwiſchen s und p fallende Epicycloiden ſind der untere Theil der Epicycloide srqm, d. h. von unten hinauf, bis auf gleiche Entfernung vom Mittelpunkt C gemeſſen, ſind alle dieſe epicycloidiſche Bögen einander völlig gleich.

So ſind z. B. die epicycloidiſchen Bögen rs, wz, nq, welche der Kreisbogen $\alpha\beta$ abſchneidet, unter ſich völlig gleich.

3. Man denke ſich alſo über p den epicycloidiſchen Bogen $p\lambda = rs$, nämlich einen Zahn (oder Daumen), deſſen Vorderfläche nach der epicycloidiſchen Krümmung $p\lambda = sr$ gebogen ſey; am Umfang des Kreiſes pnm ſey parallel mit ſeiner Umdrehungsaxe eine unendlich dünne Stange befeſtigt, welche hier im Durchſchnitt durch den kleinen Kreis bei p angedeutet wird; ſie ſtellt den Durchſchnitt eines ſehr dünnen Triebſtocks vor. Dreht ſich nun der Daumen λ

um die durch C gehende Axe, ſo muß ſich zugleich die Stange p um die Axe c drehen.

4. Iſt auf ſolche Weiſe der Daumen λ z. B. in die Lage αγ gekommen, ſo befindet ſich iezt die Stange p im Kreis pnm bei v, und der Bogen vγ iſt dem epicycloidiſchen Bogenſtück ds gleich, welchen ein Kreisbogen δεv von mqrs abſchneidet.

Eben dieſer Kreisbogen δεv ſchneidet aber zugleich von dem obern Kreis pnm den Bogen pv ab, welcher das epicycloidiſche Stück ds erzeugt, folglich iſt auch pv der Bogen, durch deſſen Umwälzung das epicycloidiſche Bogenſtück vγ erzeugt wird.

5. Demnach iſt der Kreisbogen pv = Kreisbogen pγ. Da nun v eine unbeſtimmte Stelle iſt, an der ſich während der Umdrehung des Daumens die Stange (der Triebſtock) p befindet, ſo folgt hieraus allgemein:

> Der Bogen, welchen während der Umdrehung des epicycloidiſchen Daumens die Stange p in irgend einem Zeittheilchen durchläuft, iſt dem Bogen, welchen der erſte Angriffspunkt des Daumens (Zahns) in eben dem Zeittheilchen durchläuft, allemal gleich.

6. Kommt endlich der Zahn mit ſeinem Ende bis in n, ſo fällt er da ab, und der Triebſtock p hat den Weg pmn gleichförmig durchloffen, woferne der Daumen eine gleichförmige Bewegung hatte; die Umdrehungsgeſchwindigkeiten des Stirnrades und des Trillings ſind hier in allen Stellen gleich groß.

Eben dieſer Erfolg hebt den oben erwähnten Nachtheil unſerer gewöhnlichen geraden Daumen auf.

7. Es

7. Es wird hierbei vorausgeſetzt, daß während der Umdrehung die Stange p immer in einerlei Entfernung vom Mittelpunkt c angegriffen werde, welches eigentlich nur bei einem unendlich dünnen Triebſtock ſtatt findet. Doch iſt die Veränderlichkeit, der die Entfernung der Angriffsſtelle von der Axe c während der Umdrehung unterworfen iſt, allemal nur gering, und nicht groß genug, um einen merkbar nachtheiligen Einfluß auf die Gleichförmigkeit der Bewegung haben zu können.

8. Um nun zu ſehen, wie Kraft am Stirnrad und Laſt am Trilling während der Umdrehung einander entgegen wirken, ziehe man für eine willkührlich angenommene Stelle v die Halbmeſſer Cv, cv, und nun gv ſenkrecht auf Cv, hv ſenkrecht auf cv, ſo iſt vh die Richtung der Laſt, nach der nämlich der Triebſtock bei v dem Zahn entgegenwirkt.

Die Kraft, auf die Stelle p gebracht, heiſſe P; die Laſt, ebendahin reducirt, Q, ſo muß für das Gleichgewicht, in dieſer Lage des Angriffs, $P = Q$ ſeyn.

9. Mit Cv beſchreibe man den Kreisbogen vi, und ziehe Ci ſenkrecht durch vh; die Sache verhält ſich nunmehr ſo, als ob bei i nach io die Laſt $\frac{Ce}{Cv} . Q$ angebracht wäre.

10. Die bei v wirkende Kraft wirkt eigentlich nach gv; zieht man nun gf ſenkrecht auf vf, ſo ergiebt ſich der nach hv wirkende Theil der Kraft, welcher der Laſt gerade entgegengeſetzt iſt, $= \frac{fg}{gv} . P.$

Man hat alſo allgemein

$$\text{Druck der Laſt nach } vh = \frac{Ce}{Cv} \cdot Q = \frac{Ce}{Cv} \cdot P$$

$$\text{Druck der Kraft nach } hv = \frac{fg}{gv} \cdot P$$

Nun iſt

$$\frac{Ce}{Cv} = \frac{fg}{gv}$$

alſo während der Umdrehung Druck und Gegendruck beſtändig einander gleich. Das Verhältniß zwiſchen Kraft und Laſt wird alſo während der Bewegung durch das Vorgelege nicht abgeändert, wenn die Zähne des Stirnrades epicycloidiſch gebogen ſind.

11. Wenn alſo bei Maſchinen, bei welchen ſich das Moment der Laſt nicht abändert, auch nicht periodiſch Maſſen von neuem in Bewegung geſetzt werden müſſen, die Kraft P mit der Laſt Q für die mittlere Angriffsſtelle p ins Gleichgewicht gekommen iſt, ſo bleibt dieſes Gleichgewicht auch für jede andere Stelle, d. i. während der ganzen Umlaufsbewegung beſtändig fort, und die Fortdauer der Bewegung geſchieht nunmehr gleichförmig bloß vermöge der Trägheit.

12. Doch ſieht man, daß bei dieſen Sätzen noch eine Vorausſetzung zum Grunde liege, die ich nicht beſonders erwähnt habe. Es muß nämlich auch die Reibung an den Zähnen während der Umdrehung als unveränderlich angenommen werden können.

Dieſe Vorausſetzung findet nun freilich nicht ſtatt.

Wenn die mittlere Reibung während der Bewegung von p bis zu einer unbeſtimmten Stelle v = f, die

die Kraft p = P, der gewöhnliche Reibungskoefficient $= \mu$ iſt, ſo hat man

$$f = \frac{\gamma v}{pv} . \mu . P$$

Je gröſſer pv genommen wird, deſto gröſſer wird $\frac{\gamma v}{pv}$, alſo deſto gröſſer der Werth von F.

Der mittlere Werth der Reibung während der Bewegung von p bis zum Abfall bei n iſt

$$= \frac{qn}{pn} . \mu . P = F$$

Dabei wird nun von p bis n die Reibung immer gröſſer, ſo daß ſie bei p = o und beim Abfall in n am gröſten iſt.

Indem alſo der Zahn q den Triebſtock bei n verläßt, und dagegen zu gleicher Zeit der Zahn bei p den Triebſtock p wieder angreift, wird die gröſte Reibung plötzlich wieder in Null verwandelt.

Es kann alſo, in aller Schärfe genommen, auch bei dieſer Geſtalt der Zähne doch keine gleichförmige Bewegung erfolgen, ſondern es muß die Umlaufsgeſchwindigkeit während der Bewegung von p nach n in irgend einer Stelle abzunehmen anfangen.

Sie kann nämlich nicht gleich von p aus ſchon abnehmen, ſondern muß bis zu einer gewiſſen Stelle, z. B bis v wachſen, und dann erſt nach und nach abnehmen, bis ſie endlich in n beim Abfall des Zahns vom Triebſtock am kleinſten wird. Offenbar iſt ſie in n am kleinſten, und dieſe kleinſte Geſchwindigkeit iſt alſo iedesmal die Anfangsgeſchwindigkeit beim erſten

Angriff in p; nähme nun die Geſchwindigkeit gleich von p an wieder ab, ſo müßte ſie bei iedem folgenden Zahn immer kleiner werden, bis ſie endlich = o würde, welches nicht angenommen werden kann.

Der Beharrungsſtand der Maſchine wird alſo nur dadurch möglich, daß die kleinſte Geſchwindigkeit in n, welche zugleich die in eben dem Augenblick vorhandene Anfangsgeſchwindigkeit in p iſt, von p aus bis zu einer gewiſſen Stelle, z. B. v wächſt, von da ſie weiter hin dann bis zu ihrem kleinſten Werthe in n abnimmt, um auf ſolche Weiſe für ieden Schub eines Zahns allemal wieder die mittlere Geſchwindigkeit herzuſtellen.

Zum Wachsthum der Geſchwindigkeit iſt Ueberwucht der Kraft nöthig, alſo muß die Kraft P in p bis zu einer gewiſſen Stelle v Ueberwucht haben, welche die Geſchwindigkeit bis zu dieſer Stelle eben ſo beſchleunigt, wie ſie von dieſer Stelle an bis n durch den Ueberſchuß der Laſt über die Kraft wieder vermindert wird.

Dieſe Ueberwucht ergiebt ſich nun von ſelbſt im Beharrungsſtand, indem durchaus eine Kraft wirkt, die nicht nur dem Widerſtande Q, welcher auſſer der Reibung an den Zähnen vorhanden iſt, gleich iſt, ſondern überdas auch noch dem Werthe von F; da nun der Zahn in p bloß den Widerſtand Q zu überwinden hat, ſo iſt für dieſe Stelle die Ueberwucht F vorhanden, und dieſe nimmt nach und nach ab, bis der Angriffspunkt in eine Stelle v kommt, wo die Reibung = F wird; in dieſer Stelle wird dann die Ueberwucht = o, und weiter hin muß nun die Geſchwindigkeit abnehmen. Es bedarf alſo die Kraft hier keiner beſondern Ueberwucht über den mittlern Werth der

der Laſt, ſondern es iſt $P = Q + F$ für den Beharrungsſtand hinlänglich.

13. Ueberhaupt iſt aber die hieraus entſtehende Ungleichförmigkeit als unmerkbar anzuſehen, da F in Vergleichung mit Q allemal ſehr klein iſt, und, um es klein genug zu machen, das Verhältniß $\frac{\gamma v}{pv}$ nur klein genug genommen werden darf.

14. Die Geſtalt der Kämme an den Kammrädern, wodurch eben der Zweck, wie vorhin bei den Stirnrädern erreicht wird, iſt von der der Zähne etwas verſchieden, weil ſich bei letztern während der Umdrehung nicht nur die angegriffenen Triebſtöcke vom Umfang des Stirnrades, ſondern auch die angreifenden Zähne ſich vom Umfang des Trillings entfernen; bei erſterem entfernen ſich bloß die angegriffenen Triebſtöcke vom Umfang des Kammrades, nicht aber die angreifenden Kämme vom Umfang des Trillings.

Es ergiebt ſich daher bei den Kammrädern die Geſtalt der Kämme, indem man den Umfang des Trillings oder die Kreislinie, durch welche die Mittellinien der Triebſtöcke durchgehen, über eine gerade Linie hinwälzt, wie fig. 103.

Es ſey pc der Halbmeſſer des Trillings, ſo daß der damit beſchriebene Kreis durch die Mittellinien der Triebſtöcke durchgeht.

Läßt man nun dieſen Kreis ſich auf der geraden BA von p nach A umwälzen, ſo beſchreibt z. B. der Punkt n die krumme Linie nq, die das untere Ende einer Cycloide ausmacht.

Würde nämlich der Kreis auf BA ſoweit fortgewälzt, bis der höchſte Punkt d bei m in die AB

fiele,

fiele, ſo wäre die krumme Linie dm, welche der Punkt d durchläuft, eine Cycloide, und wenn man nv der AB gleichlaufend zieht, ſo iſt das Stück vm mit dem nq einerlei.

Iſt pn die Entfernung, in welcher die Mittellinien der Triebſtöcke von einander abliegen, ſo iſt nq die Höhe vom cycloidiſchen Theil eines Kamms, um wieviel er nämlich bei p in die Fläche des Kreiſes hineingreifen müßte.

Uebrigens iſt der Erfolg dieſer Geſtalt der Kämme wie der bei der epicycloidiſchen Geſtalt der Zähne.

15. Der mittlere Werth der Reibung an den Kämmen iſt hier wie bei Stirnrädern

$$= \frac{qn}{pn} \cdot \mu P$$

wenn die Bewegung der Kämme längſt den Triebſtöcken herab bei Seite geſetzt wird.

Dieſe mit in Rechnung zu bringen, denke man ſich durch beide Axen, die des Kammrades und die des Trillings, eine Ebene, und nun von dem Abfallspunkt n (fig. 103) ein Perpendikel auf dieſe Ebene, das ich y nennen will, ſo iſt, wie oben (§. 180), die Höhe von qn wie dort $= \lambda$ geſetzt und die dortige Bedeutung der Buchſtaben beibehalten,

$$\lambda : y = y : (2c - \lambda)$$

alſo

$$y^2 = \lambda . (2c - \lambda)$$

woferne der Zahn als unendlich dünne angeſehen werden könnte.

Bringt

Bringt man aber ſeine Dicke $qr = \delta$ mit in Rechnung, ſo hat man

$$y = \sqrt{(2c\lambda - \lambda^2)} - \delta$$

und nun

$$b = \xi + \sqrt{(b^2 - y^2)}$$

alſo

$$\xi = b - \sqrt{(b^2 - y^2)}$$

und wie (§. 180)

die mittlere Reibung beinahe $= \mu . P . \sqrt{\frac{qr^2 + rn^2 + \xi^2}{y^2 + \lambda^2 + \xi^2}}$

$$= \mu . P . \sqrt{\frac{\delta^2 + \lambda^2 + \xi^2}{y^2 + \lambda^2 + \xi^2}}$$

wofür man aber gar wohl

$$\frac{qn}{pn} . \mu P$$

beibehalten kann *).

Anm. Bei geradeaus gehenden Zähnen oder Kämmen, wie bei unſern gewöhnlichen Vorgelegen, iſt es ſchwieriger, eine auch für die kleinſten Zeittheilchen ganz ohnunterbrochene Berührung zwiſchen Zähnen oder Kämmen und den Triebſtöcken zu bewirken; nur ſind die Zeittheilchen, worin dieſe Berührung unterbrochen wäre, begreiflich viel zu klein, als daß wir eine ſolche Unterbrechung mit dem Geſichte unmittelbar an den Triebſtöcken wahrnehmen könnten; eher können wir die davon herrührenden Erſchütterungen bemerken, oft noch beſſer durch das Gehör als durch das Geſicht. Es iſt dieſes beſonders der Fall, wenn ein

*) Eine geometriſch ſcharfe Beſtimmung der Länge qn hat man hier nicht nöthig. Inzwiſchen findet man ſolche in meinen Anfangsgr. der Reinen Math.

ein Zahn früher abfällt als der nachfolgende wieder angegriffen hat.

Daher muß die Einrichtung ſo gemacht ſeyn, daß der nachfolgende Zahn angreift, bevor der vorausgehende von ſeinem anliegenden Triebſtock ſchon völlig abgefallen iſt. Die Zähne dürfen zu dem Ende nicht allzu kurz ſeyn.

In dem Augenblick aber, da der nachfolgende Zahn (oder Kamm) zum Angriff kommt, iſt die Umlaufsgeſchwindigkeit des Rades gröſſer als die des Trillings oder des Triebſtocks, wie oben gezeigt worden iſt; der Zahn erreicht alſo den Triebſtock allemal mit einem Stoß, wenn gleich die neue Berührung noch vor dem Abfall des vorausgehenden erfolgt. Und hierin liegt eigentlich die Unvollkommenheit unſers gewöhnlichen Räderwerks, die auch bei der übrigens beſten Einrichtung doch immer für die Maſchine nachtheilig iſt.

Dieſer Nachtheil wird durch die cycloidiſche und epicycloidiſche Geſtalt der Kämme und der Zähne an den Kammrädern und Stirnrädern gehoben, da bei dieſen die Umdrehungsgeſchwindigkeiten der Zähne oder Kämme und der Triebſtöcke allemal gleich groß ſind, alſo beide mit gleicher Geſchwindigkeit in ihrem Berührungspunkte zuſammentreffen, wodurch Stöſſe und Erſchütterungen vermieden werden.

Zu (§. 177) gehörige Schriften.

Baader angef. Neue Vorſchläge ꝛc.

v. Cancrin Berg- und Salzwerksk. Th.

Calvör, angef. hiſtoriſch-chronologiſche Nachricht ꝛc.

Langsdorf, angef. Lehrb. d. Hydraul.

Neun

Neun und zwanzigſtes Kapitel.
Von den Hammerwerken.

Erklärung 55.

§. 186. Hammerwerke ſind beſtimmt, Form und Dichtigkeit der Metalle mittelſt groſſer Hämmer abzuändern.

Hierzu dienen Hämmer von 40 bis zu 1200 und ſelbſt bis zu einigen tauſend Pfunden, wie ſie wenigſtens in England angetroffen werden ſollen. Die Erhebung des Hammers geſchieht durch Daumen oder Hebeköpfe einer beſtändig herumlaufenden horizontalen Welle. Senkrecht durch den Helm geht ein ſtarker eiſerner Polzen, deſſen hervorſtehende beide Enden als Zapfen in zweien Büxen laufen, die in zweien parallel ſtehenden Pfoſten eingelegt ſind.

Wird der Helm zwiſchen der Umdrehungsaxe (den Büxen) und dem Hammerklotz angegriffen, ſo hat man einen Aufwerfhammer wie (fig. 104), wo m den Angriffspunkt bezeichnet; hingegen einen Schwanzhammer, wenn die Büxen zwiſchen dem Hammerklotz a und der von den Daumen angegriffenen Stelle m liegen, wie (fig. 105).

Anm. Ich theile hier ſämmtliche von einer wirklichen Anlage hergenommene Abmeſſungen mit, alles nach Nürnberger Maaſe.

I. Für einen 3 Zentner ſchweren Aufwerfhammer (fig. 104).

	Fuß	Zolle
die Länge bc des Helms von den Büxen aus gemeſſen	7	—

die

		Fuß	Zolle
die Stärke		—	10
Breite . . .		—	8
die Entfernung des vom Daumen angegriffenen Punktes m vom Mittelpunkt des Hammers, am . . .		1	$10\frac{1}{2}$
die Entfernung von den Zapfen oder Büren bm		4	$1\frac{1}{2}$
Ganze Länge ab . . .		6	—
Gewicht des Hammers a für ſich ohne Helm . .	300 ℔		
Gewicht des Helms ſamt Beſchläge	175 ℔		
die Daumenwelle iſt lang . . .		24	—
ihr Durchmeſſer		2	10
die Wellzapfen im Durchmeſſer . .		—	5
Höhe des Hubs . . .		2	—

II. Für einen $1\frac{1}{2}$ Ztr. ſchweren Schwanzhammer (fig. 105).

		Fuß	Zolle
Die ganze Länge mc . . .		13	4
Stärke und Breite . . .		—	10
Entfernung ab		8	4
— — — mb . . .		4	2
das Gewicht des Hammers für ſich ohne Helm . .	150 ℔		
Gewicht des Helmſtücks bc	206 ℔		
Gewicht des bm ſamt dem 32 ℔ ſchweren Schwanzring .	132 ℔		
die Höhe des Hubs . . .		1	—

Uebrigens verdienen die Schwanzhämmer den Vorzug vor den Aufwerfhämmern, welche allemal ſeitwärts von den Daumen angegriffen werden müſſen.

Aufg.

Aufg. 52.

§. 187. Bei einem Hammerwerk in Anſehung der erfoderlichen Geſchwindigkeit des Hammers und des gleichförmigen Gangs der Maſchine die zweckmäſſige Einrichtung zu treffen.

Aufl. 1. Die Schläge des Hammers ſollen mit der gröſtmöglichen Schnelligkeit auf das glühende Eiſen erfolgen, weil gerade in den erſten Sekunden der Wärmeverluſt am gröſten iſt. Der Hammer muß daher 80 — 100 und noch mehr Schläge in einer Minute thun, und es müſſen ebendarum 3. 4. 6 Daumen in einem Kreisumfange der Welle angebracht werden, die zu einem einzigen Hammer gehören.

2. Damit aber der Helm in ſeiner Bewegung nicht von den ſo ſchnelle nach einander folgenden Daumen aufgefangen werde, bevor der Hammer bis zu ſeiner tiefſten Stelle iedesmal wieder herabgefallen iſt, ſo muß man den Fall des Hammers zu beſchleunigen ſuchen. Hierzu dient eine ſtarke elaſtiſche Stange, ein Stoßreitel, welcher über dem Hammer, etwas unter der höchſten Stelle des Hammers, angebracht wird, damit der daran ſtoſſende Hammer mit Schnelligkeit zurückpralle.

3. Da der gröſte Effekt eines Waſſerrades nur bei einer beſtimmten Geſchwindigkeit deſſelben eintrit, die nicht groß genug iſt, den Daumen die erfoderliche Geſchwindigkeit zu verſchaffen, wenn ſolche unmittelbar an der Welle des Waſſerrades angebracht wären, ſo findet die Vorrichtung der Daumen an der Waſſerwelle nur bei überflüſſigem Aufſchlagewaſſer ſtatt, alſo nur äuſſerſt ſelten.

Daher muß bei fehlendem **Ueberfluß** von Waſſer ein Stirnrad um die Waſſerwelle gelegt werden, deſſen Zähne in die Triebſtöcke eines Trillings eingreifen, der um eine andere Welle gelegt wird, die der Waſſerwelle parallel liegt und zugleich mit den Daumen verſehen iſt.

4. Die Daumen müſſen für Schwanzhämmer auf der angreifenden Seite **epicycloidiſch** gekrümmt ſeyn, wie aus dem vorigen Kap. erhellet.

Für Aufwerfhämmer pflegt man dieſelbe Geſtalt beizubehalten, ob ſie gleich nicht ganz paſſend iſt.

5. Dieſe epicycloidiſche Geſtalt ergiebt ſich hier auf folgende Weiſe:

Mit dem Schwanze bm (fig. 104) als Halbmeſſer wird (fig. 106) der Kreis no. I. beſchrieben; eben ſo mit dem Halbmeſſer nm (fig. 105) der Kreis no. II (fig. 105).

Jetzt läßt man ſich zwei Scheiben abdrehen, deren Durchmeſſer mit no. I und II. einerlei ſind.

Wenn nun beſtimmt iſt, daß das Schwanzende m (fig. 105) bis in p niedergedruckt werden ſoll, ſo macht man (fig. 106) mr = dem Bogen mp (fig. 105) und, bemerkt nunmehr die krumme Linie rp (fig. 106), welche der Punkt r beſchreibt, indem ſich die obere Scheibe über den äuſſeren Umfang der unteren herabwälzt.

Dieſer Bogen pr iſt die erfoderliche Geſtalt des Daumens von m bis o (fig. 105).

6. Bei einem Hammerwerk ohne Vorgelege müſſen die Kränze des Waſſerrades die Stelle eines Schwung-

Schwungrings vertreten und zu dem Ende ihre gehörige Dicke haben (§. 166).

Bei einem Hammerwerk mit Vorgelege wird am beſten an der Daumenwelle ein beſonderer Schwungring angebracht.

Anm. In der Ausübung wird die Erinnerung (no. 6) ſehr vernachläſſigt, und dieſes hat bei vielen Hammerwerken zu zu dem falſchen Schluſſe veranlaſſet, daß es, der widerſprechenden Theorie ungeachtet, beſſer ſey, die Hammerwerke ohne als mit Vorgelege zu betreiben, weil im letzteren Falle die Bewegung nicht mit derſelben Stetigkeit fortgeſetzt werde.

Aber ſolche Behauptungen können nur von Männern herrühren, welche höchſtens einzelne Bruchſtücke der Theorie kennen, ſie aber bei weitem nicht im Ganzen überſehen.

Die Betrachtung (§. 166) zeigt, was geſchehen müſſe, um den Gang des Waſſerrades mit dem größtmöglichen Vortheil der Gleichförmigkeit zu nähern.

Sollen, wie gewöhnlich geſchieht, die Radkränze zugleich die Stelle des Schwungrings vertreten, ſo müſſen ſolche deſto mehr Maſſe haben, ie gröſſer die reducirte Maſſe Σ in Vergleichung mit Π iſt; bei einem mit Vorgelege angelegten Hammerwerk fällt aber der Werth von Σ in Vergleichung mit Π vielmal gröſſer aus, als bei einem ohne Vorgelege, und es nähert ſich daher bei letzterem der Gang weit mehr der Gleichförmigkeit als bei erſterem, wenn man es bei der gewöhnlichen Stärke der Radkränze beläßt, die für erſteres viel zu gering iſt. ſ. unten §. 189.

Aufg. 53.

§. 188. Eine allgemeine Gleichung zwiſchen den verſchiedenen Beſtimmungsſtücken anzugeben, von welchen der Effekt eines Hammerwerks abhängt.

Aufl. I. Für den Schwanzhammer (fig. 104).

1. d ſey der Schwerpunkt des Helms ohne den Hammer, und bd . . = a

des Helms Gewicht . . = γ

die Länge bm . . . . = λ

— — ba . . . . = λ'

das Gewicht des Hammers a . = γ'

der Halbmeſſer nm . . . = r

der Halbmeſſer nw . . = $r_{\prime}$

des Waſſerrades mechaniſcher Halbmeſſer . . . . . = R

der Halbmeſſer des an der Waſſerwelle liegenden Stirnrades . . = R'

der Halbmeſſer des an der Daumenwelle liegenden Trillings . = r'

der mittlere Halbmeſſer vom Kranz des Waſſerrades . . . . = Δ

dieſes Kranzes (oder der Kränze) Gewicht . . . . . = γ^{v}

der Halbmeſſer vom inneren Umfang des an der Daumenwelle angebrachten Schwungrings . . . = $\mathfrak{r}$

der Halbmeſſer des äuſſeren Umfangs dieſes Schwungrings . . . = $\mathfrak{R}$

die Höhe des Hubs, bis zu welcher der Mittelpunkt des Hammers iedesmal erhoben wird . . . . = b'

die Länge bc . . . . . = l

das Gewicht von bc . . = γ''

das

das Gewicht von bm . . $= \gamma'''$

das Gewicht der Daumenwelle . $= \gamma^{IV}$

die am Ende des mechaniſchen Halbmeſſers R wirkende Kraft . $= P$

ſo iſt (§. 163)

$$P = \frac{b}{B} . Q + \frac{(\Sigma + W).(\Pi + \Sigma + W).b}{t^2 g.(2\Pi + \Sigma + W)}$$

wo es nur darauf ankommt, die verſchiedenen Werthe der in dieſer Formel vorkommenden Gröſſen zu ſubſtituiren.

2. Ich will eine Daumenwelle für zwei Hämmer von gleichen Abmeſſungen annehmen, ſo daß der eine in demſelben Augenblick von dem einen Daumen ergriffen wird, da der andere von ſeinem Daumen abfällt.

Wird nun die Laſt Q auf die Entfernung bm $= \lambda$ von der Axe b gebracht, ſo hat man, die Reibung bei Seite geſetzt,

$$Q.\lambda = a.\gamma + \lambda'.\gamma'$$

und

$$Q = \frac{a\gamma + \lambda'\gamma'}{\lambda}$$

Die geſammte Reibung gleichfalls auf die Entfernung λ gebracht, ſoll F heiſſen, ſo hat man, die Reibung mit in Rechnung gebracht,

$$Q = \frac{a.\gamma + \lambda'.\gamma' + \lambda.F}{\lambda}$$

3. Hier wird $W = 0$, weil bloß von Erhebung einer feſten Maſſe die Rede iſt.

4. Des Hammers Maſſe γ' auf die Stelle m reducirt iſt $= (\frac{\lambda'}{\lambda})^2 . \gamma'$

Des Helms mc Maſſe eben ſo reducirt

$$= \frac{\frac{1}{3}(l^2\gamma'' + \lambda^2\gamma''')}{\lambda^2} \text{ (Dyn. §. 103.)}$$

alſo, für die Entfernung bm $= \lambda$,

$$\Sigma = \frac{l^2\gamma'' + \lambda^2\gamma'''}{3 . \lambda^2} + (\frac{\lambda'}{\lambda})^2 . \gamma'$$

$$= \frac{3\lambda'^2 . \gamma' + l^2\gamma'' + \lambda^2\gamma'''}{3 . \lambda^2}$$

5. Was b in der allgemeinen Formel für P iſt, bezeichnet hier die Höhe des Hubs, auf die Stelle m reducirt, alſo

$$b = \frac{\lambda'}{\lambda} . b'$$

6. Das Stirnrad habe N Zähne, der Trilling n Triebſtöcke, zu einem Hammer ſollen $\mathfrak{N}$ Daumen gehören, ſo kommen auf einen Umgang des Waſſerrades $\frac{N}{n}$ Umläufe der Daumenwelle, alſo $2\mathfrak{N} . \frac{N}{n}$ Hammerhübe.

Iſt alſo die Zeit, in der das Waſſerrad einen Umlauf macht, in Sekunden $=$ T, und die Zeit, in der ein Hammer einen Hub macht, $=$ t, ſo iſt

$$t = \frac{T}{2\mathfrak{N} . \frac{N}{n}} = \frac{n . T}{2\mathfrak{N} . N}$$

welches in der Formel für P ſtatt t geſetzt wird.

7. Das

7. Das Moment der Trägheit der Daumenwelle iſt (Dyn. §. 103) *)

$$\tfrac{1}{2}\,(r)^2 . \gamma^{IV}$$

alſo ihre auf die Entfernung nm reducirte Maſſe

$$= \frac{(r')^2 . \gamma^{IV}}{2 . r^2}$$

Des Schwungrings Mom. d. Trägh. iſt, wenn ſeine Breite der Axe parallel genommen δ heißt, und das Produkt aus ſeinem kubiſchen Inhalt in G ſein Gewicht giebt,

$$= \frac{6{,}28 . \delta}{4} . (\mathfrak{R}^4 - r^4) . G$$

alſo die auf die Stelle m reducirte Maſſe dieſes Schwungrings

$$= \frac{6{,}28 . \delta . (\mathfrak{R}^4 - r^4) . G}{4 . r^2}$$

Die Maſſe der Kränze des Waſſerrades iſt

$$= \gamma^{V}$$

daher ihre Maſſe auf die Stelle m reducirt, genau genug

$$= \frac{n^2}{N^2} . \frac{\Delta^2}{r^2} . \gamma^{V}$$

Da nun die übrigen Maſſen hier wenig in Betrachtung kommen, ſo hat man genau genug

$$\Pi = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 . \tfrac{1}{2}\gamma^{IV} + \frac{1{,}57 . \delta . (\mathfrak{R}^4 - r^4) . G}{r^2} + \left(\frac{n . \Delta}{N . r}\right)^2 . \gamma^{V}$$

*) ſ. die Vorrede.

8. In der Zeit, da die Stelle m den Weg b durchlauft, legt der von der Kraft P angegriffene Punkt einen Weg

$$= \frac{T}{2\mathfrak{N} . \frac{N}{n}} . 6{,}28 . R$$

$$= \frac{n T}{\mathfrak{N} . N} . 3{,}14 . R$$

zurück, alſo hat man in der allgemeinen Formel (no. 1)

$$B = \frac{n . T}{\mathfrak{N} . N} . 3{,}14 . R$$

9. Man kann alſo nunmehr (no. 1) P nach Pfunden berechnen; die ſo gefundene Zahl mit dem in Pfunden ausgedruckten Gewicht von 1 Kub. Fuß Waſſer dividirt, giebt P in Kub. Fuſſen Waſſers.

10. Es kommt nun darauf an, $\mathfrak{R}$, r und δ ſo zu nehmen, daß

Π wenigſtens 5 bis 6 mal ſo groß werde als Σ

Dabei kann dann die Berechnung des vortheilhafteſten Werthes von δ erſpart werden.

Iſt dieſe Einrichtung getroffen, ſo iſt ſchon genau genug

$$P = \frac{b}{B} . \left(\frac{a . \gamma + \lambda' . \gamma' + \lambda . F}{\lambda} + \frac{\Sigma . \lambda' . b'}{\lambda . 2t^2 g}\right)$$

Ohne die Reibung wäre

$$P = \frac{b}{B} . \left(\frac{a . \gamma + \lambda' . \gamma'}{\lambda} + \frac{\Sigma . \lambda' . b'}{2t^2 . g . \lambda}\right)$$

Man

Man kann nun dieſen Werth von P gebrauchen, um F zu berechnen, da dann der ſo gefundene Werth von F in der vorhergehenden Gleichung ſubſtituirt, den Werth von P hier hinlänglich genau giebt.

Zuſ.

§. 189. Lieſſe man den Schwungring an der Daumenwelle weg, ſo bliebe

$$\Pi = (\frac{r'}{r})^2 \cdot \tfrac{1}{2}\gamma^{IV} + \frac{n^2}{N^2} \cdot (\frac{\Delta}{r})^2 \cdot \gamma^V.$$

Wenn alſo ietzt die Kränze des Waſſerrades die Stelle des Schwungrings vertreten ſollten, ſo müßte dieſer Werth von Π ſchon 5 • 6 mal gröſſer als Σ ſeyn. Dazu würde nun bei nicht gar groſſen Hämmern ſchon ein beträchtlicher Werth von γ^V erfodert, alſo ſchon beträchtlich dicke Kränze, die unſere Werkmeiſter den Rädern bei weitem nicht zu geben pflegen, daher ein ſehr ungleichförmiger Gang erfolgen muß. Bleibt aber das Vorgelege ganz weg, ſo wird

$$\Pi = \frac{\Delta^2}{r^2} \cdot \gamma^V$$

alſo ſchon vielmal gröſſer als im vorigen Falle, wo man z. B. $\frac{n}{N} = \frac{2}{5}$, alſo $\frac{n^2}{N^2} = \frac{4}{25}$ haben könnte, ſo daß ietzt Π 5 bis 6 mal ſo groß als im vorigen Falle wäre. Es muß daher ohne das Vorgelege der Gang bei weitem gleichförmiger werden als mit dem Vorgelege.

Dreiſigſtes Kapitel.

Von den Stampfwerken oder Stampfmühlen.

Erklärung 56.

§. 190. Unter einer Stampfmühle verſteht man im Allgemeinen eine mechaniſche Vorrichtung, bei welcher durch Umdrehung einer mit hervorſtehenden Zapfen verſehenen Welle Stampfer von zweckmäſſiger Einrichtung abwechſelnd erhoben werden, die nach iedesmaligem Hub vermöge der Schwere in Gruben niederfallen, in welchen die Maſſen liegen, die durch ſie zermalmt oder ſonſt verändert werden ſollen.

Die in der Welle befeſtigte Zapfen heiſſen allgemein **Daumen**, und insbeſondere **Hebeköpfe**, wenn ihre angreifende Seite eine zur Beförderung des gleichförmigen Gangs abzweckende gekrümmte Fläche bildet. Die Stampfer oder Stempel führen entweder hervorſtehende Zapfen, die dann **Hebelatten** heiſſen, oder haben eine durchgehende Oeffnung, einen **Schlitz** und heiſſen dann **geſchlitzte** Stempel. Eine von beiden Vorrichtungen iſt allemal nöthig, damit die Stempel von den Daumen ergriffen und in die Höhe gehoben werden können. Die Welle mit den Daumen oder Hebeköpfen heißt die **Daumenwelle**, die dann **zweihübig**, **dreihübig**, **vierhübig** iſt, wenn ſie für ieden Stempel **zwei**, **drei**, **vier** Daumen führt.

Die

Die Stempel laufen, damit ſie ihre lothrechte Stellung behalten, durch Oeffnungen, die in zweien über einander an Säulen befeſtigten horizontalen Hölzern ausgeſchnitten werden, auf und nieder; dieſe durchlochten horizontalen Hölzer heiſſen **Leitungen** oder **Scheidelatten**. Die Säulen werden in eine ungemein ſtarke und darum zuweilen aus mehreren Eichen zuſammengeſetzte Schwelle eingeſetzt, welche der **Grubenſtock** heißt, weil in ihr zugleich die Stampfgruben ausgehauen werden.

Aufg. 54.

§. 191. AB (fig. 107) ſey ein Stampfer; a, a die oberen; b, b die unteren Scheidelatten; n die Hebelatte; op die Entfernung des Angriffspunktes p von der Mittellinie fg des Stampfers; und es ſey

die Höhe rq von der Mitte der unteren Scheidelatten bis zur Mitte der oberen . . .	$= H$
oq	$= h$
or	$= \mathfrak{h}$
op	$= \lambda$
das Gewicht des Stampfers .	$= Q$
die Reibung in den Scheidelatten	$= \phi . Q$
der geſammte Widerſtand, welchen der Daumen bei p zu überwinden hat . . .	$= Q'$

Man ſucht eine Gleichung zwiſchen Q′ und den übrigen Beſtimmungsſtücken.

Aufl.

Aufl. 1. fg ſey die Schwerpunktslinie des Stempels; der Druck des Stempels an ein unteres Leitungsholz heiſſe S, an ein oberes S′, ſo iſt, wenn μ der Reibungskoefficient iſt,

$$\Phi . Q = \mu . (S + S')$$

Hier wirken 3 Kräfte 1) wagrecht unten die S mit dem Momente h . S, 2) wagrecht oben die S′ mit dem Momente $\mathfrak{h}$. S′, und 3) die Kraft $Q + \Phi . Q$ oder $Q + \mu . (S + S')$ lothrecht auf p mit dem Momente $\lambda . (Q + \mu . (S + S'))$

2. Dieſe drei Kräfte ſollen nun einander ſo im Gleichgewicht erhalten, daß bei p keine Umdrehung erfolgt; alſo iſt

$$h . S + \mathfrak{h} . S' = \lambda . (Q + \mu . (S + S'))$$

3. Es iſt ferner die Kraft, mit welcher die Hebelatte n vom Daumen p abzugleiten oder nach po zu weichen ſtrebt, $= S' - S$, und wenn nun auch dieſe, welche der Reibung bei p gerade entgegengeſetzt iſt, ſo groß ſeyn ſoll, daß ſie gerade der Reibung bei p das Gleichgewicht hält, ſo hat man überdas

$$S' - S = - \mu . (Q + \mu (S + S'))$$

und

$$S - S' = \mu . Q + \mu^2 . (S + S')$$

4. Aus den beiden Gleichungen (2 u. 3) giebt ſich

$$S + S' = \frac{\mu + 2 . \dfrac{\lambda - \mu . h}{\mathfrak{h} + h}}{1 - \mu^2 - 2 \mu . \dfrac{\lambda - \mu h}{\mathfrak{h} + h}} . Q$$

und

und nun (1), H ſtatt $\mathfrak{h}+h$ geſetzt,

$$\Phi = \frac{\mu.\left(\mu+2.\frac{\lambda-\mu h}{H}\right)}{1-\mu^2-2\mu.\frac{\lambda-\mu h}{H}}$$

5. Daher, wenn die von $Q+\Phi Q$ herrührende Reibung am Daumen durch $\mu'(Q+\Phi Q)$ ausgedruckt wird,

$$Q' = Q+\mu'.(Q+\Phi Q)$$

$$= Q+\mu' Q+\frac{\mu'.\left(\mu^2+2\mu.\frac{\lambda-\mu h}{H}\right)}{1-\mu^2-2\mu.\frac{\lambda-\mu h}{H}}.Q$$

Zuſ. I.

§. 192. Um alſo bei beſtimmten Werthen von λ, H und Q den Widerſtand Q' möglichſt zu verkleinern, muß man $\lambda-\mu h$ ſo klein oder h ſo groß als möglich zu machen ſuchen.

Wenn nun die Höhe der Latte n . $= b'$
und die Höhe des ganzen Hubs . . $= b$
geſetzt wird, ſo muß doch

$$\mathfrak{h} \text{ wenigſtens } = b+b'$$

ſeyn, damit die Latte n am Ende des Hubs nicht an die Leitung anſtoſſe; alſo iſt der größtmögliche Werth von h

$$= H-(b+b')$$

und daher der Widerſtand bei p am kleinſten für

$$h = H-(b+b')$$

Das

Das giebt alſo für die vortheilhafteſte Einrichtung

$$Q' = \left(1+\mu'+\frac{\mu'.\left(\mu^2+2\mu\,\frac{\lambda-\mu(H-b-b')}{H}\right)}{1-\mu^2-2\mu.\frac{\lambda-\mu(H-b-b')}{H}}\right)Q$$

Zuſ. 2.

§. 193. Hier wird nun noch überdas der Werth von Q' deſto kleiner, ie kleiner λ genommen wird; es wird aber für geſchlitzte Stempel $\lambda = 0$, alſo ſind dieſe die vortheilhafteſten und für ſie iſt, wenn man $\mathfrak{h} = b + b'$ nimmt,

$$Q' = \left(1+\mu'+\frac{\mu'(\mu^2 H - 2\mu^2(H-b-b')}{(1-\mu^2)H+2\mu(\mu(H-b-b'))}\right)Q$$

$$= \left(1+\mu'+\frac{\mu'.\mu^2.2.(b+b'-H)}{(1+\mu^2).H-2\mu^2(b+b')}\right).Q$$

oder

$$Q' = \left(1+\mu'-\frac{2\mu'\,\mu^2.(H-b-b')}{(1+\mu^2).H-2\mu^2(b+b')}\right).Q$$

Alſo in der Ausübung genau genug

$$Q' = \left(1+\mu'-\frac{2\,\mu'\mu^2}{1+\mu^2}\right).Q$$

$$= \left(1+\frac{\mu'-\mu'\mu^2}{1+\mu^2}\right).Q$$

oder, weil μ nicht über $\frac{1}{4}$ beträgt, immer noch genau genug

$$Q' = \left(1+\frac{\mu'}{1+\mu^2}\right).Q$$

Aufg.

Aufg. 55.

§. 194. Dem Daumen, welcher während der Erhebung immer an einerlei Stelle des Stempels angreift, eine Krümmung auf der angreifenden Seite zu geben, vermöge der das ſtatiſche Moment vom Gewicht des Stempels während der Erhebung unverändert bleibt.

Aufl. 1. ABC (fig. 108) ſey der Durchſchnitt der Daumenwelle, c der Mittelpunkt; baefgd der Daumen, der von dem mit c in einer Horizontallinie cp liegenden Punkte a nach f herab die verlangte Krümmung haben ſoll; ſo beſchreibe man mit dem mechaniſchen Wellenhalbmeſſer ca einen Bogen man, und nehme auf demſelben von a nach n herab ein Bogenſtück a6 dem verlangten Hube b gleich, z. B. = 15 Zolle, wenn der Hub b des Stempels 15 Zolle betragen ſoll.

Iſt ca = r, ſo iſt der ganze Umfang der mechaniſchen Wellé = 6,28 . r und wenn der erfoderliche Winkel ac6 = ζ geſetzt wird, ſo hat man

$$6,28 \cdot r : b = 360^\circ : \zeta$$

alſo

$$\zeta = \frac{b}{6,28 \cdot r} \cdot 360^\circ$$

wonach man alſo den Bogen a6 mittelſt des Transporteurs leicht abſchneiden kann.

2. Dieſen Bogen a6 theile man in eine gewiſſe Anzahl gleicher Theile; iemehr man Theile macht, deſto beſſer, z. B. hier ſechs.

3. Durch

3. Durch die Theilungspunkte 1, 2....6 ziehe man aus dem Mittelpunkte c gerade Linien c 1, c 2 .... c 6 und trage auf die Endpunkte dieſer Halbmeſſer die Perpendikel 11 = Bogen 1 a; 22 = Bogen 2 a; ..... 66 = Bogen 6 a, d. i. man mache hier

$$11 = \frac{1}{6} b;\ 22 = \frac{2}{6} b;\ .....66 = \frac{6}{6} b = b$$

4. Durch die Endpunkte 1, 2, 3... 6 dieſer Perpendikel ziehe man aus freier Hand von a aus die krumme Linie a 123456, ſo giebt dieſe die verlangte Krümmung und zugleich die zum verlangten Hube erfoderliche Gröſſe der angreifenden Seite des Hebekopfs, dem man von 6 nach g hin eine willkührliche aber etwas kolbige Geſtalt giebt.

Bew. Indem ſich die Welle ABC von C nach A herumdreht und der Hebekopf bei a den Stempel ergreift und in der lothrechten Linie ak aufwärts hebt, fallen nach und nach die Halbmeſſer c 1, c 2 ... c 6 in die horizontale cp, und die Theilungspunkte 1, 2 ... 6 in den Punkt a; weil nun die Perpendikel 11, 22 ... 66 mit den Halbmeſſern c 1, c 2 ... c 6 rechte Winkel machen, und ak auf der cp ſenkrecht ſteht, ſo fallen zugleich iene Perpendikel 11, 22 ... alſo die Stellen 1, 2 ... 6 auf der Krümmung des Hebekopfs nothwendig in die ak, in welcher der Angriffspunkt in die Höhe ſteigt. Indem alſo die nach einander folgenden Stellen des Hebekopfs 1, 2, 3 ... 6 beim Eintreten in die lothrechte ak den Stempel unterſtützen, bleibt die Linie des lothrechten Drucks beſtändig in der ak; und das ſtatiſche Moment der Laſt Q bleibt während dem ganzen Hube = r . Q, weil man ohne merklichen Fehler annehmen kann, daß auch für die übrigen Punkte der aus freier Hand durchgezogenen Linie daſſelbe Geſetz gelte.

Anm.

Anm. Die Krümmung des Hebekopfs läßt ſich auch mittelſt eines Fadens durch einen ſteten Zug verzeichnen. Hierzu dient eine hölzerne Scheibe, die man ſich nach dem Halbmeſſer ca abdrehen läßt. Auf dieſer verzeichnet man den Winkel ac6, legt ſie auf eine Tafel und zieht die 96 auf die c6 ſenkrecht. Man befeſtigt nun an einen Faden einen ſpitzen Steft, den man bei a an dem Rand der Scheibe auf die Tafel ſetzt, befeſtigt den am Rande der Scheibe angelegten Faden etwas unterhalb der Stelle 6, z. B. in S, mit einem Nagel, und führt nun, indem man mit dem Steft in der Hand den Faden angeſpannt erhält, die Spitze des Stefts von a über die Tafel nach τ hin; in 6, wo die ſo verzeichnete durch Abwickelung des Fadens erzeugte Linie die 96 durchſchneidet, iſt der Endpunkt der verlangten Linie.

Aufg. 56.

§. 195. Eine Daumenwelle hat p Stampfer zu betreiben; mit iedem Umlaufe der Welle ſoll ieder Stampfer z mal gehoben werden, und beim Gange der Maſchine ſollen beſtändig n Stampfer zugleich in Bewegung ſeyn, der Erhebungswinkel der Daumen, den nämlich eine angenommene Stelle eines Daumens bei iedem Stempelhube beſchreibt, heiſſe α: man ſoll eine allgemeine Gleichung zwiſchen dieſen verſchiedenen Beſtimmungsſtücken angeben.

Aufl. Es wird vorausgeſetzt, daß alle Daumen gleichförmig um die Welle herum vertheilt ſind.

Sollte nun iedesmal nur ein einziger Stempel in Bewegung ſeyn, ſo müßte nicht eher ein neuer Stempel ergriffen werden, als ſo oft ein Daumen ſeinen Stempel wieder verläßt, d. i. ſo oft ein Daumen den ganzen Erhebungswinkel α beſchrieben hat.

Der Winkel, um welchen ſich die Welle drehen muß, bis wieder ein neuer Stempel erhoben wird, heiſſe nun allgemein η, ſo iſt, weil die Anzahl aller Daumen $= p.z$ ſeyn muß,

$$\eta = \frac{360^\circ}{\pi . z}$$

Sollen nun iedesmal n Stampfer zugleich in Bewegung ſeyn, ſo muß, ſo oft ſich die Welle um einen Winkel $= \frac{1}{n} \alpha$ gedreht hat, ein neuer Stampfer ergriffen werden; es iſt alſo

$$\frac{1}{n} \alpha = \eta, \quad \text{und}$$

$$\alpha = n . \eta = \frac{n . 360^\circ}{p . z}$$

Aufg. 57.

§. 196. Die Gränze zu beſtimmen, welche z nicht überſchreiten darf, woferne ein Stempel im Fallen nicht ſchon vor vollendetem Fall von einem nachfolgenden Daumen aufgefangen werden ſoll.

Aufl. I. Für geradeausgehende Daumen.

Ich betrachte einen ſolchen Daumen als eine von der Axe der Daumenwelle ausgehende gerade Linie, deren Länge von der Axe aus r heiſſen ſoll.

Gehören nun z Stampfer zu einem Daumen, ſo ſind die zu einem Stempel gehörigen Daumen um einen Winkel $= \frac{1}{z} . 360^\circ$ von einander entfernt.

Indem

Indem aber ein Daumen am Ende des Hubs den erhobenen Stampfer verläßt, iſt der zu demſelben Stampfer gehörige nächſtfolgende Daumen, um den Erhebungswinkel α fortgerückt und iſt alſo von der Stelle, wo er den zurückgefallenen Stempel wieder ergreifen ſoll, nur noch um einen Winkel $= \frac{1}{z} . 360^\circ - \alpha$ entfernt.

Wenn nun die zu einer ganzen Umdrehung der Daumenwelle erfoderliche Zeit t heißt, und die Zeit zwiſchen dem Augenblick des vollendeten Hubs und dem Augenblick des hierauf wieder vollendeten Falls mit τ bezeichnet wird, ſo hat man, gleichförmige Bewegung der Daumen vorausgeſetzt,

$$t : \tau = 360^\circ : \left(\frac{360^\circ}{z} - \alpha\right)$$

Dieſes giebt, wenn man aus dem vor. §. den Werth von α ſubſtituirt,

$$\tau = t . \frac{p - n}{pz}$$

Macht nun die Daumenwelle in 60 Sek. N Umgänge, ſo iſt

$$t = \frac{60}{N}$$

alſo

$$\tau = \frac{60 . (p - n)}{N . p . z}$$

Es muß aber die Hebelatte (oder der Schlitz) ihre tiefſte Stelle eher wieder erreichen, als der nachfolgende Daumen an dieſer Stelle ankommt, oder die

Zeit des Falls muß kleiner als τ ſeyn; alſo wird erfodert, daß $\sqrt{\frac{r.\sin\alpha}{g}}$ kleiner als $60.\frac{(p-n)}{N.p.z}$, oder daß

$$r.\sin\left(\frac{n.360^\circ}{pz}\right) < \frac{3600.(p-n)^2.g^2}{N^2.p^2.z^2}$$

ſey.

II. Für gebogene Hebeköpfe.

Für dieſe iſt, den Hub = b geſetzt,

$$\alpha = \frac{b}{6,28.r}.360^\circ$$

und

$$\frac{360^\circ}{z} - \frac{b.360^\circ}{6,28.r}$$

iſt der Winkel, welchen vom Augenblick des vollendeten Hubs an der mechaniſche Halbmeſſer des nächſtfolgenden Hebekopfs durchlaufen muß, um in die horizontale Lage zu kommen.

Es iſt aber der vom mechaniſchen Halbmeſſer in 1 Sek. beſchriebene Winkel $= N.\frac{360^\circ}{60} = N.6^\circ$; alſo die Zeit, worin er den erwähnten Winkel beſchreibt, $= \frac{\frac{360^\circ}{z} - \frac{b.360^\circ}{6,28.r}}{N.6^\circ}$ Sekunden.

Es muß alſo

$$\sqrt{\frac{b}{g}} < \frac{\frac{360}{z} - \frac{b.360}{6,28.r}}{N.6}$$

oder

oder

$$z < \frac{360}{\frac{360 \,.\, b}{6{,}28 \,.\, r} + N \,.\, 6 \,.\, \sqrt{\frac{b}{g}}}$$

ſeyn.

Aufg. 58.

§. 197. Die Kraft P zu beſtimmen, welche am angegriffenen Punkte eines Waſſerrades, deſſen Entfernung von der Axe = R ſeyn ſoll, wirken muß, um die Daumenwelle mit einer verlangten Geſchwindigkeit zu betreiben.

Aufl. 1. Hier dient wiederum die allgemeine Formel (§. 163)

$$P = \frac{b}{B} \,.\, \left(Q + \frac{(\Sigma + W) \,.\, (\Pi + \Sigma + W) \,.\, b}{t^2 g \,.\, (2\Pi + \Sigma + W)}\right)$$

wo es nur darauf ankommt, die einzelen Werthe der in der Formel vorkommenden Gröſſen zu beſtimmen. Es wird nämlich hier

$$W = 0$$

Iſt das Gewicht des iedesmal von neuem ergriffenen Stempels = Q, ſo hat man hier

$$\Sigma = Q$$

2. Hat das Stirnrad N Zähne, der Trilling n Triebſtöcke, ſo verhält ſich der Weg der Kraft am Rade zum gleichzeitigen Weg der Laſt auf dem Hebekopf af (fig. 107), wie $6{,}28 \,.\, R$ zu $\frac{N}{n} \,.\, 6{,}28 \,.\, r$.

 Wenn

Wenn alſo die Maſſe des Kranzes (oder der Kränze) vom Waſſerrade $= \mathfrak{P}$ in Pfunden geſetzt wird, ſo iſt ihr reducirter Werth für die Stelle a

$$= \left(\frac{6,28 \,.\, R}{\frac{\mathfrak{N}}{n} \,.\, 6,28 \,.\, r} \right)^2 . \mathfrak{P} = \frac{R^2 \,.\, n^2}{r^2 \,.\, \mathfrak{N}^2} . \mathfrak{P}$$

wo ca = r iſt.

Das Gewicht der Daumenwelle ſey $= \mathfrak{K}$, ihr wirklicher Halbmeſſer $cB = r$, ſo iſt ihre auf die Stelle a reducirte Maſſe $= \frac{r^2}{2 \,.\, r^2} \,.\, \mathfrak{K}$.

3. Sollen beſtändig n Stampfer in Bewegung ſeyn, ſo bleiben in iedem Augenblick, da ein Stampfer abfällt, alſo in dem Augenblick, da ein neuer ergriffen wird, noch $n - 1$ Stempel in Bewegung, deren Maſſe $= (n - 1) \,.\, Q$ iſt.

Die reducirten Werthe der übrigen in Bewegung bleibenden Maſſen kann man bei Seite ſetzen.

Demnach wird hier

$$\Pi = \frac{n^2 \,.\, R^2}{\mathfrak{N}^2 \,.\, r^2} . \mathfrak{P} + \frac{r^2}{2 \,.\, r^2} . \mathfrak{K} + (n - 1) . Q$$

4. Endlich bei gehöriger Einrichtung (§. 193 am Ende) hier

$$\left.\begin{array}{r}\text{das Q der allge-}\\ \text{meinen Formel}\end{array}\right\} = \left(1 + \frac{\mu'}{1 + \mu}\right) . n . Q$$

ohne Rückſicht auf die Reibung an den Wellzapfen und am Vorgelege.

Man

Man muß ſich hier aus (§. 191. no. 5) erinnern, daß die von $Q+\Phi Q$ an der Stelle a entſtehende Reibung $= \mu' (Q+\Phi Q)$ geſetzt wurde.

Wenn nämlich der gewöhnliche Reibungskoefficient mit μ bezeichnet wird, ſo kann hier die erwähnte Reibung nicht durch $\mu . (Q+\Phi Q)$ ausgedruckt werden, weil dieſes nur da anwendbar iſt, wo die Richtung des Drucks mit der Richtung der Bewegung des ſich reibenden Körpers einen rechten Winkel macht, welches hier der Fall nicht iſt. Der Winkel, welchen die Richtung der Bewegung des Daumens mit der des Drucks macht, iſt hier anfänglich = o und wird nach und nach immer gröſſer; zugleich nimmt aber auch die Entfernung der Horizontalfläche, in welcher die Reibung des Daumens erfolgt, von der Axe der Daumenwelle während der Erhebung eines Stempels beſtändig zu, und es kommt alſo darauf an, das mittlere ſtatiſche Moment zu wiſſen, mit welchem die Reibung des Daumens der Umdrehung der Welle widerſteht. Dieſes mittlere ſtatiſche Moment findet man, wenn die Höhe des Hubs b iſt, für ieden bewegten Stempel

$$= \tfrac{1}{2} b . \mu (Q+\Phi Q)$$

(ſ. Handb. der Maſchinenlehre I. B. S. 51); alſo würde eine Laſt in a $= \frac{\frac{1}{2} b}{r} . \mu . (Q+\Phi Q)$ daſſelbe thun, was die Reibung am Daumen thut, und man muß daher

$$\frac{b}{2r} . \mu \text{ für } \mu'$$

ſubſtituiren.

Dieſemnach iſt das Q der allgemeinen Formel für P hier

$$= \left(1 + \frac{b\mu}{2r.(1+\mu)}\right).n.Q$$

5. Die Zeit eines Wellenumlaufs iſt, wenn das Waſſerrad ε mal in einer Minute herumkommt, $= \frac{n}{\mathfrak{N}} \cdot \frac{60}{\varepsilon}$ Sekunden.

In dieſer Zeit greifen p . z Daumen an, alſo verflieſſen zwiſchen zwei auf einander folgenden Angriffen

$$\frac{60.n}{\varepsilon.\mathfrak{N}.pz} \text{ Sekunden}$$

und der Weg, den ieder von neuem ergriffene Stempel in dieſer Zeit durchlauft, iſt

$$= \frac{6,28.r}{pz}$$

Man hat alſo in der allgemeinen Formel für P

$$t = \frac{60.n}{\varepsilon.\mathfrak{N}.pz} \text{ und } b = \frac{6,28.r}{pz}$$

6. Der Weg, den der von der Kraft angegriffene Punkt des Waſſerrades in derſelben Zeit durchlauft, iſt

$$= \frac{\mathfrak{N}}{n} \cdot \frac{r}{R} . b = \frac{6,28.\mathfrak{N}.r^2}{n.R.pz}$$

welches ſtatt B geſetzt werden muß.

7. Man ſubſtituirt alſo in der allgemeinen Formel für P, die hier ſo ausſieht

$$P = \frac{b}{B} \cdot \left(Q + \frac{\Sigma . (\Pi + \Sigma) . b}{t^2 . g . (2\Pi + \Sigma)}\right)$$

folgende Werthe

$$\frac{n . R}{\mathfrak{N} . r} \text{ ſtatt } \frac{b}{B}$$

$$\left(1 + \frac{b\mu}{2r . (1+\mu)}\right) . n . Q \text{ ſtatt } Q$$

$$Q \text{ ſtatt } \Sigma$$

$$\frac{n^2 . R^2}{\mathfrak{N}^2 . r^2} . \mathfrak{P} + \frac{r^2}{2r^2} . \mathfrak{K} + (n-1) . Q \text{ ſtatt } \Pi$$

$$\frac{6,28 . r . \varepsilon^2 . \mathfrak{N}^2 . pz}{3600 . n^2} \text{ ſtatt } \frac{b}{t^2}$$

Es iſt aber der Hub $b = \frac{6,28 . r}{pz} . n$

alſo

$$pz = \frac{6,28 . r}{b} . n$$

Demnach kann man auch

$$\frac{(6,28 . r)^2 . n . \varepsilon^2 . \mathfrak{N}^2}{3600 . n^2 . b} \text{ ſtatt } \frac{b}{t^2}$$

ſetzen.

Der hiernach berechnete Werth von P iſt hinlänglich, auch die Reibung an den Wellzapfen und am Vorgelege zu berechnen, die dann auf die Entfernung R von der Axe des Waſſerrades gebracht und nach dieſer Reduktion noch zum Werthe von P addirt wird.

So

So giebt ſich P in Pfunden, und die Diviſion mit dem Gewichte eines Kubikfuſſes Waſſer dividirt, giebt P in Kub. Fuſſen Waſſer, woraus ſich weiter nach den obigen Lehren die in einer Sek. erfoderliche Menge Aufſchlagewaſſer berechnen läßt.

8. Inzwiſchen erſieht man gleich aus den Werthen von Σ und Π, daß hier bei nur etwas ſtarken Kränzen des Waſſerrades allemal Σ vielmal kleiner als Π wird, und daher die allgemeine Formel hier genau genug ſo ausgedruckt werden könne:

$$P = \frac{b}{B} \cdot \left(Q + \frac{\Sigma . b}{2 t^2 . g} \right)$$

alſo vermöge der angegebenen Subſtitutionen

$$P = \frac{n . R}{\mathfrak{N} . r} \cdot \left(\left(1 + \frac{b\mu}{2r.(1+\mu)} \right) . nQ + \frac{6{,}28^2 . r^2 . n . \varepsilon^2 \mathfrak{N}^2 . Q}{7200 . n^2 . b . g} \right)$$

9. Setzt man die Zeit, in der die Daumenwelle einen Umlauf macht, $= \tau$, ſo iſt,

$$\tau = \frac{n}{\mathfrak{N}} \cdot \frac{60}{\varepsilon}$$

und

$$\frac{\mathfrak{N}^2 . \varepsilon^2}{n^2 . 3600} = \frac{1}{\tau^2}$$

Man kann alſo auch

$$P = \frac{n . R}{\mathfrak{N} . r} \cdot \left(1 + \frac{b\mu}{2r(1+\mu)} + \frac{6{,}28^2 . r^2}{2 . \tau^2 . bg} \right) . nQ$$

ſchreiben.

10. Und

10. Und weil $\frac{bpz}{n} = 6{,}28 . r$ iſt, alſo $\frac{6{,}28^2 . r^2}{b} = \frac{p^2 z^2}{n^2} . b$, ſo hat man auch

$$P = \frac{n . R}{\mathfrak{N} . r} . \left(\left(1 + \frac{b\mu}{2r(1+\mu)}\right) . n + \frac{p^2 z^2 . b}{2 n \tau^2 . g}\right) . Q$$

Zuſ.

§. 198. Wenn bei einem vorhandenen Stampfwerk der Daumenwelle doppelte Zeit zu einem Umlaufe gegeben, alſo der Werth von τ verdoppelt und doch dieſelbe Anzahl von Stöſſen in einer beſtimmten Zeit erfolgen ſollte, wie vorher, ſo müßte man zugleich pz oder die Anzahl aller Hebeköpfe verdoppeln. Dann bliebe alſo $\frac{p^2 z^2}{\tau^2}$ ungeändert; weil aber auch α ungeändert bliebe, und nach (§. 195) $\alpha = \frac{n . 360^\circ}{pz}$ oder $n = \frac{\alpha}{360^\circ} . pz$, ſo erhellet, daß hiermit zugleich n verdoppelt würde, daß alſo die erfoderliche Ueberwucht $\frac{p^2 z^2 b}{2 n . \tau^2 g} . Q$ iezt nur halb ſo groß wäre als vorhin, und daß man iezt zu demſelben Effekt eine geringere Kraft nöthig hätte als vorher.

Je gröſſer alſo bei einer beſtimmten Anzahl von Stempeln (p) der Werth von z genommen wird, deſto mehr wird an der Kraft erſpart. Daher ſind z. B. dreihübige Daumenwellen vortheilhafter als zweihübige.

Anm.

Anm. Von den Pochwerken, Oehlmühlen, Pulvermühlen und Papiermühlen handle ich hier nicht beſonders. Sie gehören unter die allgemeine Klaſſe der Stampf- und der Hammerwerke, und ihr mathematiſcher Theil bedarf daher keiner neuen Unterſuchung, da die bisherigen allgemeinen Betrachtungen auch auf ſie anwendbar ſind. In Rückſicht auf den techniſchen Theil ſind ſie vorzüglich wichtige Gegenſtände der Technologie, daher ich ſie auch in Vorleſungen über letztere umſtändlich erkläre.

Hierher gehörige Schriften.

Belidor, angef. Archit. hydraul.

Beyer, Schaupl. der Mühlenbauk.

v. Cancrin, Berg- und Salzwerkskunde.

Huth, nöthige Kenntniß zur Anlegung der Waſſermühlen. Halle 1787.

Ein und dreiſigſtes Kapitel.

Von den Schneidemühlen.

Erklärung 57.

§. 199. Eine mechaniſche Vorrichtung, bei welcher durch Umdrehung einer Hauptwelle eine Säge unaufhörlich auf- und niedergetrieben und das Holz, welches zerſchnitten werden ſoll, nach iedem Schnitt durch die Maſchine ſelbſt vorwärts gegen die Zähne der Säge gerückt wird, um von ihr, die nicht vorwärts rückt, immer wieder aufs Neue ergriffen zu werden, heißt eine Schneide- oder Sägemühle.

Die

Die Säge iſt in ein Gatter eingeſpannt, welches durch ſeine Verbindung mit einem Krummzapfen oder einer Kurbel auf- und niedergeſchoben wird.

Die Bewegung der Kurbel geſchieht durch ein Waſſerrad mit einem Vorgelege.

Die Einrichtung wird ſo gemacht, daß die Säge in einer Sekunde nicht unter 4, aber auch nicht über 6 Fuſſe durchlauft.

Das Kurbelknie macht man nicht über 9, aber auch nicht über 15 Zolle hoch, ſo daß der ganze Hub der Säge nicht unter $1\frac{1}{2}$, aber auch nicht leicht über $2\frac{1}{2}$ Par. Fuſſe beträgt.

Die Zähne der Säge werden ſo geſtellt, daß ſie nur beim Niedergang des Sägegatters einſchneiden; ieder höher liegende Zahn ſteht etwas mehr vorwärts, damit beim Niedergange alle durch den Sägblock gehende Zähne gleichen Widerſtand finden. Es iſt alſo die Linie, in welcher die Schärfen oder Spitzen der einzelen Zähne liegen, nicht vertikal, ſondern ſie macht mit der Vertikallinie einen ſehr ſpitzen Winkel, den man den **Anlaufswinkel** der Säge nennen kann.

Während dem Hub des Gatters mit der eingeſpannten Säge ſtößt eine Stange, die mit einem **Geißfuß** in ein **Sperrad** eingreift, dieſes Sperrad um einen oder etliche Zähne weiter, und mit dieſer Bewegung des Sperrades iſt zugleich eine vorwärts gegen die Zähne der Säge fortrückende Bewegung des **Klotzwagens** verbunden, auf welchem der Sägeblock feſtliegt.

Dieſes ſtoß- oder rückweiſe bei iedem Hub der Säge erfolgende Vorrücken des Klotzwagens mit dem

darauf

darauf befeſtigten Sägeblock darf nur ſoviel betragen, als die Tiefe des Schnitts nach der Länge des Sägeblocks bei iedem Niedergange der Säge betragen ſoll, und man muß ſich hüten, dieſen Schub des Sägeblocks nicht zu groß anzuordnen, weil dadurch Brüche entſtehen könnten.

Dieſe Regulirung des Vorrückens des Klotzwagens geſchieht durch das Einhängen der ins Sperrad eingreifenden Stoßſtange, indem ſolche den Klotzwagen mehr oder weniger vorrückt, nachdem ſie am Hebelarm an einer mehr oder weniger von der Umdrehungsaxe entfernten Stelle eingehängt wird.

Man läßt zu dem Ende die Säge von unten nach oben ſo anlaufen, daß die Linie, in der ihre Spitzen liegen, auf die Höhe von 10 Zollen um $\frac{1}{5}$ bis $\frac{1}{2}$ höchſtens $\frac{2}{3}$ Linie von der lothrechten abweicht, ſo daß bei einem 30 Zoll hohen Niedergang die Tiefe des Schnitts längſt dem Sägeblock höchſtens $\frac{30}{10} \cdot \frac{2}{3} = 2$ Linien betragen kann.

Schnitte zu 3 Linien tief ſind nur bei ſehr vielem Aufſchlagewaſſer anwendbar.

Aufg. 59.

§. 200. **Den Widerſtand allgemein auszudrucken, welchen die Säge überwinden muß.**

Aufl. Weil nicht alle Holzarten bei einerlei Abmeſſungen gleichen Widerſtand der Säge entgegenſetzen, ſo will ich dieienige Eigenſchaft, vermöge der ein Holz bei völlig einerlei Abmeſſungen der Säge mehr widerſteht, als ein anderes, ſeine ſpecifiſche Härte nen-

nennen und ſie durch ϕ ausdrucken, die des Eichenholzes = 1 geſetzt.

Bei der Unvollkommenheit der hierüber angeſtellten Beobachtungen halte ich folgende Belidorſche Angabe noch für die ſicherſte, um allgemeine Berechnungen darauf zu gründen.

„Drei an einer Säge angeſtellte Perſonen,
„wovon zwei unten ſtehen und die dritte oben
„die Säge wieder aufwärts zieht, können in
„einer Stunde einen noch grünen 12 Zoll
„ins Gevierte ſtarken eichenen Block auf eine
„Länge von 10 Fuſſen durchſchneiden.

Man kann dabei annehmen, daß die Arbeiter dieſes vermögend ſind, wenn die Säge auf eine Höhe von 10 Zollen etwa $\frac{1}{3}$ Linie Anlauf hat, und daß jeder Arbeiter dabei eine Kraft von 30 Cöllniſchen Pfunden anwendet.

Der beſchriebene Block widerſteht demnach der Säge etwa als eine Laſt von 90 Cölln. Pfunden; man kann hierbei ſicher ſeyn, für den Widerſtand nicht zu wenig gerechnet zu haben.

Wäre nun für irgend einen andern Block die Höhe des Schnitts, welche bei der vorſtehenden Beobachtung 12 Zolle betrug, in Zollen = h, der Anlauf der Säge auf die Höhe von 10 Zollen = α Linien, und die ſpec. Härte = ϕ, ſo wäre der Widerſtand, welchen Arbeiter beim Durchſchneiden dieſes Blocks zu wältigen hätten, für die in der Ausübung vorkommenden Werthe von α genau genug

$$= \frac{\alpha \cdot h}{\frac{1}{3} \cdot 12} \cdot \phi \cdot 90 \text{ Pf.}$$

Bei

Bei einer Schneidemühle kommt nun hierzu noch die übrige Reibung der Maſchinentheile, die auf die Stelle des Sägegatters reducirt F in Pfunden heiſſen ſoll; hingegen kommt der beim Niedergange wirkenden Kraft das Gewicht des Sägegatters mit der Säge zu Hülfe, das ich mit S bezeichnen will.

Heißt alſo der nun noch übrige Widerſtand der Säge Q, ſo hätte man hiernach

$$Q = \frac{\alpha . h}{4} . \Phi . 90 + F - S.$$

Wenigſtens kann dieſer Ausdruck, der von jener Beobachtung abgeleitet iſt, in Fällen als beiläufige Beſtimmung gelten, wo die Geſchwindigkeit der Säge beiläufig $2\frac{1}{2}$ Par. Fuſſe beträgt.

Hier kann aber der Umſtand, daß die Faſern einer ſchnell zerreiſenden Kraft weniger als einer langſameren widerſtehen, ſchlechterdings nicht aus der Formel wegbleiben, und eben dieſer Umſtand erſchwert die Theorie der Sägmühlen ungemein.

Zur beiläufigen Beſtimmung ſetze ich, die Geſchwindigkeit der Säge = c angenommen,

$$Q = \frac{\alpha h \Phi}{4} . 90 . \frac{2 - \frac{c}{10}}{2 - \frac{2,5}{10}} + F - S$$

oder

$$Q = \frac{9}{7} . (20 - c) . \alpha h \Phi + F - S$$

Eine Formel, die begreiflich nur für Werthe von c, welche in der Ausübung ſtatt finden, die alſo

20 — c niemals verneint machen, als Näherungsformel gelten ſoll. Genauere Beobachtungen können zur Korrektion dieſer Formel Anlaß geben.

Zuſ.

§. 201. Die zur Ueberwindung dieſes Widerſtandes erfoderliche Kraft P muß nun nach der allgemeinen Formel (§. 163), die ſich hier in

$$P = \frac{b}{B} \cdot \left(Q + \frac{\Sigma . (\Pi + \Sigma) . b}{t^2 . g . (2\Pi + \Sigma)}\right)$$

verwandelt, beſtimmt werden.

Wegen der Vorrichtung des Krummzapfens, auf deſſen Warze hier alles reducirt wird, verwandelt ſich dieſe Formel nach (§. 169) in

$$P = \frac{b}{B} \cdot \left(q + 0{,}637 . Q + \frac{0{,}424 . \pi . \Sigma . r}{t^2 . g}\right)$$

wo nur noch die gehörigen Werthe für die Gröſſen zur Rechten ſubſtituirt werden müſſen.

Wenn nämlich die Reibung an den Wellzapfen und am Vorgelege auf die Entfernung r der Warze von ihrer Umdrehungsaxe gebracht F heißt, ſo hat man hier

$$q = F$$
$$Q = \tfrac{2}{7} . (20 - c) . \alpha h \Phi - S$$
$$\Sigma = S$$
$$r = r$$

und wenn die Anzahl der Zähne des Stirnrades = N, die der Stöcke des Trillings = n geſetzt wird,

$$\frac{b}{B} = \frac{N . r}{n . R}$$

wo ich mit R den Halbmeſſer des Waſſerrades von der Axe bis zum Angriffspunkte der Kraft bezeichne.

Alſo

$$P=\frac{\mathfrak{N}r}{nR}.\left(0{,}637.(\tfrac{2}{7}.(20-c).\alpha h\phi-S)+F+\frac{0{,}424.\pi Sr}{t^2.g}\right)$$

wo t die Zeit des Niedergangs in Sek. bedeutet.

Dabei wird, wie auch die Beförderung der Gleichförmigkeit im Gange erfodert, vorausgeſetzt, daß die Zeit des Hubs der des Niedergangs gleich ſey.

Heißt nun die zum Hube erfoderliche Kraft $= P'$, ſo muß dieſer Vorausſetzung gemäß

$$P' = P$$

ſeyn.

Es iſt aber im Hube das Gewicht S der Kraft hinderlich, alſo, weil beim Hube die Laſt $0{,}637.\frac{2}{7}.(20-c).\alpha h\phi$ wegfällt,

$$P' = \frac{\mathfrak{N}.r}{n.R}.\left(0{,}637.S+F+\frac{0{,}424.\pi.S.r}{t^2.g}\right)$$

und dieſen Werth dem von P gleichgeſetzt, giebt

$$S = \tfrac{2}{14}.(20-c).\alpha h\phi$$

Anm. 1. Die vorſtehenden Berechnungen beziehen ſich auf den mittleren Widerſtand des Holzes. Leider iſt der Widerſtand, mit dem die Säge zu kämpfen hat, nämlich der Widerſtand des Holzes, für die verſchiedenen Schnitte oft ſehr verſchieden, und mancher Stamm hat zuweilen Stellen, die der Säge den doppelten ia dreifachen Widerſtand in Vergleichung mit der ſonſt einer ſolchen Holzart zugehörigen mittleren Härte entgegenſetzen.

Auf ſolche beſonders bei einzelen Auswüchſen eintretende Stellen iſt bei dieſen Berechnungen nicht gerechnet worden. Zum Glücke kommen ſolcher Stellen nur wenige vor

und

und mit wenigen Umläufen des Waſſerrades kommt die Säge durch ſie durch.

Inzwiſchen muß doch ebendarum die Einrichtung getroffen werden, daß die Maſchine auch bei ſolchen Stellen nicht ins Stocken komme. Daher bedarf ſie ganz vorzüglich eines ſtarken Schwungrades, das um die Trillingswelle gelegt wird.

Anm. 2. Für die Beſtimmung von Φ fehlt es noch an hinlänglichen Beobachtungen. Bis iezt muß man ſich mit folgenden beiläufigen Beſtimmungen begnügen:

für ganz friſches Eichenholz . .	$\Phi = 1,0$
ganz trockenes —— . .	$\Phi = 1,5$
ganz friſches Tannenholz . .	$\Phi = 0,7$
ganz trockenes —— . :	$\Phi = 1,1$

Zuſ. 2.

§. 202. Wenn die Einrichtung nach (§. 201 am Ende) getroffen wird, ſo erhält man die zur Betreibung der Maſchine erfoderliche Kraft, den Werth von S einmal ſubſtituirt,

$$P = \frac{\mathfrak{N} r}{n R} \cdot \left(0{,}637 \cdot {}_{1}\tfrac{2}{4} (20 - c) . \alpha h \Phi + F + \frac{0{,}424 . \pi . S . r}{t^2 g} \right)$$

Dabei iſt auf die ſogenannte Schränkung der Säge, d. h. auf die Stellung der Zähne, welche die Breite des Schnitts zwiſchen zwei Brettern beſtimmt, keine beſondere Rückſicht genommen worden. Sie beträgt gewöhnlich nicht über 2 Pariſer Linien, und bei einem gröſſeren Werthe, wenn er z. B. $= \beta$ wäre, müßte man $\frac{\beta}{2} . {}_{1}\frac{2}{4}$ ſtatt ${}_{1}\frac{2}{4}$ in der Formel ſchreiben.

Aus allem erhellet, daß es zur vôlligen Berichtigung dieſer Theorie noch ſehr an mannigfaltigen und richtigen Beobachtungen fehle.

Hierher gehörige Schriften.

Karſten, angef. Lehrbegr. VI. Th.

Belidor, angef. Archit. hydraul.

Beyer, angef. Mühlenſchaupl.

Zwei und dreiſigſtes Kapitel.

Von den Getraide- insbeſondere den Kornmühlen.

Allgemeine Beſchreibung der Getraidemühlen.

§. 203. Bei den Getraidemühlen kommt es darauf an, über einem feſtliegenden Bodenſtein einen andern walzenförmigen Stein, den Läufer, mit Schnelligkeit herumlaufen zu laſſen, ſo daß dabei die zwiſchen beide Steine einlaufenden Körner gehörig zermalmt oder zerrieben werden, und zugleich das Mehl von den zerriebenen Schalen oder der Kleye abgeſondert werde.

§. 204. Die Umdrehung des Läufers geſchieht dadurch, daß er auf eine ſtarke lothrechte eiſerne Stange, das Mühleiſen, gelegt wird, welches durch einen Trilling durchgeht, in welchen das an der Waſſerradwelle liegende Kammrad eingreift.

Gewöhn-

Gewöhnlich giebt man dem Kammrad 72 Kämme, dem Trilling 6 Triebſtöcke. Inzwiſchen würde eine gröſſere Anzahl von Triebſtöcken, bei gehöriger Anzahl von Kämmen, den Gang der Maſchine allerdings erleichtern.

§. 205. Die Auflegung des Läufers auf den Mühlſtein geſchieht durch ein im **Läuferauge** befeſtigtes Eiſen, die **Haue** oder **Haube**, welche in der Mitte eine pyramidiſche Vertiefung hat, in welche das obere pyramidiſch geformte Ende des Mühleiſens einpaßt.

§. 206. Das Mühleiſen mit dem Trilling ſteht auf einem langen hohl liegenden Balken, dem **Steg**, in einer Pfanne. Das eine Ende dieſes Stegs iſt in eine Seitenmauer geſchoben; das andere ruht auf einem beweglichen Balken, der **Tragbank**. Dieſe kann mittelſt einer Schraube, der **Stellſchraube**, höher oder niedriger gerichtet werden, womit dann zugleich der Läufer mehr oder weniger über den Bodenſtein erhoben wird. Dieſes heißt: **die Mühle höher oder niedriger ſtellen**.

§. 207. Von der Einrichtung der Vorgelege iſt oben (Kap. 28) allgemein gehandelt worden. Die Schrift kann bei Läufern von mittlerer Gröſſe $4\frac{1}{2}$ und bei den gröſten Läufern 5 Rhl. Zolle betragen. Eigentlich ſollten die Kämme an der angreifenden Seite cycloidiſch geformt ſeyn.

§. 207. Das beſtändige Beilaufen der Fruchtkörner aus dem über dem Läuferauge angebrachten Trichter, dem **Rumpf**, geſchieht durch ein bewegliches Käſtchen, den **Schuh**, welcher an der unteren Oeffnung des Rumpfs ſtatt eines feſten Bodens angebracht iſt, der von einigen Stricken getragen wird.

An dieſem Schuh iſt ein in das Läuferauge hinabreichender elaſtiſcher Stab befeſtigt, der Rührnagel, welcher an den Staffeln des im Läuferauge befeſtigten Staffelrings beim Umlaufen des Läufers unaufhörlich abſpringt, und dadurch den Schuh beſtändig rüttelt, ſo daß ſolcher die Körner immerfort in erfoderlichem Maaſe durch eine kleine Oeffnung hinab ins Läuferauge fallen läßt.

§. 208. Der Läufer, der gegen die Gefahr des Berſtens oben und unten mit einem eiſernen Reif belegt ſeyn kann, iſt mit einer runden hölzernen Wand umgeben, der Zarge, von der das zerriebene Getraide durch eine kleine Rinne herabfällt, ſo daß es in den Mehlkaſten fallen würde, wenn es nicht von einem durch den Mehlkaſten geführten Beutel aufgenommen würde, der durch eine beſondere Einrichtung, das Beutelgeſchirr, beſtändig geſchüttelt wird.

Hierdurch wird das Mehl in den Mehlkaſten geſtäubt, und die gröbern Theile fallen am Ende des Beutels durch eine Oeffnung, die mittelſt eines Schiebers vergröſſert oder verkleinert werden kann, in den Kleyenkaſten, von da ſie zum 2ten, 3ten, 4ten mal aufgeſchüttet und mit niedriger geſtelltem Steine zum 2ten, 3ten, 4ten mal gemahlen werden.

§. 209. In der Zeichnung (fig. 109) iſt

A die Welle des Waſſerrades

B das unterſchlächtige Waſſerrad

C das an eben dieſer Stelle liegende Kammrad

D die Mauer des Mühlengebäudes, durch welche die Welle durchgeht.

E der Trilling

n Her-

n Hervorragende Zapfen am Trilling, die bei ihrer Umdrehung den Vorſchlag alle Augenblick zurückſchlagen, der dann immer wieder anſchlägt.

s der Vorſchlag, eine in ein kleines lothrechtes Wellchen eingeſteckte wagrechte Stange oder Latte.

g der Steg, der Balken, auf welchem der Trilling oder das Mühleiſen in einer Pfanne aufſteht.

τ die Tragbank, auf welchem der Steg am einen Ende aufliegt.

x das Mühleiſen

o die Haue

ab der Boden des Mühlengerüſtes

ℒℒ der Läufer

cc der im Läuferauge befeſtigte Staffelring, der an ſeinem inneren Umfang zwei oder drei hervorſpringende Kanten hat, welche hier Staffeln heiſen.

fc der Rührnagel.

yy der Bodenſtein

z die Zarge, der Lauft.

π eine Rinne zum Mehlkaſten herab.

R der Rumpf, ein groſſer Trichter

e der Schuh, ein viereckte Käſtchen.

q ein Baum von der Rumpfleiter, zwiſchen welcher der Rumpf einſitzt.

F, G ein Paar von den Pfoſten, zwiſchen welchen die Rumpfleiter liegt.

O der Kleyenkaſten.

M der Mehlkaſten, Beutelkaſten

N der **Beutel**, welcher das von π herabkommende zerriebene Getraide auffängt, das Mehl durchſchüttelt und das Gröbere in den Kaſten O ablaufen läßt.

$\nu\delta$ die **Beutelzunge**, **Rädeſchiene**.

p w die **Beutelſcheere**, **Rädeſcheere**.

w die **Beutelwelle**.

m einer der beiden oberen Aerme der Beutelwelle, an welche der Beutel gebunden oder geheftet iſt. Zum **Beutelgeſchirr** gehört noch

s der **Vorſchlag** (ſ. oben).

Damit übrigens kein Getraide oder Mehl durch die Oeffnung des Bodenſteins durchfallen könne, ſo wird in ſolche ein cylindriſches Stück Holz, wozu Birkenholz vorzüglich gewählt wird, eingetrieben, das dann nach ſeiner Länge ſo durchbohrt iſt, daß das durchgeſteckte Mühleiſen genau anpaßt.

Anm. In umſtändliche theoretiſche Unterſuchungen über die Mühlen kann ich mich hier nicht einlaſſen. Ich theile daher hier nur einige Reſultate mit, die ſich auf **flache** Gerinne beziehen.

I. Wenn der Durchmeſſer des Läufers in Par. Fuſſen = D und die vortheilhafteſte Anzahl von Umläufen in 1 Minute = N iſt, ſo hat man beiläufig

$$N = \frac{D}{450}$$

Eigentlich heißt dieſes ſo viel: diejenige Stellung der Mühle, bei der der Läufer im Durchſchnitt genommen dieſe Anzahl von Umläufen macht, iſt die vortheilhafteſte.

II. Wenn der Widerſtand, den das Getraide dem Umlaufen des Läufers entgegenſetzt, in der

der Entfernung $\frac{2}{3}$ des Läuferhalbmeſſers angenommen, = R, und das Gewicht des Läufers ſamt der Haue = Q geſetzt wird, ſo hat man für die vortheilhafteſte Stellung der Mühle im Durchſchnitte

$$R = \frac{D}{131} . Q$$

wo D die Bedeutung (I) hat.

III. Zur Beſtimmung der Reibung, welche das Mühleiſen am untern Ende in der Pfanne leidet, muß man den Druck des Läufers auf das Mühleiſen wiſſen. Heißt dieſer Δ, ſo hat man beiläufig

$$\Delta = (1 + \frac{N}{300}) . \frac{1}{2} Q$$

Zu dieſem kommt noch das Gewicht des Mühleiſens mit dem Trilling.

IV. Die geſammte Nebenlaſt auf $\frac{2}{3}$ des Läuferhalbmeſſers gebracht heiſſe Φ, die Entfernung der Kraft von ihrer Umdrehungsaxe r, die Anzahl der Kämme am Kammrad M, die Anzahl der Triebſtöcke m, die Anzahl Umgänge des Waſſerrades in 1 Min. = n, die Kraft, welche in der Entfernung r von der Axe des Waſſerrades angebracht, der geſammten Laſt das Gleichgewicht hält, p, ſo hat man

$$p = \frac{2MD}{3mr} . (R + \Phi)$$

oder auch

$$p = \frac{2ND}{3nr} . (R + \Phi)$$

V. Die Zeit, worin das Waſſerrad einen Umgang macht, heiſſe t in Sekunden; die Geſchwindigkeit, womit das Waſſerrad in der Entfernung r von ſeiner Axe herumlauft, c, und die ihr zugehörige Höhe h; ſo iſt

$$t = \frac{6{,}28 \cdot r}{c} = \frac{3{,}14 \cdot r}{\surd gh}$$

$$n = \frac{60}{t} = \frac{60 \cdot \surd gh}{3{,}14 \cdot r}$$

Es iſt aber auch

$$n = \frac{m}{M} \cdot N = \frac{m}{M} \cdot \frac{450}{D} \text{ (I)}$$

alſo

$$\frac{450 \cdot m}{D \cdot M} = \frac{60 \cdot \surd gh}{3{,}14 \cdot r}$$

und

$$r = \frac{60 \cdot (\surd gh) \cdot DM}{3{,}14 \cdot 450 \cdot m}$$

VI. Die Geſchwindigkeitshöhe des anſtoſſenden Waſſers heiſſe H, ſo iſt für den gröſten Nutzeffekt eines unterſchlächtigen Rades beiläufig $h = \frac{1}{5} H$.

Daher für die Ausübung genau genug

der vortheilhafteſte Halbmeſſer unterſchl. Waſſeräder bis in den Stoßpunkt der Schaufeln gemeſſen

$$= \frac{60 \cdot D \cdot M \surd \frac{1}{5} gH}{3{,}14 \cdot 450 \cdot m} = \frac{0{,}019 \cdot D \cdot M \surd gH}{m} = \frac{0{,}0095 \cdot D \cdot M \cdot C}{m}$$

wo C die Geſchwindigkeit des anſchlagenden Waſſers iſt, die vermöge des Falls ſtatt finden würde, wenn keine Schaufeln im Wege wären.

Nimmt man r nach Willkühr an, ſo hat man hiernach

für die vortheilhafteſte Einrichtung des Getriebes $\left.\right\} \frac{M}{m} = \frac{105}{D \cdot C} \cdot r$

Die Müller nehmen r nicht leicht über 7 bis 8 Fuſſe.

VII. Bei 4maligem Aufſchütten der Frucht läßt ſich die Menge des Mehls, welches die Mühle ſtündlich liefern kann, wenn ſie übrigens gut eingerichtet iſt, nach Cöllniſchen Pfunden durch folgende Formel ausdrucken

für Roggen und Waizen $S = 0{,}021 \cdot D^2 \cdot \psi \cdot B \cdot \frac{M}{m} \cdot \frac{c}{r}$ ℔

für Gerſte $S = 0{,}06 \cdot D^2 \cdot \psi \cdot B \cdot \frac{M}{m} \cdot \frac{c}{r}$ ℔

Hier iſt S die Pfundezahl des Mehls, welches ſtündlich abgemahlen wird, ψ die ſpec. Schwere des Läufers, die des Waſſers = 1 geſetzt, und B der kub. Inhalt des Läufers in Par. Kub. Fuſſen. Die übrigen Buchſtaben haben die vorher erklärten Bedeutungen.

Einige hierher gehörige Schriften.

Belidor, angef. Architektura hydraulika.

Mönnich, Anleitung zur Anordnung und Berechnung der gebräuchlichſten Maſchinen. Augsburg 1779.

Fabre, Verſuch über die vortheilhafteſte Bauart hydrauliſcher Maſchinen, und insbeſondere der Getraidemühlen, aus dem Franzöſ. von Lüdicke. Leipz. 1786.

Huth, die nöthigſten Kenntniſſe zur Anlegung, Beurtheilung und Berechnung der Waſſermühlen, Halle 1787.

Bayer, angef. Mühlenſchauplatz.

Langsdorf, angef. Lehrbuch der Hydraulik.

Hoff-

Hoffmann, der Waſſermühlenbau, mit beſonderer Rückſicht auf die Mahlmühlen, Königsberg 1800.

Claußen, Praktiſche Anweiſung zum Mühlenbau, Leipz. 1792.

Drei und dreiſigſtes Kapitel.

Von den Fuhrwerken *).

Aufg. 60.

§. 210. AFGB (fig. 110) ſey ein Wagenrad, c ſein Mittelpunkt, $\alpha\beta\gamma$ ſeine Nabe, der innerhalb der Nabe gezeichnete Kreis ein Querſchnitt der Axe, deren Mittelpunkt e iſt; CD ſey eine horizontale ebene und feſte Bahn; an der Axe wirke eine bewegende Kraft P nach eg der Bahn gleichlaufend: man ſoll den Werth von P beſtimmen.

Aufl.

*) Man hat dieſes Kap. als einen Nachtrag zum 6ten Kap. S. 363 zu betrachten. Ich bin hierzu durch den

Verſuch einer Theorie des Fuhrwerks mit Anwendung auf den Straſſenbau, von Kröncke, Chemnitz 1801. 286 S. in 4.

veranlaſſt worden. Die Herrn Fuß und Kröncke finden für den Widerſtand eines Fuhrwerks eine Formel, deren Richtigkeit ſehr wünſchenswerth wäre, weil ihr zufolge ein Pferd auf einem horizontalen feſten ebenen Wege (und genau unterſucht ſelbſt auf einem holperichten) eine Ladung von 100, 110 Zentnern gar wohl zu ziehen vermögte. Da dieſes Reſultat allen Beobachtungen entgegen iſt, ſo

ſucht

Aufl. Es kommen hier zwei verſchiedene Bewegungen in Betrachtung

I. die fortſchreitende der Axe

II. die Umlaufsbewegung des Rades.

Der Angriffspunkt d der Nabe fällt allemal auf diejenige Seite des lothrechten Durchmeſſers AB, auf welcher die Thiere vorgeſpannt ſind; hier zur Linken.

2. mn ſey eine Tangente an d, no horizontal, ſo bedarfen die Thiere zu ihrer fortſchreitenden Bewegung oder zur fortſchreitenden Bewegung der Axe nichts weiter, als ſolche beſtändig in der ſchiefen Richtung nm wie auf einer ſchiefen Ebene fortzubewegen.

Die

ſucht Hr. Kröncke die Formel der Erfahrung dadurch näher zu bringen, daß er noch eine neue Hinderniß, an die man nicht ſogleich denkt, mit in die Formel aufnimmt, und dieſe ſo bedeutend macht, daß dadurch die Ladung ſehr viel kleiner wird, als ſie ſonſt ſeyn dürfte. Er ſetzt nämlich ein für allemal ſehr holperichte Wege voraus, und beſtimmt nun zugleich die Kraft, welche nöthig iſt, ein Rad über ſolche Erhöhungen zu erheben. Aber einmal iſt auch dieſe Vorausſetzung der Erfahrung gar nicht angemeſſen. Wer hat nicht ſchon oft ſolche Straſſen geſehen, wo die Räder ſich beinahe wie über einen Dihlboden wegwälzen? Welcher Fuhrmann würde aber in ſolchem Falle einem Pferde auch nur die Ladung von 30 Zentnern zumuthen? Ueberdas iſt es aber auch gegen die Erfahrung, daß ſich zwiſchen ebenen und etwas höckerichten, z. B. uneben gepflaſterten Wegen ein ſo enormer Unterſchied in der Vergröſſerung des Widerſtandes zeige. Auch iſt es der Erfahrung zuwider, daß z. B. auf einem Dihlboden der Widerſtand eines Fuhrwerks bei unveränderlichen Axen ſich beinahe wie die Höhe der Räder verhalten, wie doch aus der Theorie der Herrn Kröncke und Fuß folgt. Ich habe daher die Sache hier aus einem ganz andern Geſichtspunkt betrachtet.

Die hierzu erfoderliche Kraft heiſſe P, der Winkel Bcd = mno heiſſe α, ſo iſt (Dynam §. 37), wenn das Gewicht der Axe mit ihrer aufliegenden Laſt Q heißt,

$$P = \frac{Q.(\sin\alpha + \mu.\,\mathrm{Cos}\,\alpha)}{\mathrm{Cos}\,\alpha - \mu.\sin\alpha}$$

$$= \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mu}{1 - \mu.\,\mathrm{tg}\,\alpha}.Q$$

3. Der mit dieſer zur Fortſchreitung angewendeten Kraft auf die Umdrehung des Rades wirkende Theil muß dem Widerſtande gleich ſeyn, welchen das Rad der Umdrehung entgegenſetzt.

Was nun auf die Umdrehung wirkt, iſt $\sqrt{(P^2+Q^2)}$ nach der Richtung cd, woraus das ſtatiſche Umdrehungsmoment

$$Bc.\sin\alpha.\sqrt{(P^2+Q^2)}$$

oder, D ſtatt Bc geſetzt,

$$D.\sin\alpha.\sqrt{(P^2+Q^2)}$$

entſteht.

4. Der Halbmeſſer der Nabe heiſſe d, der Koefficient der Walzenreibung μ', ſo iſt

das Hindernißmoment bei B $= D.\mu'.Q$

das bei d $= d.\mu\sqrt{(P^2+Q^2)}$

5. Alſo (3 u. 4)

$$D.\sin\alpha.\sqrt{(P^2+Q^2)}$$

$$= D.\mu'.Q + d.\mu.\sqrt{(P^2+Q^2)}$$

(ħ

Es

Es iſt aber (no. 2)

$$P^2 + Q^2 = \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha^2 + 2\mu\operatorname{tg}\alpha + \mu^2}{1 - 2\mu\operatorname{tg}\alpha + \mu^2\operatorname{tg}\alpha^2} + 1\right) Q^2$$

$$= \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha^2 + \mu^2(1 + \operatorname{tg}\alpha^2)}{1 - 2\mu\operatorname{tg}\alpha + \mu^2\operatorname{tg}\alpha^2} \cdot Q^2$$

$$= \frac{(1+\mu^2)\,.\,(1 + \operatorname{tg}\alpha^2)}{1 - 2\mu\operatorname{tg}\alpha + \mu^2\operatorname{tg}\alpha^2} \cdot Q^2$$

und

$$\surd(P^2 + Q^2) = \frac{\sec\alpha\,.\,Q}{1 - \mu\,.\operatorname{tg}\alpha} \cdot \surd(1 + \mu^2)$$

Demnach, weil $\sec\alpha\,.\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha$ iſt,

$$D\,.\sin\alpha\,.\surd(P^2 + Q^2) = \frac{D\,.\operatorname{tg}\alpha\,.\,Q}{1 - \mu\,.\operatorname{tg}\alpha} \cdot \surd(1 + \mu^2)$$

6. Man erhält daher aus (♄)

$$\frac{D\,.\operatorname{tg}\alpha\,.\surd(1+\mu^2)}{1 - \mu\,.\operatorname{tg}\alpha} = D\,.\mu' + d\,.\mu\surd\left(1 + \frac{P^2}{Q^2}\right)$$

wofür man bei dieſer Unterſuchung auch

$$\frac{D\,.\operatorname{tg}\alpha\,.\surd(1+\mu^2)}{1 - \mu\,.\operatorname{tg}\alpha} = D\,.\mu' + d\,.\mu$$

ſetzen kann. Alſo

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{D\mu' + d\mu}{D\mu\mu' + d\mu^2 + D\surd(1+\mu^2)}$$

7. Daher (2)

$$P = \frac{D\mu' + d\mu + D\mu^2\mu' + d\mu^3 + D\mu\surd(1+\mu^2)}{D\mu\mu' + d\mu^2 + D\surd(1+\mu^2) - D\mu\mu' - d\mu^2} \cdot Q$$

$$= Q$$

$$= Q \times \frac{D\mu' + d\mu + D\mu^2\mu' + d\mu^2 + D\mu\sqrt{(1+\mu^2)}}{D.\sqrt{(1+\mu^2)}}$$

$$= \frac{D\mu'(1+\mu^2) + d\mu(1+\mu^2) + D\mu\sqrt{(1+\mu^2)}}{D.\sqrt{(1+\mu^2)}} . Q$$

$$= \left(\frac{D\mu' + d\mu}{D} . \sqrt{(1+\mu^2)} + \mu\right) . Q$$

Oder noch genau genug

$$P = \left(\mu' + \frac{d}{D} . \mu + \mu\right) . Q \text{ *)}$$

Zuſ. 1.

§. 211. Für eiſerne Axen in eiſernen Büchſen iſt bei guter Schmiere μ kaum $= \frac{1}{10}$ (§. 22), und z. B. für D = 72 Zoll, beiläufig $\mu' = \frac{72+1}{(72^2+1).1,8} . \mu$ oder noch nicht $= \frac{1}{1300}$, daß alſo μ' ganz bei Seite geſetzt

*) Man kann eben dieſe Formel auch aus (no. 5) kürzer ſo ableiten:

Es iſt genau genug aus (♄)

$$D . \sin\alpha = D . \mu' + d . \mu$$

alſo

$$\sin\alpha = \mu' + \frac{d}{D} . \mu$$

Ueberdas genau genug

$$P = \mu . Q + \sin\alpha . Q$$

alſo

$$P = \left(\mu + \mu' + \frac{d}{D} . \mu\right) . Q$$

geſetzt werden kann. Iſt der Halbmeſſer der Nabe $= 2''$, ſo wird $\frac{d}{D} = \frac{1}{18}$, alſo

$$P = \left(\frac{1}{180} + \frac{1}{10}\right) \cdot Q = \frac{19}{180} \cdot Q$$

oder

$$Q = \frac{180}{19} \cdot P$$

Setzt man $P = 180$ ℔, ſo wird

$$Q = \frac{180}{19} \cdot 180 = 1705 \text{ ℔}$$

Ein ſtarker Laſtwagen kann etwa 10 Zentner wiegen. Demnach könnte ein ſolcher für 2 Pferde mit einer Laſt =

$$2 : 1705 - 1000$$

oder in runder Zahl mit

24 Zentner

auf feſten ebenen und horizontalen Wegen beladen werden.

Zuſ. 2.

§. 212. Der Vortheil unſeres Fuhrwerks beſteht alſo hiernach nicht darin, daß das Moment der Reibung vermindert wird; im Gegentheil kommen dabei mehrere Hinderniſſe zuſammen, und zu der Reibung μQ, die dabei ganz in Rechnung kommt, trit die $\frac{d}{D} \cdot \mu Q$ nebſt der $\mu' Q$ noch beſonders hinzu. Der Gewinn liegt demnach nur darin, daß der Werth von μ oder der Reibungskoefficient dadurch ſehr verkleinert wird, daß man die Reibung auf ſehr glatte und ge-

ſchmierte Flächen bringt, dahingegen bei einer Schleiſe auf einer ſolchen Straſſe μ mehr als $\frac{1}{3}$ betragen könnte. Wenn daher eine Bahn ſehr glatt wäre, ſo könnte der Widerſtand für eine Schleife geringer ausfallen als für ein Fuhrwerk. Dieſes iſt der Fall bei Schlitten auf einer Schneebahn, wobei noch der Vortheil hinzukommt, daß ein ſolches Fuhrwerk an ſich leichter iſt.

Zuſ. 3.

§. 213. Iſt die Bahn gegen eine Horizontalebene unter dem Winkel β geneigt, ſo kann man

$$P = \left(\mu' + \frac{d}{D} . \mu + \mu\right) . Q . \mathrm{Coſ}\beta + Q . \mathrm{ſin}\beta$$

ſetzen.

Zuſ. 4.

§. 214. Die Kraft eines Pferdes bei horizontalem Zuge auf horizontalem Wege heiſſe K, ſeine Kraft auf einem Wege, der ſich unter dem Winkel β erhebt, parallel mit dieſem Wege, k; ſo kann man

$$k = K . (1 - \mathrm{tang}\ 1{,}5 . \beta)$$

ſetzen.

Sollen nun vorgeſpannte N Pferde mit der Kraft P ziehen, ſo hat man

$$N . k = P$$

oder

$$N . (1 - \mathrm{tg}\ 1{,}5 . \beta) . K = \left(\mu' + \frac{D+d}{D} . \mu\right) . Q . \mathrm{Coſ}\beta + Q . \mathrm{ſin}\beta$$

und

$$N = \frac{\left(\mu' + \frac{D+d}{D} . \mu\right) . \mathrm{Coſ}\beta + \mathrm{ſin}\,\beta}{(1 - \mathrm{tg}\ 1{,}5 . \beta)} . Q$$

Es

Es darf nämlich einem Pferde, das unter einem Winkel von 30° bergan ſteigt, gar keine Laſt weiter zugemuthet werden.

Zuſ. 5.

§. 215. Für ein einmal in Bewegung geſetztes Fuhrwerk iſt es ſehr gleichgültig, ob die Bahn DC völlig eben oder ob ſie gleichſam mit kleinen Unebenheiten überſäet iſt, ſo daß das Rad immerfort abwechſelnd ſteigen und fallen muß, wie ſolches bei allen, auch bei den beſten Straſſen allerdings der Fall iſt, wenn die Bahn mit einem geometriſchen Auge betrachtet wird. Es iſt aber hier nur von ordentlich befahrnen Straſſen die Rede, wo dieſe abwechſelnde Erhöhungen und Vertiefungen unbedeutend ſind. Geſetzt auch, daß alle 4 Räder eines Wagens in einem gewiſſen Augenblick ſich zu gleicher Zeit auf die hervorſtehenden Flächen vorliegender Steine erheben müßten, ſo kommt dieſer Erhebung die Gröſſe der Bewegung zu ſtatten, welche die vorgeſpannten Thiere mit dem belaſteten Wagen ſchon haben. Ueberdas dient das darauf folgende ſchnellere Herabfallen wiederum zum Erſatze verlohrner Geſchwindigkeit. Dieſe Geſchwindigkeitsänderungen ſind aber überhaupt ſo klein und erfolgen ſo ſchnelle auf einander, daß ſie den fortſchreitenden Thieren nur als eine einzige fortdauernde Wirkung erſcheinen. Hierzu kommt aber noch der Umſtand, daß im Ganzen auf einer ſolchen Bahn ſelbſt das Steigen und Fallen der verſchiedenen Räder gleichzeitig erfolgt, dieſe alſo den ohnehin ſchon unbedeutenden Umſtand unter ſich ſelbſt noch vollends vernichten, wenigſtens für unſern Kalkul.

Wenn daher Hr. Kröncke (a. a. O. S. 202) für ebene horizontale Wege nur

$$P = 0{,}016 . Q = \tfrac{1}{62} Q$$

findet, hingegen für eine gut unterhaltene Chauſſee

$$P = (0{,}016 + 0{,}097) . Q$$

$$\text{beiläufig} = \tfrac{1}{9} Q$$

ſo daß er den von den Chauſſeeſteinen herrührenden Widerſtand allein genommen 6 mal ſo groß findet, als den geſammten Widerſtand des Fuhrwerks auf ebenen horizontalen Wegen, um den geſammten Widerſtand auf Chauſſeen der Erfahrung nahe genug zu bringen, ſo läßt ſich der hinzugeſetzte zweite Theil des Widerſtandes nicht als ein aus der Theorie abgeleitetes Beſtimmungsſtück betrachten, ſondern als ein Glied, das keinen andern Beſtimmungsgrund hat, als die Ergänzung des unrichtigen erſten Gliedes, damit die Summe von beiden in dieſem Falle der Erfahrung entſprechen möge. Für wirklich ebene horizontale Wege fiele dann doch dieſes 2te Glied weg, und dann könnte nach Hrn. W. für 2 Pferde ein Wagen mit 222 Ztr. beladen werden.

Es iſt ein bemerkenswerther Umſtand, daß das 2te Glied, welches Hr. Kr. noch nöthig findet, um der Erfahrung nahe genug zu kommen, nämlich 0,097 Q genau mit meinem $\mu . Q$ übereinſtimmt, indem hier nach (Dyn. S. 336) $\mu = 0{,}097$ iſt. Nur bleibt dieſes Glied bei mir immer in der Formel ſtehen, bei Hrn. Kr. fällt es für ebene Wege weg.

Anm. Der Abdruck dieſes Buchs war beinahe ſchon völlig geendigt, als ich das Werk von Hrn. Kr. erhielt. Schon dieſer Umſtand erlaubte mir hier keine weitere Ausführung. Auſſerdem hätte aber auch der Plan dieſes Buchs hier keine vollſtändige Abhandlung über die Fuhrwerke erlaubt.

Ta-

Tafeln

zu

praktiſchen Berechnungen

für die Ausübung.

Erſte Tafel

zur Vergleichung der Fußmaße verſchiedener Oerter nach dem Längen- Flächen- und kubiſchen Maße.

Den Pariſer Fuß = 1 geſetzt.

Namen der Oerter	Längen-Fuß	Quadr. Fuß.	Kubick-Fuß.
Amſterdam	0,8715	0,759	0,661
Anſpach	0,9166	0,840	0,769
Augsburg	0,9111	0,830	0,756
Baſel	0,9185	0,843	0,774
Bayern	0,6847	0,469	0,321
Berlin	0,9534	0,908	0,866
Bern	0,9028	0,815	0,735
Braunſchweig	0,8784	0,771	0,677
Bremen	0,8902	0,792	0,705
Breslau	0,8750	0,766	0,670
Brüſſel	0,8958	0,802	0,718
Calenberg	0,8993	0,809	0,727
Cleve	0,9097	0,827	0,752
Cölln	0,8472	0,718	0,608
Copenhagen	0,9662	0,933	0,902
Danzig	0,8833	0,780	0,689
Dresden	0,8715	0,759	0,661
England	0,9386	0,881	0,826
Erfurt	0,8727	0,761	0,664
Frankfurth am Mayn	0,8819	0,777	0,686

Namen der Oerter	Längen-Fuß.	Quard.-Fuß.	Kubick-Fuß.
Genf	1,5021	2,256	3,389
Genua, Palmi	0,7729	0,597	0,461
Gieſen	0,9166	0,840	0,769
Griechiſcher	0,9432	0,890	0,839
Haag	1,0000	1,000	1,000
Halle	0,9166	0,840	0,769
Hamburg	0,8819	0,777	0,686
Hannover	0,8993	0,809	0,727
Harlem	0,8799	0,774	0,681
Heidelberg	0,8576	0,735	0,630
Hollſtein	0,9187	0,844	0,775
Königsberg	0,9472	0,897	0,849
Leipzig	0,8687	0,754	0,655
Lübeck	0,8958	0,802	0,718
Lüttich	0,8854	0,784	0,693
Mannheim	0,8930	0,797	0,712
Mainz	0,9270	0,859	0,784
Mecklenburg	0,8958	0,802	0,718
München	0,6847	0,468	0,320
Neapel	0,8118	0,659	0,534
Nürnberg	0,9354	0,875	0,818
Oldenburg	0,9118	0,831	0,757
Osnabrück	0,8597	0,739	0,635
Pommern	0,8993	0,809	0,727
Prag	0,9292	0,863	0,802
Rheinländiſcher Fuß.	0,9662	0,933	0,902
Rom	0,9069	0,822	0,746
Roſtock	0,8902	0,792	0,705
Ruſſiſcher	1,6569	2,745	4,548
Savoyen	0,8333	0,694	0,578
Schemniz, Bergfuß	1,0389	1,079	1,121
Schweden	0,9138	0,835	0,762
Stettin	0,8701	0,757	0,659

Namen der Oerter	Längen Fuß.	Quadr. Fuß	Kubick-Fuß.
Strasburg	0,8910	0,794	0,707
Stuttgard	0,8806	0,775	0,682
Turin	0,9944	0,988	0,983
Ulm	0,8895	0,791	0,703
Utrecht	0,8403	0,706	0,593
Venedig	1,0694	1,143	1,222
Wien	0,9861	0,972	0,958
Wittenberg	1,0312	1,063	1,095
Zelle	0,8972	0,805	0,722
Zürich	0,9243	0,854	0,789

Es iſt ferner, den Pariſer Fuß = 1 geſetzt,

Eine Toiſe . . .	6,0000
Eine Lachter oder Klafter in Dänemark	6,1923
— — — — zu Eisleben	6,1910
— — — — zu Freyberg	6,1055
— — — — zu Joachimsthal	6,0201
— — — — zu Clausthal	5,9222
— — — — in Schemnitz	6,2333

Nach dem neuen franzöſiſchen Maaß iſt der Méter definitif bei einer Temperatur 17,6 Gr. (100theil. Therm.) = 443,295 Par. Lin. alſo

1 Meter	=	3,0784444 . . . Par. Fuß
Millimeter	=	$\frac{1}{1000}$ Meter
Centimeter	=	$\frac{1}{100}$ —
Decimeter	=	$\frac{1}{10}$ —
Meter	=	1 —
Decameter	=	10 —
Hektometer	=	100 —
Kilometer	=	1000 —
Myriameter	=	10000 —

Zweite Tafel
zur Vergleichung der verſchiedenen landüblichen Gewichte.

Das Nürnberger Pfund = 1 geſetzt.

Namen der Oerter.	Verhältnißzahl für 1 Pfund.	Namen der Oerter.	Verhältnißzahl für 1 Pfund.
Altona	0,9500	Erlangen	0,9998
Amſterdam	0,9688	Frankfurt a. M.	
Anſpach	0,9998	Pfundgewicht	0,9208
Augsburg	0,9644	Frankf. a. d. O.	0,9178
Bamberg	0,9522	Freyberg	1,0524
Baſel	0,9616	Hamburg	0,9500
Bayreuth	1,0151	Hannover	0,9547
Berlin	0,9187	Heydelberg	0,9890
Bern	1,0217	Mannheim	0,9707
Braunſchweig	0,9157	München	1,1000
Bremen	0,9783	Paris	0,9615
Breslau	0,7949	Prag	1,0075
Brüſſel	0,9139	Rom	0,6923
Caſſel	0,6210	Rußland	0,8023
Cölln	0,9169	Schemnitz	1,0149
Dänemark	0,9791	Ulm	0,9193
Dresden	0,9157	Wien	1,1018
EngliſchTroy Pf.	9 7323	Würzburg	0,9355
Erfurt	0,9257	Zelle	0,9524

Mehrere genaue Abwägungen ſowohl als angeſtellte Berechnungen und Vergleichungen gaben mir ohne merklichen Unterſchied bei etwa 64° Fahr.

das Gewicht von 1 Pariſer Kub. Fuß reinem Waſſer = 67,3 Nürnb. Pf.

Hier-

Hiernach findet man 1 Par. K. Fuß $= \frac{67,3}{0,9615}$
$= 69,995$ oder genau genug $= 70$ Par. Pfund.

Eine Mark Cölln iſt $= \frac{1}{2}$ ℔ $= 16$ Lth.
$= 16 \times 240$ Gran $= 3840$ Gr.
$= 65536$ Richtpfennige

alſo 1 Gran $= \frac{65536}{3840}$ Rpf. $= 17,07$ Rpf.

Nach der neuen franzöſ. Eintheilung iſt in ſolchen Richtpfennigen

1 Centigramme =	2,8	Richtpf.
Decigramme	28,0	—
Gramme	280,5	—
Dekagramme . . .	2805,0	—
Hektogramme . . .	28050,1	—
Kilogramme . . .	280500,6	—
Myriagramme . .	2805006,2	—

Dieſes größte Gewichtsmaaß beträgt alſo etwas über $\frac{1}{7}$ Zentner Cölln.

Es ergiebt ſich hiernach

1 Gran $= \frac{17,07}{2,8}$ Centigr $= 6,096$ Centigr.

Die neuen franzöſ. Flüſſigkeitsmaaße ſind

1 Centiliter . . .	0,5046	Par.	Kub.	Zoll.
Deciliter . . .	5,046	—	—	—
Liter	50,46	—	—	—
Decaliter . .	504,62	—	—	—

Ein Gramme iſt das Gewicht vom zehenten Theile eines Centiliters von deſtillirtem Waſſer beim Gefrierpunkte.

Drit-

Dritte Tafel
zur Vergleichung der ſpecifiſchen Schwere verſchiedener Materien.

Die ſpec. Schwere des reinen Waſſers = 1 geſetzt.

I. Metalle.

	ſpec. Schw.
Platina	
zu Platten verarbeitete gereinigte . .	22,069
geſchlagene gereinigte . .	20,336
geſchmolzene gereinigte . .	19,500
rohe in Körnern	15,601
geſchmolzene rohe	14,626
Gold	
zu 24 Karat geſchmolzen und geſchlagen .	19,361
daſſelbe nicht geſchlcgen .	19,258
von der Engliſchen Münze in Guineen .	17,629
von der ſpaniſchen Münze	17,655
von der portugieſiſchen .	17,966

	ſpec. Schw.
Gold	
von den holländ. Dukaten .	19,352
wie es zur Verarbeitung beſchickt wird, od. zu 20 Karat geſchmolzen, nicht geſchlagen .	15,709
daſſelbe geſchlagen . .	15,774
Silber	
16 löthiges, geſchmolzen und nicht geſchlagen	10,447
daſſelbe geſchlagen . . .	10,510
Kupfer	
geſchmolzen und nicht geſchlagen	7,788
zu Drath gezogen	8,878
Meſſing	
geſchmolzen und nicht geſchlagen	8,395

Meſ-

	spec. Schw.
Meſſing	
geſchmolzen u. zu Drath gezogen	8,544
Eiſen	
geſchmolzenes	7,207
geſchmiedetes	7,788
Zinn, engliſches	7,471
Bley	
geſchmolzenes	11,352

II. Steine.

	spec. Schw.
Quarz	2,640 bis 2,651
Sandſtein, ſehr verſchieden, z. B.	
Steinhauer-Sandſtein	2,085
Bau-Sandſtein	1,933
Filtrirſtein	1,932
Wetzſtein von feinem Korn aus Auvergne	2,699
Serpentin	2,264 bis 2,688
Nur der halbdurchſichtige faſrichte hat	3,000
Schiefer	
Gemeiner	2,672
Weiſer Wetzſchiefer	2,876
Grüner Wetzſchiefer	2,773
Schiefer	
Schon auf den Dächern gebrauchter Dachſchiefer	2,812
Gyps	
halbdurchſichtiger gemeiner Gypsſtein	2,306
dunkler ſpathiſcher	2,274
dergleichen halbdurchſichtiger	2,311
Alabaſter	2,7..
Kalkſtein	
Marmor, genau genug	2,7
Porphyre genau genug	2,7
Granit, gemeine Arten	2,5 bis 2,7

III. Holzarten.

	noch grün	völlig dürr
Ahorn	0,903	0,659
Buchenholz	0,971	0,592
Eichenholz	1,060	0,615
Eſchenbaum	0,903	0,644
Fichten	0,870	0,471
Förlen	0,912	0,539
Tannenholz	0,894	0,554
Ulmenholz	0,948	0,552

IV. Tropfbar-flüſſige Maſſen.

	ſpec. Schw.
Waſſer . . .	1,000
Terpentinöhl .	0,869
Lavendelöhl . .	0,894
Zimmetöhl . . .	1,044
Baumöhl . . .	0,915
Haſſelnußöhl . .	0,916
Wallnußöhl . .	0,923
Leinöhl . . .	0,940
Hanfſamenöhl . .	0,926
Mohnöhl . . .	0,924
Rebsöhl	0,919
Bucheckernöhl .	0,917
Milch	
von Frauen .	1,020
— Pferden . .	1,034
— Eſeln . .	1,035
— Ziegen . .	1,034
— Schaafen .	1,041
— Kühen . .	1,032

V. Miſchungen.

Theile Zinn.	Theile Bley *)	ſpec. Schw.
100	0	1,0000
99	1	1,0043
98	2	1,0087
97	3	1,0131
96	4	1,0175
95	5	1,0218
94	6	1,0262
93	7	1,0306
92	8	1,0356
91	9	1,0400
90	10	1,0443
89	11	1,0487
88	12	1,0531
87	13	1,0575
86	14	1,0618
85	15	1,0662
84	16	1,0706
83	17	1,0750
82	18	1,0793
81	19	1,0837
80	20	1,0881
79	21	1,0925
78	22	1,0968
77	23	1,1012
76	24	1,1056
75	25	1,1100
70	30	1,1318
65	35	1 1543
60	40	1,1778
55	45	1,2012
50	50	1,2250
45	55	1,2531

Theile

*) Ich ſetze hier die ſpec. Schwere des Zinns = 1.

Theile Zinn.	Theile Bley	ſpec. Schw.
40	60	1,2818
35	65	1,3121
30	70	1,3425
25	75	1,3712
20	80	1,4025
15	85	1,4343
10	90	1,4675
5	95	1,4993
4	96	1,5056
3	97	1,5118
2	98	1,5181
1	99	1,5243
0	100	1,5306

Theile Küchenſalz.	Theile Waſſer	ſpec. Schw.
0	100	1,000
1	99	1,006
2	98	1,013
3	97	1,019
4	96	1,026
5	95	1,033
6	94	1,040
7	93	1,046
8	92	1,053
9	91	1,060
10	90	1,067
11	89	1,074
12	88	1,081
13	87	1,088
14	86	1,095
15	85	1,102
16	84	1,109
17	83	1,116
18	82	1,123
19	81	1,131
20	80	1,138
21	79	1,145
22	78	1,152
23	77	1,160
24	76	1,167
25	75	1,174
26	74	1,182

Vier-

Vierte Tafel

zur Beſtimmung der Expanſivkraft der Waſſerdämpfe bei verſchiedenen Wärmegraden.

(nach 80 theil. Thermometer.)

Temperatur in Graden	Höhe der Queckſilberſäule, deren Druck mit der Expanſivkraft im Gleichgew. iſt in Par. Zollen	Temperatur in Graden	Höhe der Queckſilberſäule, deren Druck mit der Expanſivkraft im Gleichgew. iſt in Par. Zollen
0	0,00	20	0,65
1	0,00	21	0,75
2	0,00	22	0,82
3	0,00	23	0,90
4	0,02	24	0,97
5	0,02	25	1,05
6	0,05	26	1,12
7	0,07	27	1,22
8	0,10	28	1,32
9	0,12	29	1,42
10	0,15	30	1,52
11	0,18	31	1,65
12	0,22	32	1,78
13	0,27	33	1,90
14	0,30	34	2,00
15	0,35	35	2,15
16	0,40	36	2,27
17	0,45	37	2,45
18	0,52	38	2,57
19	0,58	39	2,75

Tempe-

Temperatur in Graden	Höhe der Queckſilberſäule, deren Druck mit ꝛc.	Temperatur in Graden	Höhe der Queckſilberſäule, deren Druck mit ꝛc.
40	2,92	72	18,70
41	3,10	73	19,50
42	3,27	74	20,60
43	3,47	75	21,75
44	3,70	76	22,90
45	3,95	77	24,15
46	4,25	78	25,50
47	4,45	79	26,67
48	4,75	80	28,00
49	5,00	81	29,60
50	5,35	82	31,30
51	5,70	83	33,00
52	6,05	84	34,60
53	6,50	85	36,45
54	6,90	86	38,10
55	7,32	87	40,00
56	7,85	88	42,20
57	8,40	89	44,30
58	8,85	90	46,40
59	9,35	91	48,40
60	9,95	92	50,50
61	10,40	93	52,00
62	11,00	94	55,30
63	11,70	95	57,80
64	12,40	96	60,50
65	13,20	97	63,40
66	13,80	98	66,20
67	14,50	99	69,00
68	15,25	100	71,80
69	16,10	103	81,00
70	16,90	106	89,00
71	17,80	110	98,00

Fünfte Tafel
zum Gebrauche beim Nivelliren.

Entfernung des abgeſehenen Orts in Toiſen.	Höhe der ſcheinbaren Horizontallinie über der wahren in Par. Fuſſen.	
	Mit Rückſicht auf die Refrakt.	Ohne Rückſicht auf die Refrakt.
50	0,0020	0,0023
60	0,0030	0,0035
70	0,0040	0,0046
80	0,0050	0,0058
90	0,0064	0,0075
100	0,0081	0,0092
120	0,0114	0,0133
140	0,0154	0,0179
160	0,0205	0,0237
180	0,0253	0,0295
200	0,0317	0,0370
220	0,0382	0,0445
240	0,0451	0,0527
250	0,0496	0,0579
260	0,0536	0,0625
280	0,0620	0,0723
300	0,0709	0,0827
320	0,0803	0,0937
340	0,0908	0,1059
350	0,0967	0,1128
360	0,1012	0,1180
380	0,1136	0,1325
400	0,1260	0,1470

Entfernung des abgeſehenen Orts in Toiſen.	Höhe der ſcheinbaren Horizontallinie über der wahren in Par. Fuſſen.	
	Mit Rückſicht auf die Refrakt.	Ohne Rückſicht auf die Refrakt.
420	0,1403	0,1620
440	0,1523	0,1777
450	0,1607	0,1875
460	0,1667	0,1944
480	0,1810	0,2112
500	0,1964	0,2292
520	0,2128	0,2483
540	0,2306	0,2674
550	0,2376	0,2772
560	0,2465	0,2876
580	0,2644	0,3084
600	0,2827	0,3299
650	0,3318	0,3871
700	0,3849	0,4490
750	0,4420	0,5156
800	0,5030	0,5868
850	0,5675	0,6620
900	0,6364	0,7425
950	0,6726	0,7847
1000	0,7857	0,9167
1500	1,7678	2,0625
2000	3,1431	3,6667
2500	4,9107	5,7292
3000	7,0714	8,2500
4000	12,5714	14,6667
4500	15,9107	18,5625
5000	19,6431	22,9167
6000	28,2857	33,0000

Sechſte Tafel
zur Beſtimmung der Geſchwindigkeit des Waſſers in Röhrenleitungen.

Röhrendurchmeſſer in Pariſer Zollen.

Länge der Röhrenleitung in Toiſen.	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	8	9	10	11	12
	Zugehörige Geſchwindigkeit des Waſſers in den Röhren in Pariſer Zollen wenn die Höhe des Waſſerſpiegels im Behältniſſe über dem Mittelpunkte der Ausflußöffnung am Ende der Röhrenleitung zu 1 Zoll angenommen wird *).																	
10	5,3	6,4	7,3	8,0	8,7	9,3	9,8	10,2	10,7	11,1	11,4	11,8	12,1	12,6	13,1	13,6	14,0	14,3
15	4,3	5,2	6,0	6,7	7,3	7,8	8,3	8,7	9,1	9,4	9,8	10,1	10,4	10,9	11,4	11,8	12,2	12,6
20	3,8	4,6	5,2	5,9	6,4	6,8	7,3	7,7	8,0	8,4	8,7	9,0	9,3	9,8	10,2	10,7	11,1	11,4
25	3,4	4,1	4,7	5,3	5,7	6,2	6,6	6,9	7,3	7,6	7,9	8,2	8,4	8,9	9,4	9,8	10,2	10,6
30	3,1	3,8	4,3	4,8	5,3	5,7	6,0	6,4	6,7	7,0	7,3	7,6	7,8	8,2	8,7	9,1	9,4	9,8

*) Wenn alſo in irgend einem andern Falle die hier genannte Waſſerhöhe in Zollen = H iſt, ſo muß die in dieſer Tafel aufgeſuchte Geſchwindigkeit noch mit $\sqrt{H}$ multiplicirt werden.

Röhrendurchmeſſer in Pariſer Zollen.

Länge der Röhrenleitung in Toiſen.	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	8	9	10	11	12
	Zugehörige Geſchwindigkeit des Waſſers in den Röhren in Pariſer Zollen wenn die Höhe des Waſſerſpiegels im Behältniſſe ꝛc.																	
35	2,9	3,5	4,0	4,5	4,9	5,3	5,6	5,9	6,2	6,5	6,8	7,0	7,3	7,7	8,1	8,5	8,9	9,2
40	2,7	3,3	3,8	4,2	4,6	5,0	5,3	5,6	5,9	6,1	6,4	6,6	6,9	7,3	7,7	8,0	8,4	8,7
45	2,5	3,1	3,6	4,0	4,3	4,7	5,0	5,3	5,5	5,8	6,0	6,3	6,5	6,9	7,3	7,6	7,9	8,2
50	2,4	2,9	3,4	3,8	4,1	4,4	4,7	5,0	5,3	5,5	5,7	6,0	6,3	6,6	6,9	7,3	7,6	7,9
60	2,2	2,7	3,1	3,5	3,8	4,1	4,3	4,6	4,8	5,1	5,3	5,5	5,7	6,0	6,4	6,7	7,0	7,3
70	2,0	2,5	2,9	3,2	3,5	3,8	4,0	4,3	4,5	4,8	4,9	5,1	5,3	5,6	5,9	6,2	6,5	6,8
80	1,9	2,3	2,7	3,0	3,3	3,5	3,8	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0	5,3	5,6	5,9	6,1	6,4
90	1,8	2,2	2,5	2,8	3,1	3,3	3,6	3,8	4,0	4,2	4,3	4,5	4,7	5,0	5,3	5,5	5,8	6,0
100	1,7	2,1	2,4	2,7	2,9	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	4,1	4,3	4,4	4,7	5,0	5,3	5,5	5,8
120	1,5	1,8	2,0	2,3	2,6	2,8	3,1	3,2	3,4	3,5	3,7	3,8	4,0	4,3	4,5	4,7	5,1	5,3

Röhrendurchmeſſer in Pariſer Zollen.

Länge der Röhrenleitung in Toiſen	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	8	9	10	11	12
	Zugehörige Geſchwindigkeit des Waſſers in den Röhren in Pariſer Zollen wenn die Höhe des Waſſerſpiegels im Behältniſſe ꝛc.																	
140	1,4	1,6	1,9	2,1	2,4	2,6	2,9	3,0	3,1	3,3	3,4	3,6	3,7	4,0	4,2	4,4	4,6	4,9
160	1,3	1,5	1,8	2,1	2,3	2,6	2,7	2,8	2,9	3,1	3,2	3,4	3,5	3,8	4,0	4,2	4,4	4,6
180	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,5	2,6	2,7	2,9	3,0	3,2	3,3	3,6	3,7	3,9	4,1	4,3
200	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	3,0	3,1	3,4	3,5	3,7	3,8	4,1
225	1,1	1,3	1,5	1,8	1,9	2,1	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,2	3,3	3,5	3,6	3,9
250	1,0	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	3,0	3,1	3,3	3,4	3,7
275	1,0	1,1	1,3	1,5	1,6	1,8	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,6	2,7	2,9	3,0	3,1	3,3	3,5
300	1,0	1,1	1,3	1,4	1,6	1,7	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,8	2,9	3,1	3,3	3,4
325	0,9	1,0	1,2	1,3	1,5	1,6	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,7	2,8	2,9	3,0	3,2
350	0,9	1,0	1,2	1,3	1,5	1,6	1,7	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,6	2,7	2,8	2,9	3,1

Röhrendurchmeſſer in Pariſer Zollen.

Länge der Röhrenleitung in Toiſen.	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	8	9	10	11	12
	Zugehörige Geſchwindigkeit des Waſſers in den Röhren in Pariſer Zollen. wenn die Höhe des Waſſerſpiegels im Behältniſſe ꝛc.																	
375	0,8	0,9	1,0	1,2	1,3	1,5	1,7	1,8	1.9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,5	2,6	2,7	2,8	3,0
400	0,8	0.9	1,0	1,2	1,3	1,5	1,7	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2.2	2,4	2,5	2,6	2,7	2,9
425	0,8	0,9	1,0	1,1	1,3	1,4	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,8
450	0,8	0,9	1,0	1,1	1,3	1,4	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,8
475	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,2	2,3	2,4	2,5	2,7
500	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,7	1,8	1,9	2,1	2,2	2,3	2,4	2,6
525	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,7	1,8	1,9	2,1	2,2	2,3	2,4	2,6
550	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,6	1,7	1,8	2,0	2,1	2,2	2,3	2,5
575	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1.4	1,5	1,6	1,6	1,7	1,8	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4
600	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,5	1,6	1,6	1,7	1,9	2,0	2,1	2,2	2,4

Röhrendurchmeſſer in Pariſer Zollen.

Länge der Röhrenleitung in Toiſen.	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	8	9	10	11	12
	Zugehörige Geſchwindigkeit des Waſſers in den Röhren in Pariſer Zollen wenn die Höhe des Waſſerſpiegels im Behältniſſe ꝛc.																	
625	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,3	1,4	1,5	1,5	1,6	1,7	1,9	2,0	2,1	2,2	2,4
650	0,7	0,8	0,9	1,0	1,0	1,2	1,3	1,3	1,4	1,5	1,5	1,6	1,7	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3
675	0,6	0,7	0.8	0,9	1,0	1,1	1,3	1,3	1,4	1,5	1,5	1,6	1,7	1,9	2 0	2,1	2,2	2,3
700	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,3	1,3	1,4	1,4	1,5	1,6	1,6	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2
725	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,6	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2
750	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,6	1,8	1,8	1,9	2,0	2,1
775	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,2	1,3	1,3	1,4	1,5	1,5	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1
800	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,2	1,3	1,3	1,4	1,5	1,5	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1
825	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,2	1,3	1,3	1,4	1,5	1,5	1,7	1,7	1,8	1,9	2,0
850	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,1	1,2	1,3	1,3	1,4	1,5	1,5	1,7	1,7	1,8	1,9	2,0

Röhrendurchmeſſer in Pariſer Zollen.

Länge der Röhrenleitung in Toiſen.	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	8	9	10	11	12
	Zugehörige Geſchwindigkeit des Waſſers in den Röhren in Pariſer Zollen. wenn die Höhe des Waſſerſpiegels im Behältniſſe ꝛc.																	
875	0,6	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,1	1,2	1,2	1,3	1,4	1,4	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
900	0,6	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,1	1,2	1,2	1,3	1,4	1,4	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
925	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1 0	1,1	1,1	1,2	1,2	1,3	1,4	1,4	1,6	1,6	1,7	1,8	1,9
950	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,1	1,2	1,2	1,3	1,4	1,4	1,6	1,6	1,7	1,8	1,9
975	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,1	1,2	1,2	1,3	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
1000	0,5	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,0	1,1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,5	1,6	1,7	1,8
1025	0,5	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,0	1,1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,5	1,6	1,7	1,8
1050	0,5	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,0	1,1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,5	1,6	1,7	1,8
1075	0,5	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,0	1,1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,5	1,6	1,7	1,8
1100	0,5	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,0	1,1	1,1	1,2	1,2	1,3	1,4	1,4	1,5	1,6	1,7

Röhrendurchmeſſer in Pariſer Zollen.

Länge der Röhrenleitung in Toiſen.	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	8	9	10	11	12
	Zugehörige Geſchwindigkeit des Waſſers in den Röhren in Pariſer Zollen. wenn die Höhe des Waſſerſpiegels im Behältniſſe ꝛc.																	
1125	0,5	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,0	1,1	1,1	1,2	1,2	1,3	1,4	1,4	1,5	1,6	1,7
1150	0,5	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,0	1,1	1,1	1,2	1,2	1,3	1,4	1,4	1,5	1,6	1,7
1175	0,5	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,0	1,1	1,1	1,2	1,2	1,3	1,4	1,4	1,5	1,6	1,7
1200	0,5	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,0	1,1	1,1	1,2	1,2	1,3	1,4	1,4	1,5	1,6	1,7
1225	0,5	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,0	1,1	1,1	1,2	1,2	1,3	1,4	1,4	1,5	1,6	1,7
1250	0,5	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,0	1,1	1,1	1,2	1,2	1,3	1,4	1,4	1,5	1,6	1,7
1275	0,4	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,9	1,0	1,0	1,1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
1300	0,4	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,9	1,0	1,0	1,1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7

Siebente Tafel
zur Beſtimmung des zuſammengezogenen Querſchnitts, wenn die Weite des Gefäßes = w und die Ausfluß-öffnung = β iſt.

Werthe von $\frac{\beta}{w}$	Für Oeffnungen in dünnen Platten Werthe von 1—n	Für kurze Anſatzröhren Werthe von 1—n
1,00	1,000	1,000
0,95	0,970	0,985
0,90	0,940	0,970
0,85	0,913	0,956
0,80	0,888	0,944
0,75	0,864	0,932
0,70	0,841	0,921
0,65	0,820	0,910
0,60	0,800	0,900
0,55	0,781	0,890
0,50	0,763	0,880
0,45	0,746	0,873
0,40	0,729	0,864
0,30	0,699	0,849
0,20	0,671	0,835
0,10	0,645	0,823
0,05	0,633	0,817
0,01	0,624	0,812

Achte

Achte Tafel
zur Beſtimmung zuſammengehöriger Werthe
von $\frac{\beta}{w}$, d, A und B, wenn $\lambda = 100$ Zolle iſt *).

Werthe von d in Zollen	Werthe von $\frac{\beta}{w}$	Für Oefnungen in dünnen Platten		Für kurze Anſatzröhren.	
		Werthe von A	Werthe von B	Werthe von A	Werthe von B
0,5	1,00	6,00	1,54	6,00	1,54
1,0	0,95	3,00	1,72	3,00	1,69
1,5	0,90	2,00	1,94	2,00	1,85
2,0	0,85	1,50	2,20	1,50	2,06
2,5	0,80	1,20	2,58	1,20	2,29
3,0	0,75	1,00	2,92	1,00	2,58
3,5	0,70	0,86	3,42	0,86	2,95
4,0	0,65	0,75	4,06	0,75	3,40
4,5	0,60	0,66	4,88	0,66	3,98
5,0	0,55	0,60	5,97	0,60	4,72
5,5	0,50	0,54	7,43	0,54	5,80
6,0	0,45	0,50	9,34	0,50	7,14
6,5	0,40	0,46	12,35	0,46	8,94
7,0	0,30	0,43	23,21	0,43	15,92
7,5	0,20	0,40	56,17	0,40	36,25
8,0	0,10	0,37	244,00	0,37	149,00
8,5	0,05	0,35	1040,00	0,35	596,00
9,0	0,01	0,33	27777,00	0,33	15244,00

*) Dieſe Einſchränkung bezieht ſich bloß auf die Werthe von A; für die von B iſt es gleichgültig, wie groß λ ſeyn mag. ſ. Hydraul. S. 283 und §. 9.

Alpha-

Alphabetiſches Inhalts-Verzeichnis in Bezug auf die Seitenzahl.

A.

Aerometrie 153

Angewäge, Angeweihe 447

Anwelle ebendaſ.

Aräometer 137. ohne Skale von Ciarcy 140. Erinnerung dagegen 142

Archimediſche Waſſerſchnecke ſ. Waſſerſchnecke.

Aufwerfhammer 655. Abmeſſungen für einen 3 Ztnr ſchweren 656

Ausfluß ſ. Waſſermenge.

B.

Barometer 159. verſchiedene Arten 160. mittlere Barometerhöhe 164. dient zu Höhenmeſſungen ebendaſ.

Beharrlichkeit 8

Beharrungsſtand, bei Maſchinen 325

Bélier hydraulique ſ. hydrauliſcher Stöſſer.

Bewegung 3. 8. gleichförmige und ungleichförmige 4. beſchleunigte, verzögerte, abſolute und relative 5. allgemeine Formel für die gleichförmige 7. Gröſſe der Bewegung 14

Bewegung des Waſſers in Röhren 250. hängt bei Waſſerleitungen nicht von der Temperatur des Waſſers ab 252. wie ſie von der Einflußöffnung, Weite und Länge einer Röhrenleitung abhängt 266 u. 267. bei Röhrenleitungen, die aus Röhren von verſchiedener Weite zuſammengeſetzt ſind 269. die anfängliche bei Waſſer in Röhren, das

das von Kolben gedruckt wird 271. für iede Geſchwindigkeit des Waſſers, wenn es von Kolben gedruckt wird, gleich weite Röhren vorausgeſetzt 274. auch für die Vorausſetzung ungleicher Weite 278. Reſultat für den Beharrungsſtand 283. wie dabei die Geſchwindigkeit von der Zeit abhängt 284. daraus hergeleitete Berechnung der in einer beſtimmten Zeit durch eine Röhrenleitung abflieſenden Waſſermenge 288

C.

Carteſiſcher Grundſatz 67

Centralſtoß ſ. Stoß.

Centrifugalkraft 110

Centripetalkraft 112

D.

Dampf, ſeine Expanſivkraft 221. ſein ſpecifiſches Gewicht 222

Dampfmaſchine 531. ihre weſentliche Einrichtung 532. ihr Effekt im Allgemeinen 534

Daumen, ihre Geſtalt bei einem Hammerwerk 658. bei einem Stampfwerk 671. ihre gröſte Anzahl 674

Druck, Linie des mittlern Drucks 27. Ebene des Drucks 49. von Kräften, die in einer Ebene nach konvergirenden Richtungslinien wirken 31. von Kräften, deren Richtungslinien in verſchiedenen Ebenen liegen 48. Mittelpunkt des Drucks 50. auf den Boden eines mit Waſſer angefüllten Gefäſſes 123. des Waſſers auf ein lothrechtes Rektangel 125. auf andere Flächen 126. auf einen im Waſſer untergetauchten Körper 127. Hierher gehöriges allgemeines Geſetz 128

Druckwerk 616. vereinbartes Saug- und Druckwerk ebend. ein doppeltes 617. Hierher gehörige Theorie für eine Steigröhre ohne Windkeſſel 618. für eine Steigröhre mit einem Windkeſſel 619. Nachtheil des ſchädlichen Raums 621

E.

Effekt, der Maſchinen im Allgemeinen 328. Totaleffekt und Nutzeffekt ebend.

Elaſticität, der Luft 155. ihre ſpecifiſche

189. 190. der Dämpfe 221

Erdwinde 375

F.

Fall, auf einer ſchiefen Ebene 64, 84. Geſetze des freien Falls 71. Geſetze des Falls, wenn die Schwere nicht frei wirken kann 78. Fall eines ſchweren Körpers in einem Kreisbogen 86

Feuchtigkeit, ihr Einfluß auf das Volumen der Luft bei verſchiedener Wärme 223

Feldgeſtänge 627

Feuerſpritzen 623. Einrichtung einer doppelten 624. Abmeſſungen für eine Spritze mit 16 Mann ebend. für eine Spritze mit 8 Mann 625

Flaſche 417

Flaſchenzug 422. Theorie für einen Flaſchenzug der erſtern Art 423. ihre Abkürzung, wenn Reibung und Steifigkeit des Seils bei Seite geſetzt wird 428. Beſtimmung des Falles, da die Nebenlaſt gröſſer wird als die Nutzlaſt 429. Theorie für den Flaſchenzug der andern Art 431.

Flügel, hydrometriſche 262. bei Windmühlen ſ. Windflügel.

Froſtpunkt 202

Fuhrwerke 363 u. 700

Fundamentalabſtand 202

Fundamentalpunkt ebend.

G.

Gefälle, eines Kanals 259

Gefrierpunkt 202

Geſchwindigkeit 5. worauf ihre Verſchiedenheit beruht 6. allgemeine Formel zwiſchen Zeit, Raum und Geſchwindigkeit 7. virtuelle 67. des Waſſers beim Ausfluſſe aus Gefäſſen 228. durch kurze Anſatzröhren 231. in Röhrenleitungen ſ. Bewegung des Waſſers

Getraidemühlen 692

Gewicht 11. Cöllniſches, Neufranzöſiſches u. Medicinalgewicht 12. Verhältniß der Gewichte verſchiedener Maſſen 13. eines in einer Flüſſigkeit aufgelöſten Körpers hydroſtatiſch zu finden 142

Gleichgewicht der Kräfte, die in einer Ebene einander entgegenwirken 28. allgemeine Formel, wenn die

die Richtungslinien konvergiren 33. Allgemeines Geſetz 38. für Kräfte, die auf eine ſchiefe Ebene wirken 43. bei ſchwimmenden Körpern 129. insbeſondere bei einem ſchwimmenden Kegel 130

Göpel 407. Hierher gehörige Theorie 409. worin ihm Laufrad und Tretſcheibe vorzuziehen ſind 412. ſein Totaleffekt bleibt immer derſelbe, die Pferde mögen unter einem rechten oder unter einem ſchiefen Winkel am Zugbaume angreifen 413. Anders iſt es beim Nutzeffekt ebend. Anwendung auf die Vorrichtung eines Krummzapfens 414. ſeine Einrichtung zur Grubenförderung bei den Bergwerken ebend.

Gramme 12

Gran ebend.

Grubenſtock 667

H.

Hängebogen 248

Hammerwerk 655. ſeine zweckmäſſige Einrichtung 657. dabei dienliche Geſtalt der Daumen 658. mit einem beſonderen Schwungrad 659. allgemeine Formel für den Effekt 660

Haspel, verſchiedene Arten 374. umſtändliche Beſchreibung des Hornhaspels 376. wie die Aerme der Haspelhörner liegen müſſen 377. zur Berechnung gehörige allgemeine Formel 378. in welchem Falle ein Schwungring dabei nützlich iſt 381.

Hebel, der mathematiſche 65. der phyſiſche 349

Hebekopf 666

Hebelatte ebend.

Heronsbrunnen 519

Heronsmaſchine, die Hölliſche 521. angebliche Erfahrung über ihren Effekt 522. ihre Theorie 523. die von Höll aus der Erfahrung angegebene Beſtimmung ihres Effekts iſt falſch 530

Hinderniſslaſt 326

Horizontallinie, wahre und ſcheinbare 240

Hülfsärme 388

Hydraulik 228

Hydrauliſcher Stöſſer 535. Umſtände, von welchen ſein Effekt abhängt 537. er iſt eine ſehr einfache aber unvollkommene Maſchine 547

Hydroſtatik 118

Hygrometer 224

K.

Kalk, ungelöſchter dient zur Erhöhung der Temperatur des Waſſers 268

Kamm, ſeine vortheilhafteſte Geſtalt 645

Kammrad 628. ſeine Reibung an den Triebſtöcken eines Trillings 633

Kanal, ſeine erfoderliche Breite zu beſtimmen 258. ſein erfoderliches Gefälle 259. ſeine vortheilhafteſte Böſchung bei gegebenem Querſchnitt und Tiefe 261.

Kaſtenkünſte 580. ſind unvollkommene Maſchinen 585

Kegelventil 610

Keil 354. dahin gehörige Fundamentalformeln 356. Beträchtlichkeit der Reibung beim Keile ebend. die Theorie des Keils kommt bei Maſchinen wenig vor 357

Kettenrad 375

Kielſtück 609

Klappe 609

Kolben 610

Korb, an einer Welle 400 u. 415

Kraft überhaupt 4. abſolute und relative 7. beſchleunigende 10, 81, 82. bewegende 11. mittlere 35. Zuſammenſetzung und Zerlegung 39. das Carteſiſche Kräftenmaaß 15, 84. das Leibnitziſche 83. der Satz von Erhaltung der lebendigen Kräfte 26

Kreuze bei Maſchinen ſ. Feldgeſtänge.

Kropfrad 448. ſeine Schaufelung 453

Krummzapfen, macht das ſtatiſche Moment der Laſt veränderlich, daher ſein mittlerer Werth beſtimmt werden muß 396. Bemerkungen über ſeine Theorie 599. ihre Schwierigkeit macht es nothwendig, ſich hier mit einer Näherungsformel zu begnügen 606

L.

Laſchen 389

Laſt, reducirte 325. dieſe iſt bei gleichförmig wirkenden Maſchinen der Kraft gleich, bei ungleichförmig wirkenden iſt ſie kleiner 326

Laufrad 387. dahin gehörige Theorie 389. Es bedarf in manchen Fällen eines Schwungrings oder einer ſonſt beträchtlichen Umlaufsmaſſe 394. Es muß eine beträchtliche Höhe haben ebendaſ.

Wie bei der Verbindung mit einem Krummzapfen die mittlere Laſt beſtimmt wird 396. es erfodert bei manchen Anwendungen ein Vorgelege oder einen Korb 460

Leere, die Torricelliſche 159. die Guerickiſche (Bayliſche) 184

Lenker ſ. Feldgeſtänge.

Libelle 246.

Luft, iſt elaſtiſch 155. ſchwer 156. erhält das Waſſer im luftleeren Raume etwa 32 Fuß hoch 158. wie ihre Expanſivkraft mit ihrer Dichtigkeit zuſammenhängt 171. wie ihr Volumen bei verſchiedenen Graden der Feuchtigkeit vom Wärmegrad abhängt 223. von Feuchtigkeit geſättigte 224

Luftförmig, Hauptcharakter luftförmiger Materien 155

Luftpumpe, allgemeine Beſchaffenheit 178. Gränze ihrer Wirkung 181, 189. verſchiedene Arten 182

M.

Mark, die cöllniſche 11

Maſchine 323. Mannigfaltigkeit der dabei anwendbaren Kräfte 324. ihre Wirkungsperiode 325. allgemeiner Begriff des Effekts 328. allgemeine Formel für den Beharrungsſtand aller Maſchinen 592

Maſſe 4. elaſtiſche, unelaſtiſche, weiche und harte 16

Mechanik 3

Mikrometer 369

Mittelpunkt, des Drucks 50 des Schwunges 100. deſſen Beſtimmung bei einem zuſammengeſetzten Pendel 100. für beſondere Fälle 102. ſeine Tiefe unter dem Mittelpunkt der ſchwingenden Kugel 106

Moment, ſtatiſches 66. mechaniſches 328. der Trägheit 95. für ein Parallelepipedum 98. für eine Welle, in der Vorrede. für andere Körper 99

N.

Nebenlaſt 326, 333.

Nivelliren 239. wie der dabei von der Brechung der Lichtſtrahlen herrührende Fehler nach Lambert korrigirt wird 243. wie man ſich dabei eines Sehrohres bedient 244. dieſes Verfahren bleibt immer mißlich 245.

Eine

Eine Methode, bei der die Refraktion der Strahlen keinen Einfluß hat 245
Nivellirwage 246
Normalkraft 110

O.

Oberfläche des Waſſers in einem offenen Kanal 257

P.

Parallelogramm der Kräfte 33
Paternoſterwerk ſ. Püſchelwerk.
Pendel, einfaches und zuſammengeſetztes 89. kleinſtmöglicher Schwung deſſelben 91. Länge eines einfachen Pendels, das mit einem zuſammengeſetzten korreſpondirt 100 Allgemeine Regel 105. Länge des einfachen Sekundenpendels 106
Pferdegöpel ſ. Göpel
Pitotſche Röhre 262
Pneumatik 153
Premsbäume 416
Preſſe 368
Püſchelwerke 581. ihre Theorie 582. ſind unvollkommene Maſchinen 585

Q.

Quadrant zum hydrauliſchen Gebrauch 262

R.

Rad, Bau der Räder überhaupt 388. mit einem Krummzapfen verbunden 396. mit Vorgelege 397
Raum, der ſchädliche bei Luftpumpen 179. bei Waſſerpumpen ſ. Saug- und Druckwerke.
Reibung 333. Hierher gehörige Erfahrungen 336. bei Räderwerk 398
Richtpfennig 12
Röhren ſ. Bewegung des Waſſers u. Waſſermenge.
Rolle 417. dahin gehörige Theorie für eine Rolle, deren Axe immer an einerlei Stelle liegen bleibt 418. für eine Rolle, deren Axe mit in Bewegung geſetzt wird 420
Roſenkranzmühle 581
Roßkunſt 387

S.

Salpeter, dient zur Verminderung der Temperatur 208
Salz, deſſen Menge in einer Aufloͤſung zu beſtimmen 146
Salzſpindel 148
Saugſchwungmaſchine 562. Ihre Theorie be-

beruht auf der des Segnerſchen Waſſerrades 564

Saugwerk, ſeine weſentlichen Stücke 609. hierher gehörige Beſtimmungen der erfoderlichen Abmeſſungen 611. Regeln für die Anlage eines Saugwerks 612. empiriſche Regeln zur Berechnung des Effekts 613

Schaufel, Bodenſchaufel, Riegelſchaufel, Stoßſchaufel 435

Schaufelwerk 583. der vortheilhafteſte Winkel für ſeine Stellung 584

Scheide 610

Scheidelatte 667

Schiefe Ebene 64, 353. wie die Schwere dabei wirkt 64, 353

Schleicher 610

Schnee, mit warmem Waſſer 209

Schneidemühlen 684. Gröſſe des dabei zu wältigenden Widerſtandes 686. Ein Umſtand, der hierbei beſonders in Rechnung kommen muß 688

Schöpfrad 548. Beſtimmung der dabei vorkommenden Abmeſſungen 550. ſein Effekt 556

Schraube 364. dahin gehörige Fundamentalformeln 366. unter welchen Umſtänden aus dem Druck auf eine Schraube längſt der Spindelaxe niemals Umdrehungsbewegung erfolgen kann 367. die Schrauben dienen als Preſſen und als Mikrometer 368

Schraube ohne Ende 371. hierher gehörige allgemeine Formel 373

Schrift 637

Schwanzhammer 655. Abmeſſungen für einen 1 1/2 Ztr. ſchweren 656

Schwere 9 u. 10. ſpeciſiſche, ihre hydroſtatiſche Beſtimmung für feſte Körper 131. daraus hergeleitete Beſtimmung der Gewichte zweier Materien, woraus ein gemiſchter Körper beſteht 133. die ſpec. Schwere flüſſiger Maſſen 136. daraus hergeleitete Formel für die Beſtimmung des Gewichts eines im Waſſer aufgelöſten Körpers 142, 144. die mittlere Schwere einer Auflöſung 143. die reine einer Auflöſung 144

Schwerebene, Schwerlinie und Schwerpunkt 52

Schwerpunkt, eines Dreiecks 52. eines ieden Vielecks 53. eines Prismas

mas 54. eines Kreisausſchnittes 55. eines Kreisabſchnittes 57. einer ringförmigen Fläche ebend. einer Pyramide 58 eines Kegels 59. einer Ebene, die von einer krummen Linie begränzt wird, für die eine Gleichung gegeben iſt 59. eines Sphäroids 61

Schwimmende Körper, beharren nur in einer beſtimmten Lage in Ruhe 129 insbeſondere ein Kegel 130

Schwingen ſ. Feldgeſtänge.

Schwungkraft 110. eines in einem Kreiſe herumlaufenden Punktes 108

Schwungmaſſen 331

Schwungrad, bei einem Heſpel 381. Theorie deſſelben 382. auf einen beſtimmten Fall angewendet 385. der davon abhängende Vortheil kann nie die Hälfte der für die Kraft ſonſt erfoderlichen Uebertwucht betragen 594. ſeine vollſtändige Theorie 598

Seitenkräfte 35. allgemeine Formel ebend.

Senkwage ſ. Aräometer.

Setzwage 248

Sieden 210. kann in einem mit Waſſer angefüllten Gefäſſe, das in ſiedendes Waſſer geſetzt wird, nicht bewirkt werden 212

Soole 147

Spillenrad 375

Spiralpumpe 573. ihre Theorie 575. ob ſie andern Schöpfmaſchinen vorzuziehen ſey 579

Springwerke 294. wie dabei die Strahlhöhe aus der Fallhöhe beſtimmt wird 295. dieſelbe Beſtimmung mit Rückſicht auf die dabei eintretende Hinderniſſe der Bewegung 297

Staberrad 448. ſeine Schaufelung 452

Stampfwerk 666, 673

Stangenkunſt ſ. Feldgeſtänge.

Statik 3

Stempel 666, 673

Steuerung bei Maſchinen 499

Stirnrad 628. ſeine Reibung an den Triebſtöcken der Trillinge 629

Stöchyometrie 148

Stöckelkiel 609

Stoß harter Körper 17. elaſtiſcher 18. unvollkommen elaſtiſcher 21. des

des Waſſers 301. ſenkrechter des iſolirten Strahls 302. dreifacher Ausdruck der hierher gehörigen Fundamentalformel 305. Uebereinſtimmung derſelben mit der Erfahrung 307. Schiefer Stoß des iſolirten Strahls 310. Senkrechter des begränzten Waſſers 311. ſchiefer Stoß des begränzten Waſſers 314. ſenkrechter u. ſchiefer des unbegränzten 315. hierher gehörige Näherungsformel 317. bei Waſſerrädern ſ. Waſſerrad. Stoß der Luft 319 bei Windmühlen ſ. Windflügel.

Stoßrad 476. allgemeine Formel zwiſchen Kraft und Laſt im gleichförmigen Beharrungsſtande 477. die vortheilhafteſte Geſchwindigkeit 479. Formel für den größten Nutzeffekt 480

Stoßreitel 657

Straubrad 448. ſeine Schaufelung 450

T.

Temperatur 194. insbeſondere bei Miſchungen 208. Hierher gehöriger Hauptlehrſatz 212

Thermometer 194. das Drebbelſche ebend. das Amontonſche 195. mit Lambertſcher Skale 198. das Fahrenheitſche 201. das Reaumürſche 202. das de l'Isleſche ebend. das Celſiusſche ebend. wie das Therm. mit dem Barometer zuſammenhängt 204

Trägheit 8

Tretrad, verdient keine Empfehlung 401

Tretſcheibe 401. ihre Theorie 403 der Unterſchied ihres Effekts von dem des Laufrades kommt durch einen beſondern Umſtand in die Formel 405. die hierhin gehörige Formel zwiſchen Kraft und Laſt bei der Vorrichtung eines Krumzapfens 406. Anwendung auf ein Vorgelege ohne Krumzapfen 406. auf ein Vorgelege mit einem Krumzapfen 407

Triebſtock 628

Trilling 628

U.

Ueberwucht, ihre allgemeine Beſtimmung für alle Maſchinen im ungleichförmigen Beharrungsſtande 592. ihre Gränzen 594

V.

Veraſche Waſſermaſchine 585. ihre Theorie

iſt

iſt noch nicht bearbeitet 587
Verlaſchung 389
Vorgelege, wie dadurch das ſtatiſche Moment der Laſt abgeändert wird 397, 640

W.

Wagenwinde, verbeſſerte 373
Wärme 192
Wärmeleiter 215
Wärmeſtoff 205. Bedingungen des Gleichgewichts des Wärmeſtoffs 207. Umſtände, von welchen der Uebergang aus einem Körper in den andern abhängt 213
Walzen, dienen als Maſchinen beim Fortſchieben 357. dahin gehörige Formeln 360. auf unſere Fuhrwerke läßt ſich ihre Theorie nicht anwenden 363
Waſſerfahne 262
Waſſerhebel ebend.
Waſſermenge, die in gegebener Zeit aus einem Behältniſſe abfließt, wenn die Höhen des Waſſerſpiegels über der höchſten und über der tiefſten Stelle der Oeffnung nicht beträchtlich von einander verſchieden ſind 229. allgemeinere Beſtimmung für iede Verſchiedenheit iener beiden Höhen 235. für Fälle, da das Waſſer über eine Wandfläche abfließt 236. für den Abfluß in einem offenen Kanale 253. durch eine Röhrenleitung, bevor die Bewegung des Waſſers in den Beharrungsſtand trit 288. wie die Weite der Röhren aus der durchflieſenden Waſſermenge beſtimmt wird 291
Waſſerrad, das oberſchlächtige 434. wie es geſchaufelt wird 436. ſein waſſerhaltiger Bogen 438. Beſtimmung der Waſſermenge in den einzelnen Zellen des waſſerhaltigen Bogens 439. das ſtatiſche Moment dieſer Waſſermenge 441. Bedingungen für den gleichförmigen Beharrungsſtand dieſes Rades 445. insbeſondere bei der Vorrichtung eines Krummzapfens ebend. allgemeine Formel für die Umlaufs-Geſchwindigkeit bei unveränderlichem Moment der Laſt 446. Vorrichtung eines ſolchen Rades mit einem Mantel 447. das unterſchlächtige 448. wie dieſes für ein flaches Gerinne geſchaufelt wird 450. die gewöhn-

wöhnliche Regel der Mühlenärzte 451. ſeine Schaufelung für ein Kropfgerinne 453. allgemeine Formel zwiſchen Kraft und Laſt bei unveränderlichen ſtatiſchen Momenten 455 für den ungleichförmigen Beharrungsſtand 460. insbeſondere für die Vorrichtung eines Krumzapfens ebend. allgemeine Formel für die vortheilhafteſte Geſchwindigkeit des Rades im flachen Gerinne 461. für mehrere Räder, die in einem flachen Gerinne hinter einander liegen 463. allgemeine Formel zwiſchen Kraft und Laſt bei einem Kropfrade 467. vortheilhafteſte Geſchwindigkeit des Kropfrades 470. ſein größtmöglicher Totaleffekt 471 allgemeine Formel zwiſchen Kraft und Laſt bei einem Rade im freien Strohme für den gleichförmigen Beharrungsſtand 473. das Segnerſche 485

Waſſerſäulen-Maſchine 498. ihre mancherlei Abmeſſungen 501. ihr Effekt 502. ihre Theorie 504. ſie bedarf einer beſtändigen Ueberwucht 515. ihre Einrichtung mit einem Windkeſſel und ohne Gewichtskaſten 517

Waſſerſchnecke 565. doppelte, dreifache 567. wie die verſchiedenen dabei vorkommenden Winkel beſchaffen ſeyn müſſen, wenn die Maſchine Waſſer ausgieſen ſoll 568. Hierher gehörige Formeln 570

Waſſerwage 246

Wendebock ſ. Feldgeſtänge.

Werkſtempel. ſ. Feldgeſtänge.

Windblaſe ſ. Windkeſſel.

Windflügel 486. gebogene oder windſchiefe 489. allgemeine Formel für die Gewalt, mit der ſie ſich drehen 492. die erfoderliche Geſtalt windſchiefer Flügel 494. horizontal-laufende 496

Windkeſſel 517, 616

Windſtoß 319

Wirkung, Satz der kleinſten Wirkung 25

Z.

Zahn ſ. Kamm.

Zeiteinheit 6

Zuſammenziehung des Waſſerſtrahls bei Oeffnungen in dünnen Platten 230. bei Oeffnungen in dicken Wänden oder kurzen Anſatzröhren 231. allgemeinere Beſtimmung 234

Zwilling ſ. Feldgeſtänge.

Zwiſchengeſchirr 627

Verbeſſerungen *).

I) Jn der Vorrede und der Dynamik.

S. XXIV. Z. 13. von unten ſtatt leidet lies leite
S. 17. zu §. 25. gehört Fig. 1.

S. 22. Z. 8. ſtatt $\frac{\varepsilon}{N}.c$ lies $\frac{\varepsilon}{n}.c$

S. 23. Z. 6. ſtatt $\frac{\varepsilon}{N}.M$ lies $\frac{\varepsilon}{n}.M$

S. 29. Z. 7 u. 9. ſtatt nc lies nC
S. 35. Z. 18. ſtatt + 2 PQ lies — 2 PQ
S. 40. Z 10. ſt. zieht die ab l. zieht die ad
S. 42. Z. 2. v. u. ſt. mN l. oN
S. 45. Z. 8. v. u. ſt. BA l. CA
S. 50. gehört zu §. 61, Fig. 15.

S. 57. Z. 2. ſt. $\frac{Cx - Cy)D}{A}$ l. $\frac{(Cx - Cy)D}{A}$

S. 61. Z. 4. ſt. $\frac{\int ax.xdy}{\int axdx}$ l. $\frac{\int ax.xdx}{\int axdx}$

S. 62. Z. 3. ſt. $\frac{\int y^2 xdx}{\int ydx}$ l. $\frac{\int y^2 xdx}{\int y^2 dx}$

S. 73. Z. 9. v. u. ſt. N Raumpunkte l. N Zeitpunkte
— Z. 1. v. u. ſt. N Zeitpunkte l. N Zeittheilchen
S. 74. Z. 1—2. v. o. ſt. N Zeitpunkte l. N Zeittheilchen oder N. N Zeitpunkte

S. 75.

*) Jn den Anfangsgr. der Reinen Math. und im gegenwärtigen Bande muß ſtatt Hypothenuſe durchaus Hypotenuſe ſtehen.

S. 75. Z. 7. v. u. ſtatt $+n$ lies $+n+(n-1)$

S. 80. Z. 8 u. 9. v. u. ſteht zweimal: in der Zeit t

S. 85. Z. 12. v. o. ſtatt: der die ba lies: der die bd

S. 98. Z. 18. ſt. $(\frac{1}{8}mn + m^3n).\beta$ l. $\frac{1}{3}(mn^3+m^3n).\beta$

S. 101. Z. 4. ſt. $\pi\sqrt{\frac{2g}{l'}}$ l. $\pi\sqrt{\frac{l'}{2g}}$

S. 108. Z. 5. 7 u. 8. ſt. l l. l′

II) In der Hydroſtatik.

S. 126. Z. 3. v. u. iſt fig. 11. einzuſchalten.

S. 128. §. 15 am Ende ſetze man noch hinzu: Es wird hierbei vorausgeſetzt, daß der Punkt, welcher den untergetaugten ſpecifiſch-ſchwereren oder ſpec. leichteren Körper feſthält, mit den Wänden des Gefäſſes in gar keiner Verbindung ſtehe, wie ſolches Fig. 11. zu erkennen giebt.

III) In der Aerometrie.

S. 166. Z. 1. ſtatt (Alg. §.) lies (Alg. §. 30)

— Z. 4. v. u. ſt. $1-\frac{}{H}$ l. $1-\frac{f}{H}$

S. 167. Z. 7. v. u. ſtatt $-(\log 336 - \frac{864}{11200})$ lies

$$-\log(336 - \frac{864}{11200})$$

S. 176. Z. 3. v. u. ſt. $= Bh$ l. $= \frac{Bh}{A}$

— Z. 2. v. u. ſt. $\pm\sqrt{Bh}$ + ꝛc. l. $\pm\sqrt{\frac{Bh}{A}}$ + ꝛc.

S. 180. letzt. Z. ſtatt $\frac{\mathfrak{K}\mathfrak{k}D}{(K+\mathfrak{k}+\mathfrak{K})^2}$ lies $\frac{K.\mathfrak{k}.D}{(K+\mathfrak{k}+\mathfrak{K})^2}$

S. 181. — ſt. $\left(\frac{K}{K+\mathfrak{k}+\mathfrak{K}}\right)^{n-}$ l. $\left(\frac{K}{K+\mathfrak{k}+\mathfrak{K}}\right)^{n-1}$

IV) In der Hydraulik.

S. 232. gehört bei Z. 11. §. 8., Fig. 3.

S. 235. Z. 18. ſtatt $2\sqrt{H-x}$ lies $2\sqrt{g.(H-x)}$

S. 282. Z. 5. ſt. $+(\frac{w^2}{\gamma\beta^2}-1)$ l. $+(\frac{w^2}{\gamma^2\beta^2}-1)$

S. 290. Z. 4. v. u. ſt. $-\ln 4\frac{}{\eta}$ l. $-\ln.4\frac{t}{\eta}$

S. 291. Z. 2. v. u. im Nenner unterm Wurzelzeichen ſt. $+1\frac{0,02.\lambda}{d}$ l. $1+\frac{0,02.\lambda}{d}$

S. 292. Z. 2. v. o. ſt. $0,0\lambda$ l. $0,02.\lambda$

S. 303. Z. 14. v. u. ſt. die von m, n aus l. die von mn aus

V) In der Maſchinenlehre.

S. 349. Z. 1. v. u. ſtatt $(e'-u).R$ l. $(e''-u).R$

S. 350. Z. 2. v. o. ſt. $\frac{1}{4}G.l$ l. $\frac{1}{2}G.l$

S. 359. Z. 6. ſt. einer Walze ſey $= q$ l. beider Walzen ſey $= p$

S. 360. Z. 7. ſt. $(D+1).1,8$ l. $(D^2+1).1,8$

S. 362. Z. 3. ſt. $D = d$ l. $D = 2d$

— Z. 4. ſt. $\frac{2d+d}{d}$ l. $\frac{2d+d}{d}.\lambda$

S. 366. Z. 5. v. u. ſt. wäre dem l. wäre die dem

S. 370. Z. 4. ſt. $\frac{r.(h\pm\mu.6,28.r)}{R.6,28.r}$ l. $\frac{r(h\pm\mu.6,28.r)}{R.6,28.r}.Q$

S. 370.

S. 370. Z. 3. v. u. ſt. $\frac{h \pm \mu . r}{R}$ l. $\frac{h \pm \mu . r . 6{,}28}{6{,}28 . R} . Q$

S. 380. Z. 2. ſt. $r (M + \frac{E}{r} . N . k) = R . (- \frac{\varrho}{R} . \mu Q)$

l. $r (M + \frac{E}{r} + N . k) = R (P - \frac{\varrho}{R} . \mu Q)$

— Z. 6. ſt. $(M + \frac{1}{2} Nk)$ l. $(M + Nk)$

S. 385. Z. 1. v. o. ſt. $\frac{6{,}28 . l (\mathfrak{R}^4 - \mathfrak{r}^4)}{4}$ l. $\frac{6{,}28 . h \psi . (\mathfrak{R}^4 - \mathfrak{r}^4)}{4}$

— Z. 6. ſt. $\mathfrak{R}^4 - \mathfrak{r}^4)$ l. $(\mathfrak{R}^4 - \mathfrak{r}^4)$

nach Z. 6. fehlt: ergiebt

— Z. 9. ſt. $\mathfrak{r} = \mathfrak{F}.$ l. $\mathfrak{r} = 2\frac{1}{2}\ \mathfrak{F}.$

— Z. 11. ſt. $\mu = 1\frac{1}{4}$ l. $\mu = \frac{1}{4}$

— Z. 14. ſt. 19,6 l. 29,4

die 1,3 Fuß werden dann 1,32 Fuß.

S. 391. Z. 7. v. o. ſt. $\alpha = nab$ l. $\alpha = ACB$

S. 399. Z. 7. v. u. ſt $AQ + B$ l. $(AQ + B)$

S. 403. Z. 7. ſt. n in v l. m in v

S. 406. Z. 5. ſt. $\frac{A}{B}$ l. $\frac{B}{A}$

S. 407. Z. 3. v. o. ſt. $AQ + B$ l. $(AQ + B)$

S. 414. Z. 4. ſt. $\frac{0{,}637\, Q}{R}$ l. $\frac{Q}{R}$

— Z. 6. ſt. $\frac{P - V}{0{,}637 . r}$ l. $\frac{P}{0{,}637 . r}$

S. 418. Z. 1. v u. ſt. $(2{,}45 + 0{,}053 . Q$ l $(2{,}45 + 0{,}053 . Q)$

S. 423. Z. 1. v. u. ſt. $\mu \frac{\varrho'}{R}$ l. $\mu \frac{\varrho'}{R'}$

S. 426. Z. 7. im Werth von P'' ſt. $- \frac{B}{R + \mu\varrho + 0{,}053 . \delta}$

l. $- \frac{B}{R + \mu\varrho + 0{,}053\, \delta^{1{,}4}}$

S.426. Z.9. im Werthe von P'''' iſt das 2te Glied nicht poſitiv, ſondern negativ

— Z.10. — — — P^{v} iſt es gleichfalls ſo; auch muß im 2ten Glied von P^{v}, $(R-\mu\varrho)^3$ ſtatt $(R-\mu\varrho)^2$ ſtehen.

S.427. Z.2. v. o. ſtatt $+\frac{B}{A}$ lies $-\frac{B}{A}$

S.432. Z.9. ſt. $(\frac{R-\mu\varrho}{A})_2$ l. $(\frac{R-\mu\varrho}{A})^2$

S.437. Z.22. ſt. (no. III) l. (no. I)

S.450. zu §. 98. gehört Fig. 57.

— Z.12. ſt. §. 49. l. §. 49. Hydr.

S.456. Z.9. ſt. §. 52. l. §. 52. Hydr.

S.457. Z.5. ſt. noch sb l. nach sb

— Z.18. ſt. §. 48. l. §. 48. Hydr.

S.458. Z.10. ſt. S. 56. l. S. 456.

S.459. Z.4. ſt. §. 52. l. §. 52. Hydr.

S.468. Z.11. ſt. A l. (A—a)

S.469. Z.3. ſt. §. 52. l. §. 52. Hydr.

S.476. Z.12. ſt. Kreißes in g l. Kreißes in d

S.491. Z.2. ſt. C.β.ſin ζ dx.G l. Cβ.ſin ζ dx

S.507. Z.2. u. Z.4. v. u. ſt. a l. WG.a

S.513 bis 517. muß überall WG.a ſtatt a ſtehen

S.518 u. 519. muß es überall b ſtatt a heiſſen.

S.519. Z.3. ſtatt B^2T^2g lies $B^2.W.T^2.g$

S.526. Z.7. ſt. $+\frac{1}{2}bW$ l. $+\frac{1}{2}b\mathfrak{W}$

— Z.4. v. u. im Zähler }
S.527. Z.2. v. o. im Nenner }
— Z.3. — — — } ſt. $-\frac{1}{2}b$ l. $+\frac{1}{2}b$
— Z.5. — — — }
— Z.8. — — — }

— Z.11. ſt. $+\frac{1}{2}b$ l. $-\frac{1}{2}b$

S.528. Z.10. ſt. $+\frac{q+\frac{1}{2}b}{K}$ l. $+\frac{q-\frac{1}{2}b}{K}$

S.531. Z.5.v.o. ſtatt $-(\frac{1}{2}b+ \ldots$ lies $-(-\frac{1}{2}b \ldots$

S.532. Z.7. ſt. Fig. 72. l. Fig. 73.

S.541. letzt. Z. ſt. $\lambda + \frac{W}{w} a$ l. $\frac{w}{W} \lambda + a$

S.544. Z.1. ſt. ſo kann l. ſo kann man

S. 557. letzte Zeile ſtatt $\sin(\mathrm{ard}+u+\alpha)$ lies $\sin(180^\circ - (\mathrm{ard}+u+\alpha))$

S.559. Z.19. ſt. (§.138) $\tau'\tau = \sin d'\mu i - [180^\circ - (\mathrm{kcd}'+\alpha)]$ l. (§.139) $\tau'\tau = d.\sin.[d'\mu i - (180^\circ - (\mathrm{kcd}'+\alpha))]$

S.560. Z.2. ſt. $-d'\sin d\mu i$ l. $-d.\sin d'\mu i$

S.568. Z.4. v.u. ſt. (ε) l. (η)

S. 571. Z. 4. v. o. ſt. $N = \frac{l.\sin\vartheta}{2\pi.\mathfrak{L}}.Q.$ l. $N = \frac{l.\sin\vartheta}{\pi.\mathfrak{L}} Q$

— Z.7. ſt. $\frac{2\,l\sin\vartheta}{3.\pi.l.}$ l. $\frac{2\,l.\sin\vartheta}{3.\pi.\mathfrak{L}}$

S.574. Z.12. ſt. v—I l. v I

S.577. Z.3. v.u. ſt. $\frac{1}{2}D - \frac{1}{2}D(\beta \ldots$ l. $\frac{1}{2}D + \frac{1}{2}D(\beta \ldots$

— Z.2. — ſt. $h_{,}$, h'' l. h', h''

S.578. Z.7. v.o. ſt. $+\frac{1}{4}D$ l. $-\frac{1}{4}D$

S.610. Z.2. — ſt. es l. βs

S.631. Z.5. — ſt. $\frac{c^2\lambda^2}{(b+c)}$ l. $\frac{c^2\lambda^2}{(b+c)^2}$

Im 33ten Kap. muß S. 702. $\frac{d}{D}.\mu$ ſtatt μ geſetzt werden. Dadurch erhält man (S.704) $P = (\mu' + \frac{2\,d}{D}\mu).Q.$ Der Grund dieſer Aenderung liegt in dem Umſtande, daß der reibende Punkt der Axe in der Zeit, da er den Weg $2\pi.D$

2π . D durchlauft, nur in Punkten des Weges 2π . d ſich reibt.

Fig. 38. muß A mitten zwiſchen v und a ſtehen.
Fig. 41. fehlt A (ſ. §. 68).
Fig. 57. fehlt neben die letzte Schaufel zur Rechten x.
Fig. 67. fehlen e und f.
Fig. 69. fehlt oben A.
Fig. 73* fehlt oben B.
Fig. 74. fehlt C und E.
Fig. 77. fehlt oben an der Peripherie über r''' der Buchſtabe l.
Fig. 82. ſollte von r bis S punktirt ſeyn.
Fig. 83. fehlt oben an der Steigröhre v.
Fig. 88. fehlt oben an der Saugröhre C.
Fig 99. fehlt n.
Fig. 100. muß m zwiſchen D und d ſtehen; auch muß oben n ſtatt e ſtehen.

Verbeſſerungen zu der reinen Elementar- und höheren Mathematik.

S. 46. Z. 8. v. u. ſtatt: 45 : 7 lies: 35 : 7
S. 53. Z 11. v. o. ſt. ſo findet die l. ſo findet man die
S. 73. letzt. Z. ſt. $\frac{xxxx}{nnnnxxx}$ l. $\frac{xxxx}{nnnnaaa}$
S. 90. Z. 3 v. o. ſt. A^2 l. A
S. 101. Z. 7. — ſt. $\sqrt{18} > 5$ l. $\sqrt{18} < 5$
S. 102. Z. 3. — ſt. 1,214 l. 1,414
S. 156. Z 2. — ſt. AC l. Ac. Auch fehlt fig. 21 der Bogen $f'g'$ durch b'
S. 187. Z. 12. — ſt. Fig. 88. l. Fig. 58.
S. 302. Z. 8. — ſt. $\frac{b}{\sqrt{Cx}}$ l. $\frac{b}{\sqrt{cx}}$

S. 305.

S.305. Z.1. v. o. ſtatt A lies Ax^m

S.329. Z.16. — ſt. qm^2+a l. qm^2-a

S.336. nro. V. im Werth von n ſtatt $\sqrt{8dS}$ muß ſtehen $\sqrt{-8dS}$

S.338. nro. IV. im Werth von n ſtatt $L(S-u)-L(S-a)$ muß ſtehen $L(S-a)-L(S-u)$

S.340. nro. VIII. im Werth von n ſtatt $-Se-S$ muß ſtehen $-Se+S$

S.345. Z.9 u. 10. ſteht 2mal die Summe der m+2ten Reihe

— Z.11 u 12. ſteht 2mal η ſtatt y

S.348. Z.7. ſtatt $+6N$ lies $+6M$

S.350. Z.8. ſt. $\frac{n(n-1)(n-2)}{3}.2$ l. $\frac{n(n-1)(n-2)}{3}$

S.354. letzt. Z. muß ſtehen $\gamma = Ap +$ ꝛc.

S.355. Z.2. — — $C = \frac{\gamma - Ap - \text{ꝛc.}}{p(p-m).\text{ꝛc.}}$

— Z.4. — — $D = \frac{\delta - Aq - Bq(q-m) - \text{ꝛc.}}{q(q-m).\text{ꝛc.}}$

S.357. Z.16. ſtatt $Ay+By$ lies $Ay+By^2$

S.358. in der 5ten Colum. ſtatt $+\varepsilon$ lies $-\varepsilon$

S.365. Z.6. v. u. ſt. $\frac{\varepsilon n}{mx}$ l. $\frac{\varepsilon g}{mx}$

S.374. Z.9. — ſt. $y-y$ l. $y-dy$

S.375. Z.10. v. o ſt. $b(ax+av)dx$ l. $b(ax+ax)dx$

S.384. Z.2. — ſt. Ad l. AD

S.385. Z.8. v. o. ſtatt $= \frac{\text{Coſec}\, x}{\text{tg}\, x} dx$ lies $= \frac{-\text{Coſec.}\, x}{\text{tg}\, x} dx$

S.387. Z.5. v. u. ſt. yegm l. εegm

S. 405.

S.405. Z.2 v.o. ſtatt $\frac{w^3}{2\alpha^3}$ lies $\frac{w^3}{3\alpha^3}$

S.406. letzt. Z. ſt. $-\frac{2}{5(2x^2-1)^5}$ l. $+\frac{2}{5(2x^2-1)^5}$

S.412. Z.5. ſt. $3Bx^3$ l. $3Cx^3$

S.413. Z.4. v. u. ſt. $C=\frac{m-3}{4}.B$ l. $C=\frac{m-2}{3}.B$

— Z.3. — ſt. $D=\frac{m-4}{5}.C$ l. $D=\frac{m-3}{4}.C$

S.418. Z.4. — ſt. $=\frac{x-\alpha}{z}$ l. $=\frac{\alpha-x}{z}$

S.436. 2te Gleichung ſtatt $-\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx^{m-1}}{m}$ lies $+\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}dx^{m-1}}{m}$

— 3te Gleichung ſtatt $-\frac{(1-x^2)dx^{m-1}}{m}$ lies $-\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx^{m-1}}{m}$

S.437. Z.14. ſt. $1+\text{Conſt.}=0$ l. $1-\text{Conſt}=0$

— Z.20. ſt. (XXII) l. (XXIII)

S.440. ſteht von Z.8. bis unten immer c ſtatt a

S.460. Z.14. ſt. die vom gröſſeren Durchmeſſer eine ſtärkere, die vom kleineren eine ſchwächere, — lies: die vom größeren Durchmeſſer eine ſchwächere, die vom kleineren eine ſtärkere.

S.461. Z.7.v.u. ſt. $y+dx$ l. $y+dy$

S.463. Z.3.v.o. ſt. $-\frac{ds(1+p)^2}{dp}$ l. $-\frac{ds(1+p^2)}{dp}$

— Z.10. — ſt. $.s(M$ l. $.ds(M$

S.468. Z.6.v.u. ſt. ap l. aB

S.469. Z.11 v.o. der nemliche Fehler.

S.470. letzt. Z. ſtatt Ae l. As.

S.473. §.20, 21. u. 27. ſteht einigemahl a ſtatt b.

S.483. Z.9. ſtatt $-\frac{10y^8}{b8}$ l. $\frac{10y^8 dy}{b^8}$

S.487. Z.6.v.u. ſtatt $=:(AL-\frac{AL.As}{a})$ lies

$$= s\tau : (AL-\frac{AL.As}{a})$$

S.488. Z.5.v.u. ſt. $\sin\alpha.\sin B$ l. $\sin\alpha.\sin\beta$

— Z.3. — ſt. $AD:AB=$ l. $Ad:AB=$

S.495. Z.5.v.o. $CF-Cf$ l. $CF=Cf$

S.496. Z.5. — ſtatt $y^2-\frac{a^2-4p^2}{a^2}$ lies $y^2=$

$$\frac{a^2-4p^2}{a^2}$$

S.497. Z.3. — ſt. $(\frac{2px}{a})$ l. $(\frac{2px}{a})^2$

— letzt Z. des Nachtrags ſtatt $-\frac{1}{2}(m^2-n^2)$ l. $-\frac{1}{4}(m^2-n^2)$

S.500. Z.9 v.u. ſt. wenn Fw l. wenn Tw

— Z.5 — ſt. FNw l. FwN

S.504. Z.9.v.o. ſt. Cd l. Dd

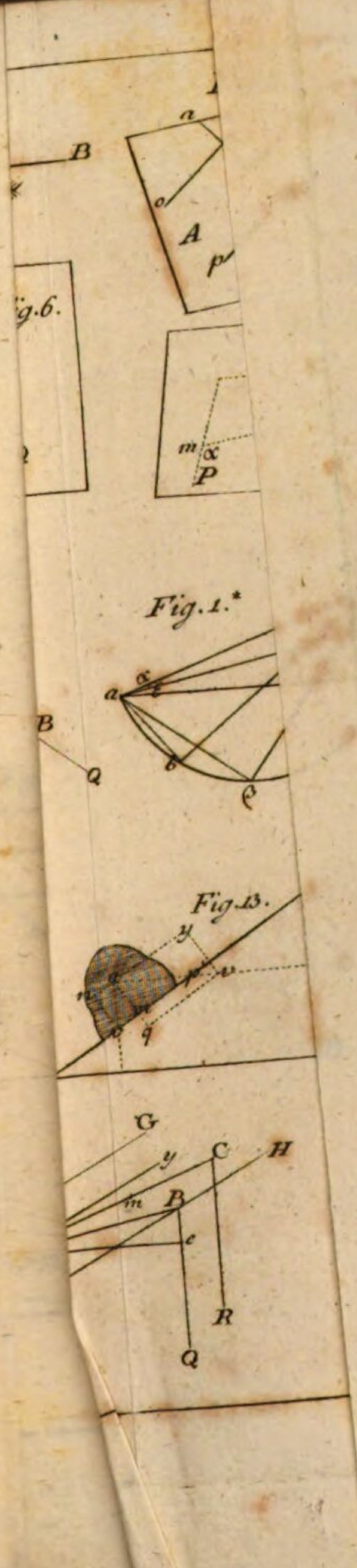
S. 507. Z. 3. v. u. ſt. x^2 l. x^3
S. 508. Z. 2. — ſt. §. 64. l. §. 63.
S. 512. Z. 4. ſteht 2mal: ziehe.
S. 515. Z. 14. ſt. $\frac{a^2-2ax+x^2}{a})$ l. $\frac{a^2+2ax+x^2}{a})$
S. 519. Z. 3. ſt. oeer l. oder
S. 522. Z. 2. muß die Gleichung $\frac{db}{a}$ wegbleiben, denn das d (§. 76) gilt nur für eine Abſciſſe vom Scheitelpunkt bis zum Brennpunkt, und hier iſt x überhaupt gemeint.
S. 523. Z. 6. ſt. $\frac{4ud+a^2}{za}$ l. $\frac{4ud+a^2}{2a}$
S. 527. Z. 4. v. u. ſt. As l. Cs
— Z. 5. — ſt. CA=An l. CA=$\frac{1}{2}$a; An=x.
S. 528. Z. 5. v. o. ſt. mc l. mC
S. 532. Z. 4. — ſt. —$\alpha\beta$ l. =$\alpha\beta$
S. 535. Z. 9. — ſt. p^2 l. $\frac{1}{2}p^2$
— Z. 11. — ſt. $\frac{1}{16}$ac l. $\frac{1}{8}$ac
— Z. 12. — ſt. CAD l. CAn
S. 545. Z. 15. — ſt. qd l. qD
S. 550. gehört zum 118. §. Fig. 23.
S. 552. letzt. Z. ſt. $(\frac{1}{2}(2r-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ l. $(\frac{1}{2}(2rx-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

Nacherinnerung. Sämmtliche vorſtehende Verbeſſerungen zur Reinen Math. ſo wie bei weitem die meiſten zu dem gegenwärtigen Bande, ſind hier ſo abgedruckt, wie ſie von Einem meiner vorzüglichſten Herrn Zuhörer, Herrn Lehmus angemerkt und mir mitgetheilt worden ſind. Ich bin dieſem hoffnungsvollen jungen Manne dafür hier meinen öffentlichen Dank ſchuldig.

K. C. L.

Gedruckt

bei Adolph Ernſt Junge.



B
a
o
A
p
ig.6.
m
α
P
Fig.1.*
a
α
B
Q
b
Fig.13.
y
n
p
v
q
G
y
C
H
m
B
e
R
Q

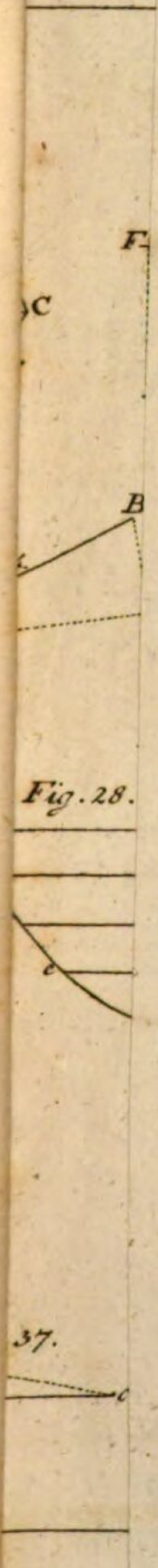
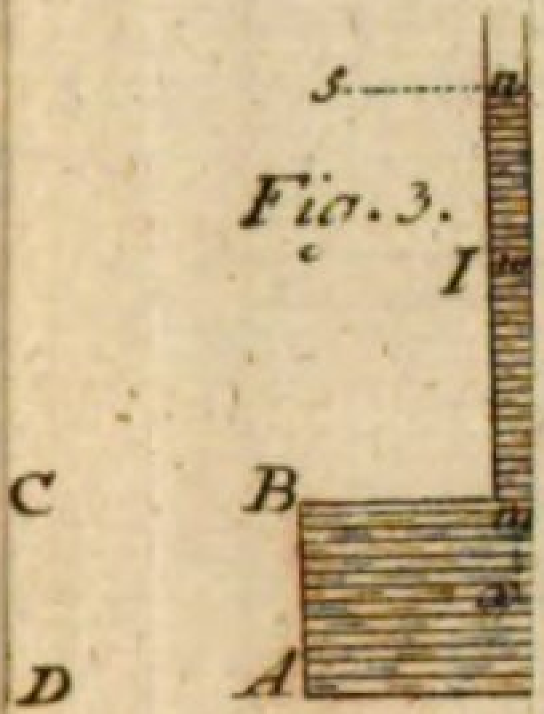

F
C
B
Fig. 28.
e
37.
c

Fig. 3.



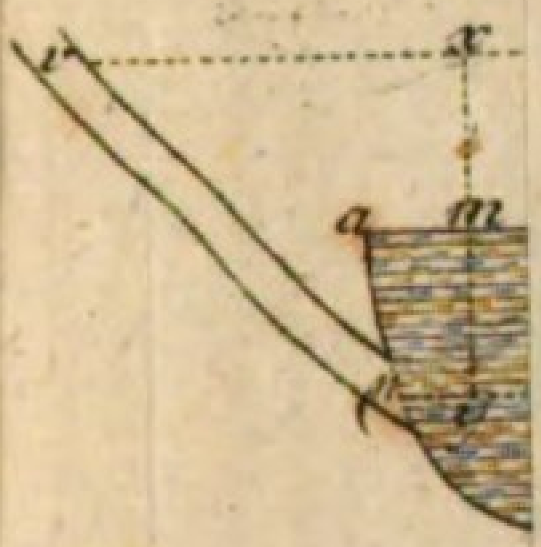
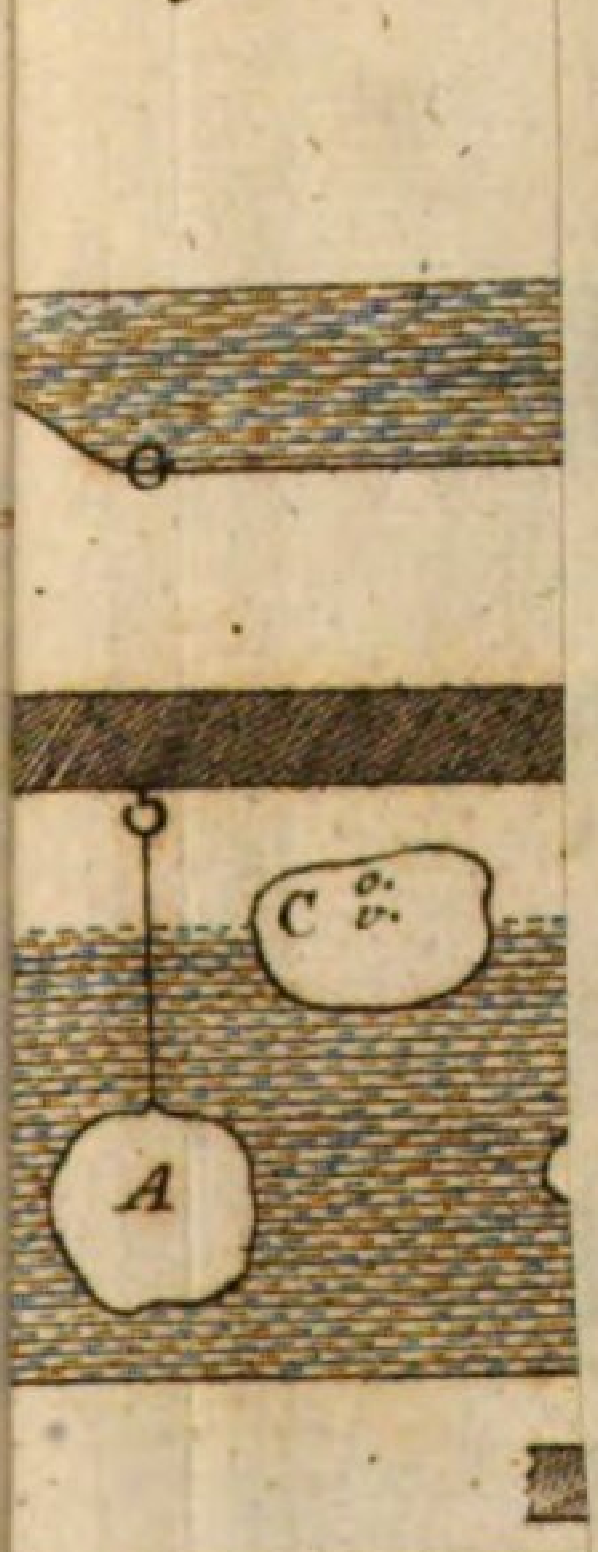


Fig. 8.



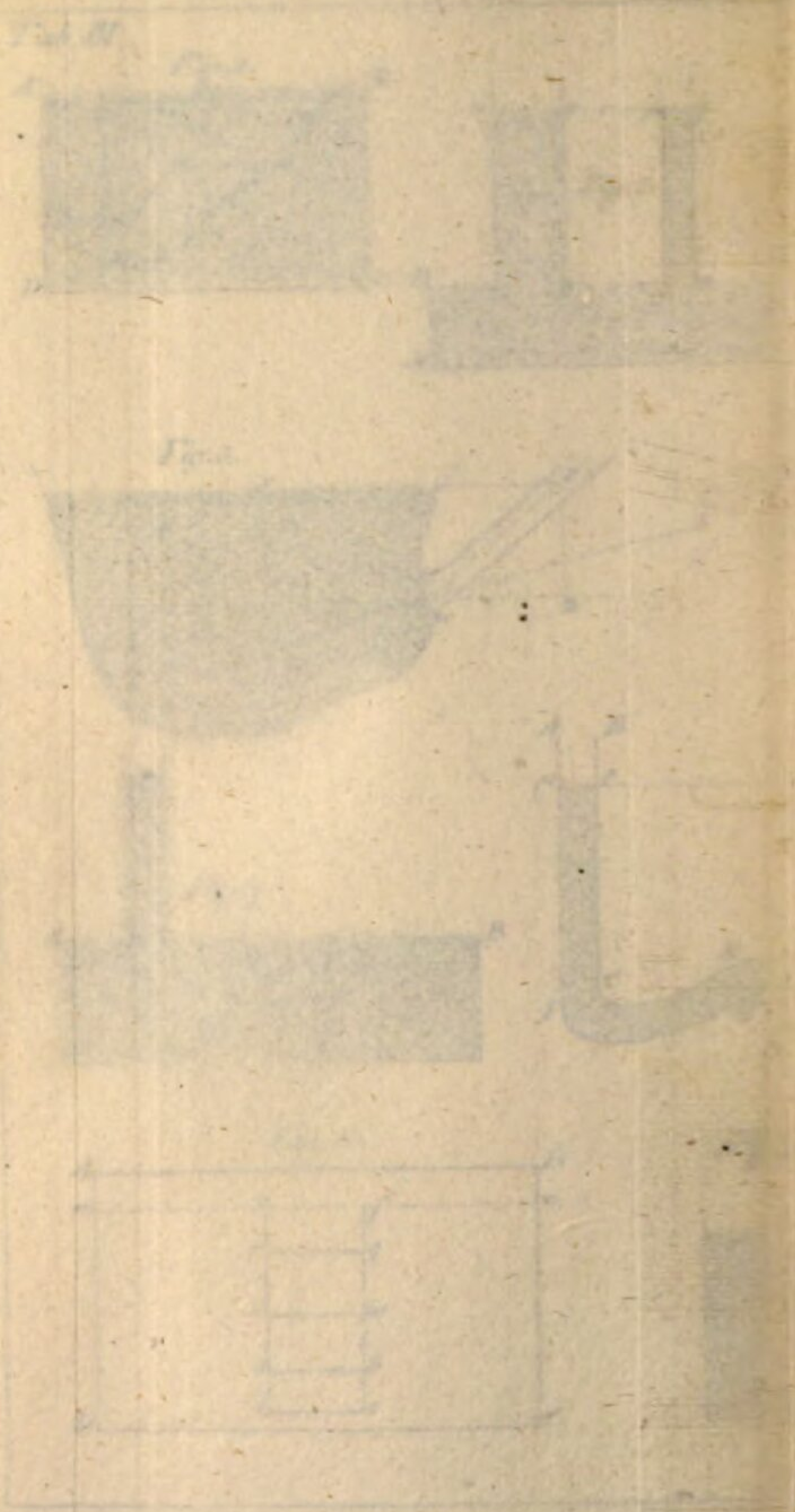
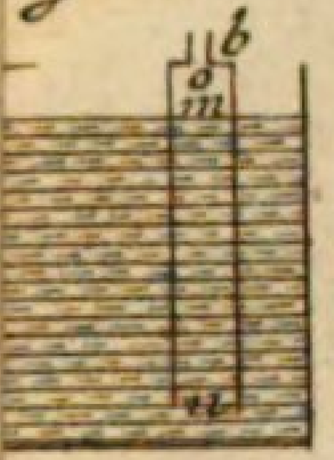


Fig.5.



F

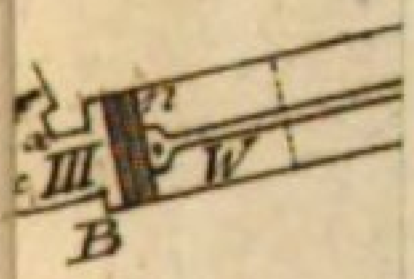


Fig..

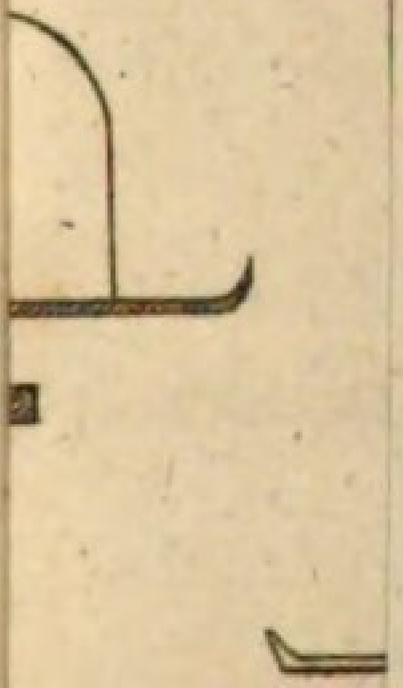


Fig.5.

.101.

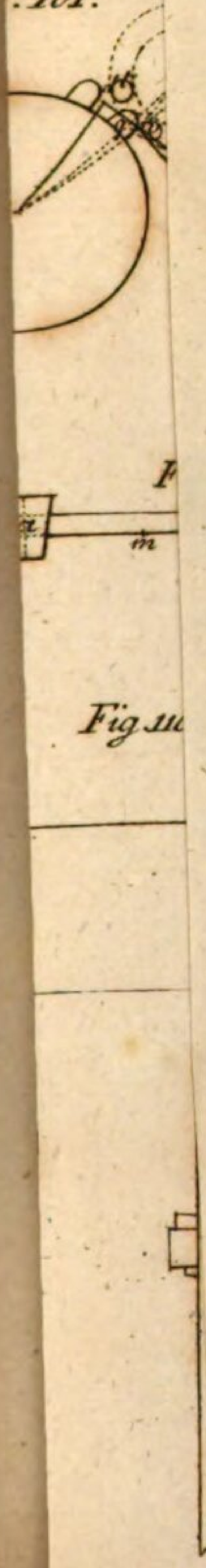
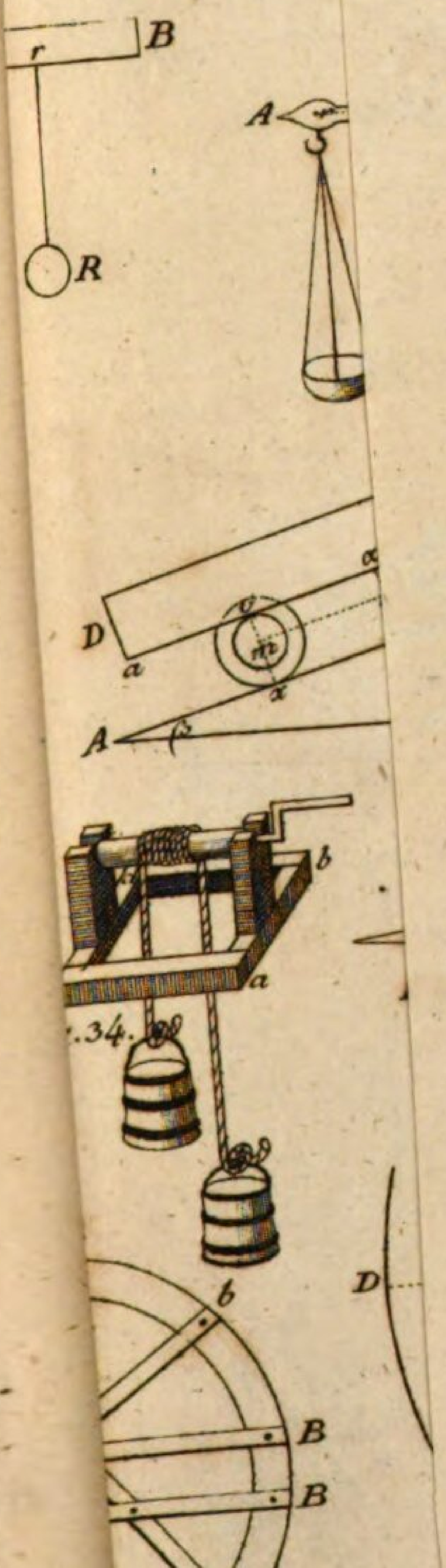
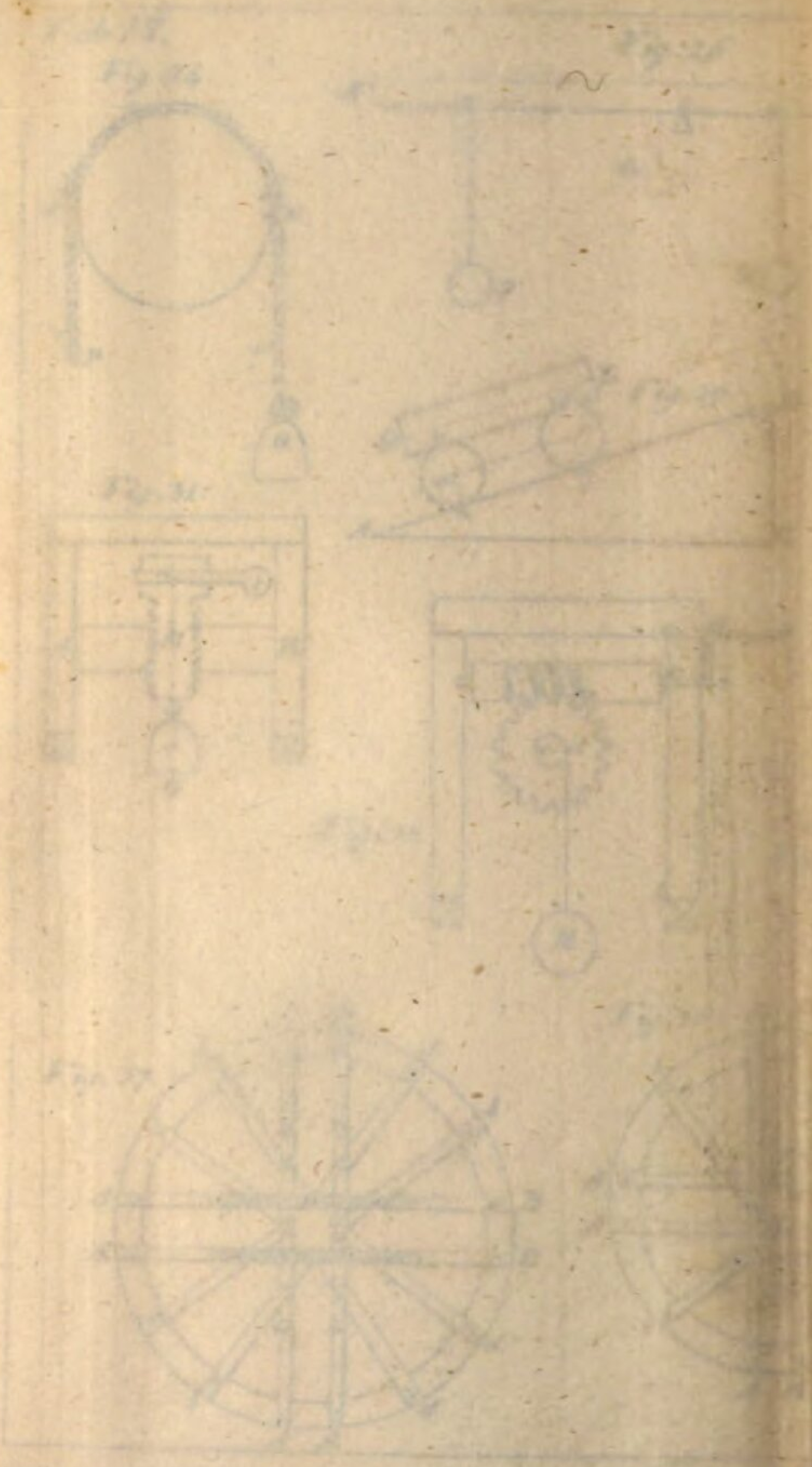


Fig.11



B
r
R
A
α
D
v
m
a
x
A
β
b
a
.34.
D
b
B
B
b



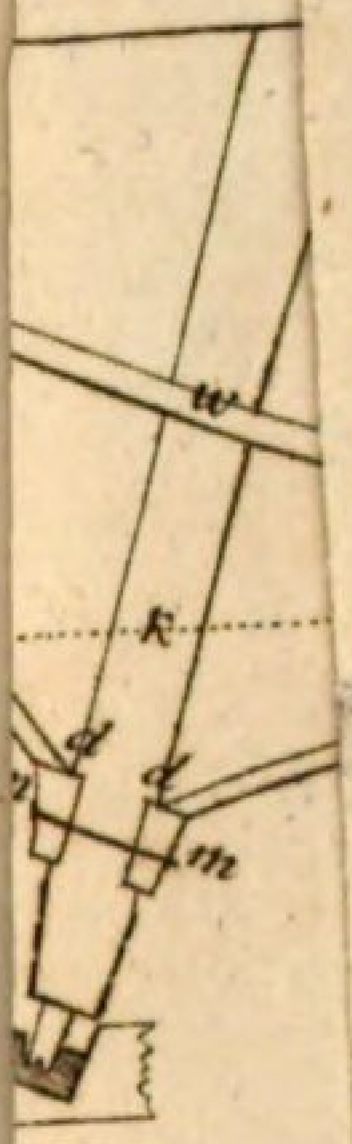
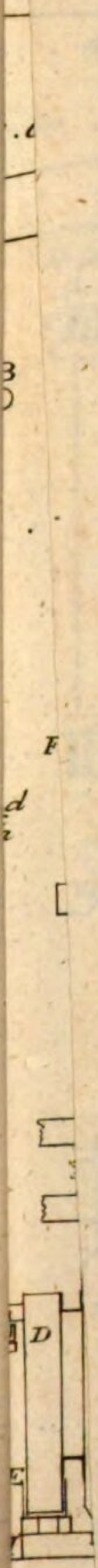
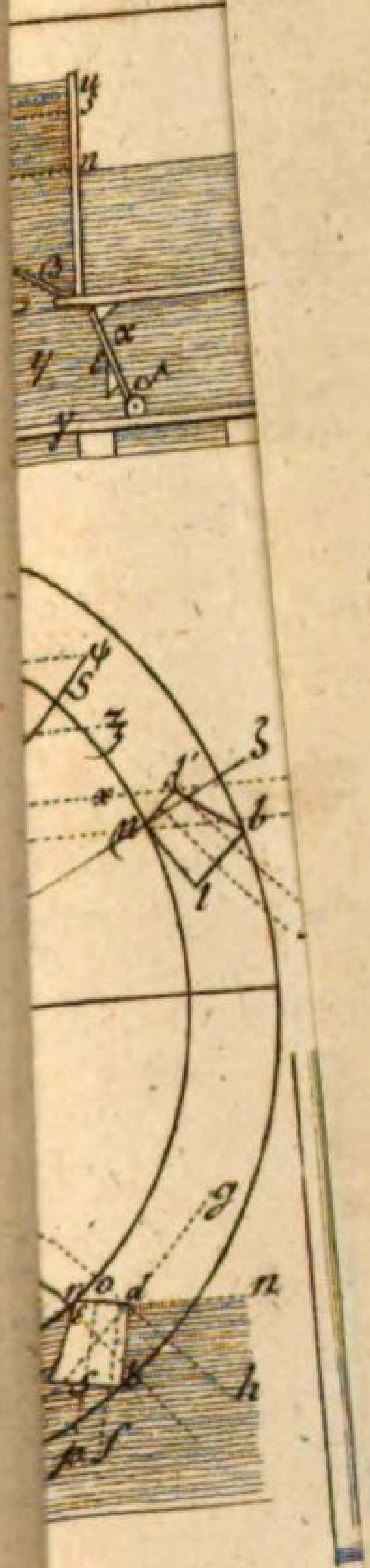


Fig. 54.

.62.
α
δ
p
h
58.


D

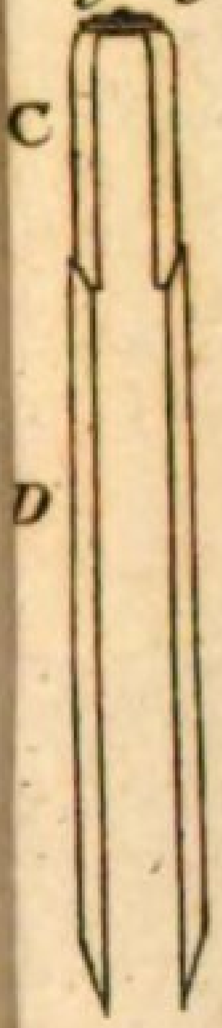


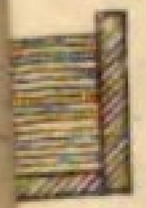
. 78.

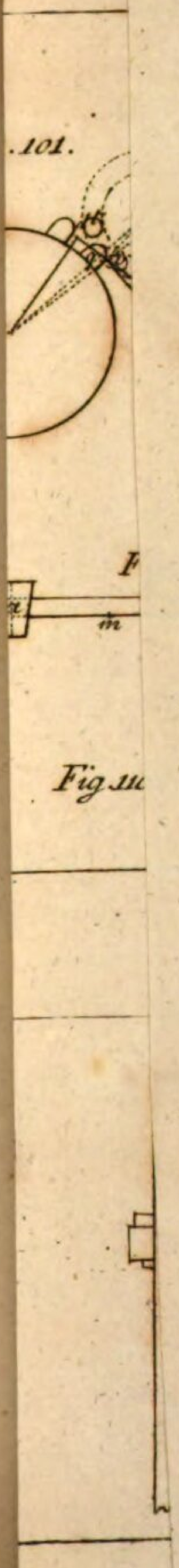
. 79.

. 80.

Fig. 89.






.101.
F
a
m
Fig.11

[illegible]

…pfertafeln.

[illegible]

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Langsdorf, Karl Christian <<von>>,

Grundlehren der mechanischen Wissenschaften, welche die Statik und Mechanik, die Hydrostatik, Aeronomie, Hydraulik und die Maschinenlehre enthalten mit besonderer Rücksicht auf Physiker und Praktiker

Erlangen 1802

Math.a. 151 h
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10080885-8